

Nachname:

Nachname:	
Vorname:	
Matrikelnummer:	

**Klausur zu
Höhere Mathematik III
SoSe 2025**

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (11 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = e^{-y} \cos(x), \quad 0 < x < \pi, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

b) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = y - 2y^2.$$

- Bestimmen Sie zunächst alle konstanten Lösungen.
- Berechnen Sie nun alle weiteren Lösungen der Differentialgleichung mit Hilfe des Ansatzes einer *Bernoulli-Differentialgleichung*.
- Bei dieser Kreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr Falsch Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen sind immer nicht-linear.
 Wahr Falsch Das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sqrt{|y(x)|}, \quad y(0) = 0$$

hat die eindeutige Lösung $y(x) = 0$.

2. (13 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = \frac{4}{3}y^{\frac{1}{3}}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$$

b) Zeigen Sie, dass durch $y_1(x) = x^2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad x > 0$$

gegeben ist und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung mittels des *d'Alembertschen Reduktionsprinzips*.

- c) Bei dieser Kreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr Falsch Die Differentialgleichung

$$y'' + x^2 y' = x$$

ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

- Wahr Falsch Eine homogene lineare Differentialgleichung der Form

$$y''(x) = f(x)y + g(x)y'$$

lässt sich in das äquivalente Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & g(x) \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

überführen.

3. (9 Punkte)

- a) Geben Sie einen Ansatz an für eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 3y = x^3 e^x.$$

Eine Berechnung der Lösung ist **nicht** erforderlich.

- b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

4. (8 Punkte)

- a) Lösen Sie mit der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + y = 3, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

- b) Bei dieser Kreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr Falsch Hat das charakteristische Polynom einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten die Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2+i$, $\lambda_4 = 2-i$ so ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{2x} \sin(x) + c_4 e^{2x} \cos(x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

- Wahr Falsch Für die Laplace-Transformation des Produktes zweier Funktionen gilt

$$\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)].$$

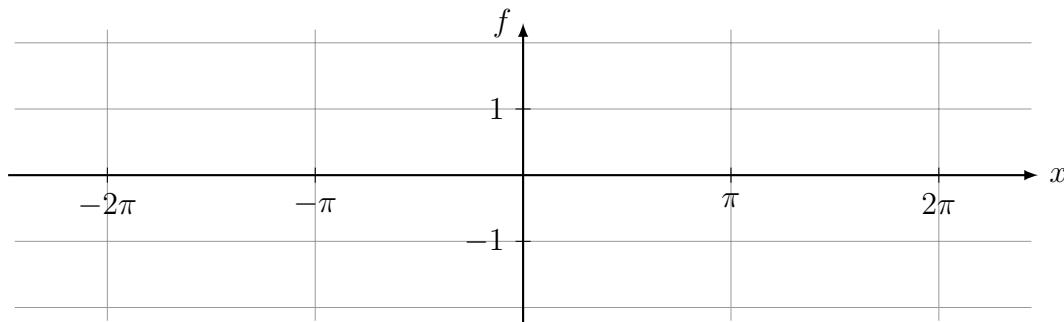
5. (10.5 Punkte)

Gegeben ist die 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |\sin(x)|, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

und $f(x + 2\pi) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

- a) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ in das folgende Koordinatensystem.



- b) Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und b_1 der zugehörigen Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Tipp: a_1 und a_2 lassen sich jeweils mittels partieller Integration bestimmen, a_1 auch mit Hilfe eines Additionstheorems. Bei a_2 wird zweimalige partielle Integration benötigt.

6. (8.5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

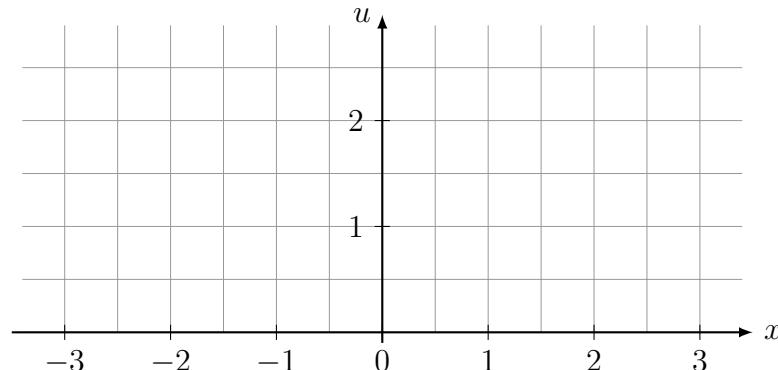
$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = \sin(x), \quad u_t(x, 0) = x.$$

Vereinfachen Sie die Lösung so weit wie möglich.

- b) Wir betrachten das Anfangswertproblem

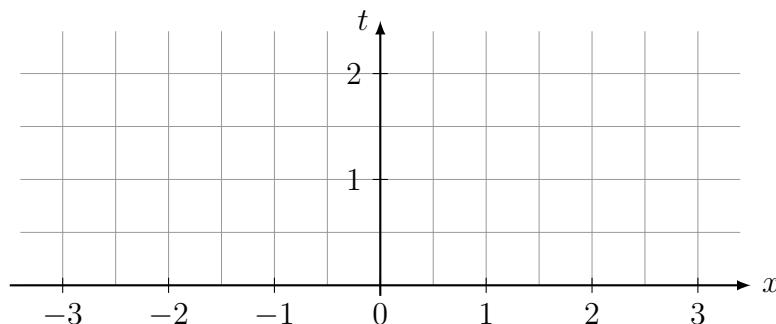
$$u_t - 2u_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 2, & x \leq 0, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

- i) Zeichnen Sie die Anfangsbedingung $u(x, 0)$ in das folgende Koordinatensystem.

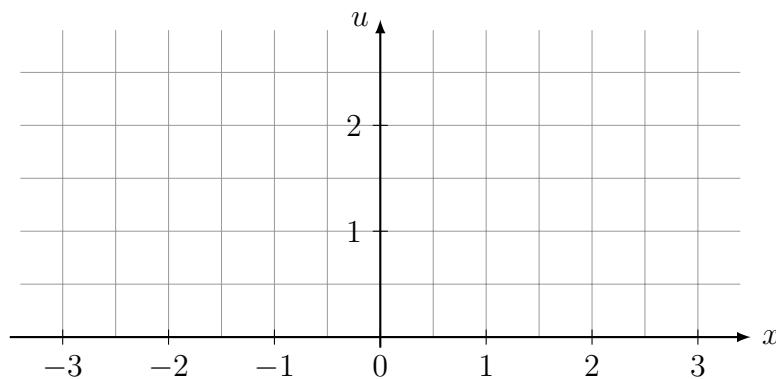


ii) Skizzieren Sie den Verlauf der Charakteristiken durch $(x_0, 0)$ für die folgenden 4 Stellen:

$$x_0 = -1, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2.$$



iii) Zeichnen Sie die Lösung zur Zeit $t = \frac{1}{2}$ in das folgende Koordinatensystem.



c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Ist $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x, t) = \alpha x + \beta$ für beliebige Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist u eine Lösung der Burgersgleichung.

Wahr Falsch Bei der Burgersgleichung hängen die Steigungen der Charakteristiken von den Anfangsbedingungen ab.