

Aufgabe 1: (Algebraische Funktionen) Bestimmen Sie die holonomen Differentialgleichungen der folgenden algebraischen Funktionen. Konvertieren Sie die Differentialgleichungen jeweils in die korrespondierenden Rekursionsgleichungen und stellen Sie fest, bei welchen der algebraischen Funktionen es sich um Funktionen vom hypergeometrischen Typ handelt.

(a) $(y(x) - r)^2 + x^2 - r^2 = 0$

(b) $y(x)^3 + xy(x)^2 + x^2 = 0$

Laden Sie nach Bearbeitung von (a) und (b) `SpecialFunctions`.

(c) Überprüfen Sie (a) und (b) mit `AlgebraicDE`.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Benutzen Sie das Newtonverfahren, um $\sqrt[3]{7}$ zu approximieren (also $x^3 - 7 = 0$ zu lösen). Geben Sie die ersten 5 Approximationen beginnend mit dem Startwert 2 in einer sinnvollen numerischen Genauigkeit an. Bestimmen Sie die Differenzen zum exakten Wert auf 20 Dezimalstellen. Woran sieht man die quadratische Konvergenz?

(b) Nun betrachten wir statt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion $F : \mathbb{R}[[x]] \rightarrow \mathbb{R}[[x]]$, gegeben durch $F(y) = x^2y + y^2x - y - 1$. Sei ferner $y_0 = -1$. Dann können wir die Taylorreihe von $y(x)$ aus der implizit gegebenen Gleichung $F(y) = 0$ bestimmen.

(i) Bestimmen Sie die explizite Lösung $y(x)$.

(ii) Bestimmen Sie hieraus das Taylorpolynom vom Grad 15.

(iii) Bestimmen Sie aus der expliziten Lösung die holonome Differentialgleichung von $y(x)$.

(iv) Verwenden Sie die Methode aus Abschnitt 10.4 zur erneuten Bestimmung der Differentialgleichung von $y(x)$.

(v) Verwenden Sie die Programme `ImplicitTaylor` und `FastImplicitTaylor` aus Abschnitt 10.5 zur Berechnung der abgebrochenen Taylorreihen vom Grad 127. Vergleichen Sie die Rechenzeiten.

(8 Punkte)