Aufgabe 1: (Taylorentwicklung)
In der klassischen Mechanik hat ein Körper der Ruhemasse m_0 und der Geschwindigkeit v eine kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 .$$

In der speziellen Relativitätstheorie wird gezeigt, dass bei großen Geschwindigkeiten eine Masseänderung eintritt. Die Masse berechnet sich aus der Formel

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Einsteinsche Formel für die Energie

$$E = mc^2 = E_{\text{Ruhe}} + E_{\text{kin}} = m_0 c^2 + E_{\text{kin}}$$

liefert also die relativistische Formel

$$E_{\text{kin}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

für die kinetische Energie.

Zeigen Sie durch eine Taylorentwicklung der Abbruchordnung 5, dass für kleine Geschwindigkeiten v (oder für $c \to \infty$) sich im Wesentlichen wieder der klassische Fall ergibt. Wie groß ist der Fehler bis zur fünften Ordnung?

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie mit dem Verfahren aus Sitzung 10.8 (ohne `SpecialFunctions`) holonome Differentialgleichungen für

(a) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}$

(b) $e^{-\frac{1}{x^2}}$

(c) $\cos(x) \cdot \sin(x)$

(d) $\arcsin^2(x)$ (kleinste Ordnung ist 3)

(e) die rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$.

(8 Punkte)

Abgabetermin: bis spätestens Donnerstag, 08.11.2012, 08.15 Uhr an nana@mathematik.uni-kassel.de.