Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:

Klausur zu
Höhere Mathematik III
WiSe 2024/25

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (12 Punkte)

   a) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

   $$y' = \frac{2y}{x} + x^2, \quad x > 0.$$

   b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

   $$y' = \frac{1}{(y-2x)^2} + 2, \quad y(0) = \sqrt[3]{3}.$$

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Alle Lösungen einer Differentialgleichung der Form $y' = f(x)$ sind Stammfunktionen von $f(x)$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Jede Differentialgleichung der Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ lässt sich in eine homogene lineare Differentialgleichung überführen.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen besitzen stets mindestens eine konstante Lösung.

2. (12.5 Punkte)

   a) Bestimmen Sie für das Anfangswertproblem

   $$y'' + xy' - 3y = x^2 + 2x - 5, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

   die ersten vier Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 im Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

   b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

   $$y'' = -(y')^2,\ y(1) = -1,\ y'(1) = \frac{1}{2}\,.$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Differentialgleichung

$$y'' + x^2 y' + \sin(x+y) = \cos(x)$$

ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $y(x) = e^x$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - \frac{1}{x} y'' + \frac{1-x}{x} y = 0\,.$$

3. (8 Punkte)

Gegeben sind das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x^{-2} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad x > 0$$

und die Funktionen

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x^{-1} \\ -x^{-2} \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{y}_1$ und $\boldsymbol{y}_2$ ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems bilden.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.

4. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

b) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathscr{L}[y]$ der Lösung der Anfangswertproblems

$$y'' + 2y' + 2y = te^{-t}, \qquad y(0) = 1, y'(0) = -2.$$

Eine Berechnung der Lösung y durch Rücktransformation ist **nicht** gefordert.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{v}$ ein zugehöriger Eigenvektor, so ist

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\lambda x} \boldsymbol{v}$$

eine Lösung des Systems $\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Differentialgleichung

$$y'' - y = xe^{2x}$$

hat eine Lösung der Form $y_p(x) = (Ax+B)e^{2x}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.

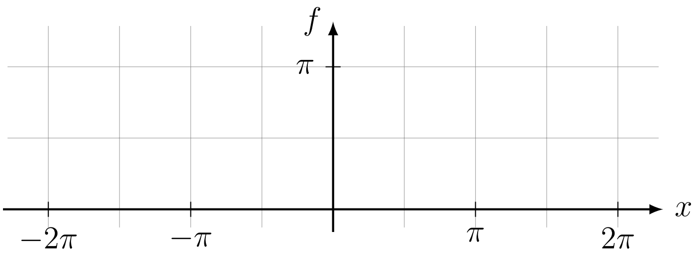
5. (9 Punkte)

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 < x < \pi, \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

und $f(x + 2\pi) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $(-2\pi, 2\pi)$ in das folgende Koordinatensystem.



b) Berechnen Sie die zugehörige Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Berechnen Sie dabei zunächst den Koeffizienten a_0 und anschließend mittels partieller Integration die Koeffizienten a_n und b_n für $n \in \mathbb{N}$. Vereinfachen Sie so weit, dass die Fourier-Koeffizienten keine Ausdrücke mit sin oder cos enthalten.

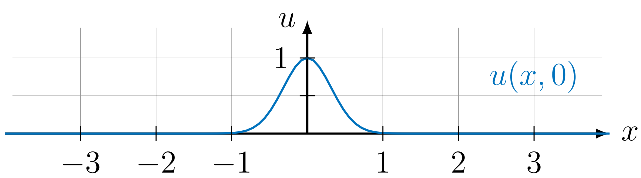
6. (8.5 Punkte)

a) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

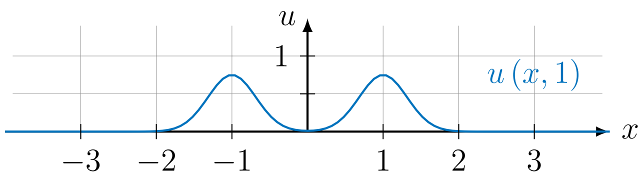
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die partielle Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} = x^2$ ist parabolisch.

☐ Wahr ☐ Falsch Gegeben ist die Wellengleichung $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$ mit den Anfangsbedingungen $u_t(x, 0) = 0$ und $u(x, 0)$ entsprechend unten stehender Abbildung:



Die Lösung der obigen Wellengleichung zum Zeitpunkt $t = 1$ ist dann gegeben durch:



b) Bestimmen Sie die Lösung des Problems

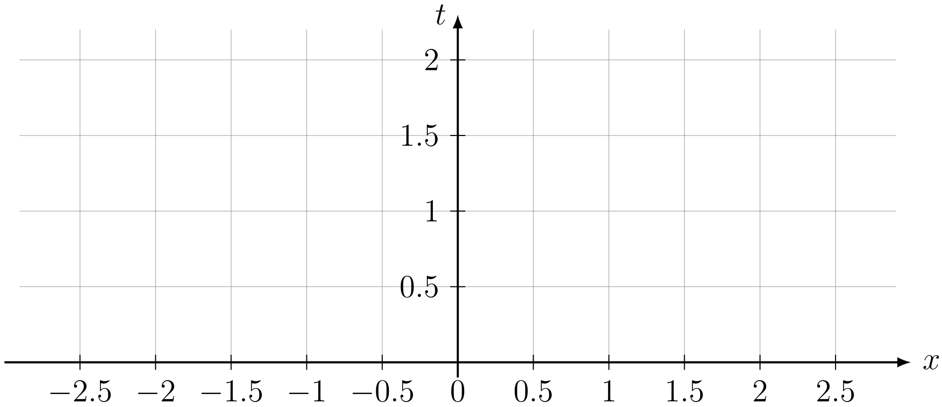
$$
\begin{aligned}
u_t &= \frac{1}{2}u_{xx}, && \text{für } (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_0^+,\\
u(x,0) &= -\sin(x) + \sin(5x) + \frac{1}{4}\sin(7x), && \text{für } x \in (0,\pi),\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && \text{für } t \geq 0.
\end{aligned}
$$

c) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$
u_t + uu_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+, \qquad u(x,0) = \begin{cases} x-2, & x < 2,\\ 0, & 2 \leq x. \end{cases}
$$

i) Skizzieren Sie den Verlauf der Charakteristiken durch $(x_0, 0)$ für die folgenden 4 Stellen:

$$
x_0 = \frac{1}{2}, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = \frac{3}{2}, \quad x_0 = 2\,.
$$



ii) Bestimmen Sie mithilfe der Charakteristiken den Lösungswert $u(-1,1)$.

iii) Geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Lösung u zur Zeit $t = 5$ den Wert $u(x,5) = 0$ annimmt.

Hinweis: Die Angabe eines Rechenwegs ist nicht erforderlich.