Klausur zu
Höhere Mathematik III
SoSe 2025

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (11 Punkte)

   a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = e^{-y}\cos(x),\ 0 < x < \pi, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Lösung: $y(x) = \ln(\sin(x))$

   b) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = y - 2y^2\,.$$

   i) Bestimmen Sie zunächst alle konstanten Lösungen.

   ii) Berechnen Sie nun alle weiteren Lösungen der Differentialgleichung mit Hilfe des Ansatzes einer *Bernoulli-Differentialgleichung*.

Lösung:

i) Die konstanten Lösungen sind $y(x) = 0$ und $y(x) = \frac{1}{2}$.

ii) Die weiteren Lösungen sind $y(x) = \dfrac{1}{2 + ce^{-x}}\,,\ c \in \mathbb{R}\,.$

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen sind immer nichtlinear.

☐ Wahr ■ Falsch Das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sqrt{|y(x)|},\ y(0) = 0$$

hat die eindeutige Lösung $y(x) = 0$.

2. (13 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = \frac{4}{3}y^{\frac{1}{3}},\ y(0) = 1,\ y'(0) = \sqrt{2}\,.$$

Lösung: $y(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}x + 1\right)^3$

b) Zeigen Sie, dass durch $y_1(x) = x^2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0,\ x > 0$$

gegeben ist und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung mittes des *d'Alembertschen Reduktionsprinzips*.

Lösung: Ein Fundamentalsystem ist $y_1(x) = x^2,\ y_2(x) = x^{-2}$.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die Differentialgleichung

$$y'' + x^2y' = x$$

ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

☐ Wahr ■ Falsch Eine homogene lineare Differentialgleichung der Form

$$y''(x) = f(x)y + g(x)y'$$

lässt sich in das äquivalente Differentialgleichungsystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & g(x) \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

überführen.

3. (9 Punkte)

a) Geben Sie einen Ansatz an für eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 3y = x^3 e^x.$$

Eine Berechnung der Lösung ist **nicht** erforderlich.

Lösung: $y_p(x) = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^x$

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Lösung: $\boldsymbol{y}(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

4. (8 Punkte)

a) Lösen Sie mit der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + y = 3, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Lösung: $y(t) = 3 - 3e^{-t} - 3te^{-t}$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Hat das charakteristische Polynom einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten die Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2+\mathrm{i}, \lambda_4 = 2-\mathrm{i}$ so ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{2x}\sin(x) + c_4 e^{2x}\cos(x),\ \ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

☐ Wahr ■ Falsch Für die Laplace-Transfomation des Produktes zweier Funktionen gilt

$$\mathscr{L}[f(t)\cdot g(t)] = \mathscr{L}[f(t)]\cdot\mathscr{L}[g(t)]\,.$$

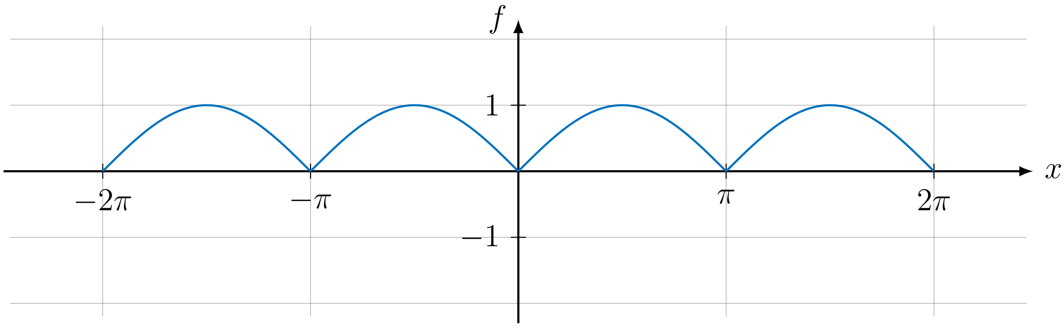
5. (10.5 Punkte)

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |\sin(x)|\,, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

und $f(x + 2\pi) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ in das folgende Koordinatensystem.



b) Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und b_1 der zugehörigen Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Tipp: a_1 und a_2 lassen sich jeweils mittels partieller Integration bestimmen, a_1 auch mit Hilfe eines Additionstheorems. Bei a_2 wird zweimalige partielle Integration benötigt.

Lösung: $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3\pi}$, $b_1 = 0$

6. (8.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \sin(x),\ u_t(x,0) = x.$$

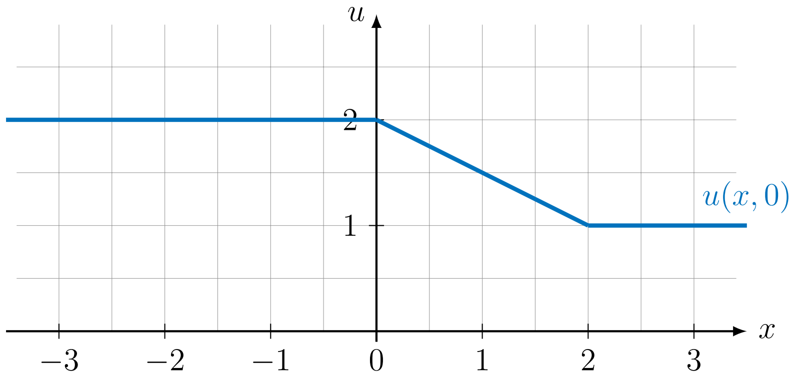
Vereinfachen Sie die Lösung so weit wie möglich.

Lösung: $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-3t) + \sin(x+3t)\right) + tx$

b) Wir betrachten das Anfangswertproblem

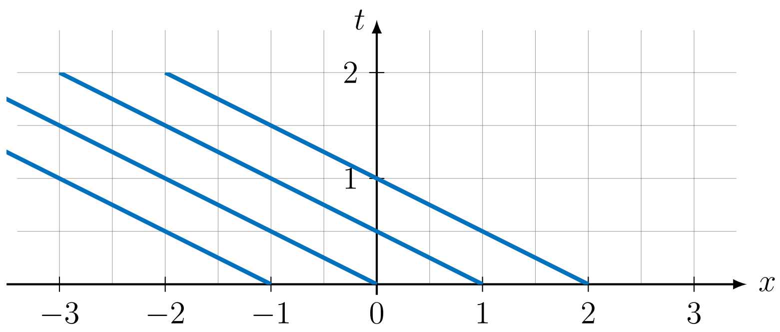
$$u_t - 2u_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 2, & x \le 0, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 1, & 2 \le x. \end{cases}$$

i) Zeichnen Sie die Anfangsbedingung $u(x,0)$ in das folgende Koordinatensystem.

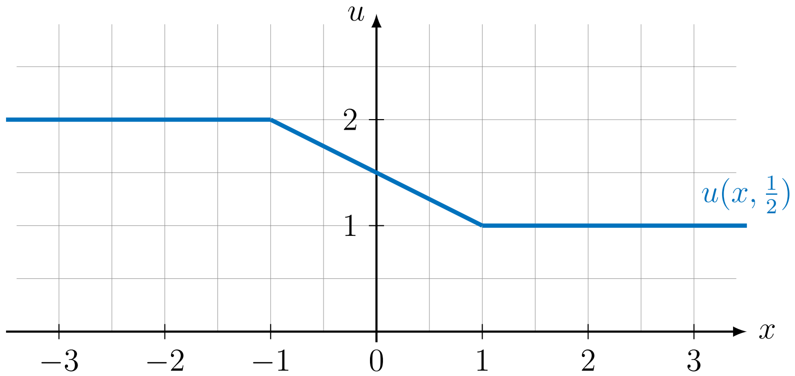


ii) Skizzieren Sie den Verlauf der Charakteristiken durch $(x_0, 0)$ für die folgenden 4 Stellen:

$$x_0 = -1, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2\,.$$



iii) Zeichnen Sie die Lösung zur Zeit $t = \frac{1}{2}$ in das folgende Koordinatensystem.



c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Ist $u\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x,t) = \alpha x + \beta$ für beliebige Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist u eine Lösung der Burgersgleichung.

■ Wahr ☐ Falsch Bei der Burgersgleichung hängen die Steigungen der Charakteristiken von den Anfangsbedingungen ab.