Prof. Dr. W.Koepf
Dr. E. Nana Chiadjeu

Übungen zur Vorlesung

UNI KASSEL VERSITÄT

Übungsblatt 10 **COMPUTERALGEBRA II** **20.12.2012**

Achtung: Die Aufgaben 1) und 2) sind Pflicht und die anderen sind Bonus-Aufgaben

Aufgabe 1: (Dispersionsmenge)
Verwenden Sie folgenden Satz, um eine Prozedur zu schreiben, die die Dispersionsmenge zweier Polynome u_k und v_k bestimmt.

Seien $p_k, q_k \in \mathbb{K}[k]$. Dann gilt

$$\gcd(p_k, q_k) \not\equiv 1 \quad \Longleftrightarrow \quad res(p_k, q_k) = 0,$$

wobei $res(p_k, q_k)$ die Resultante[1] *von p_k und q_k bezeichnet.*

Die Berechnung der Resultanten kann man mit dem `Mathematica`-Befehl `Resultant` durchführen. Vergleichen Sie die Laufzeit Ihrer Prozedur mit der Prozedur `DispersionsMenge` aus der Vorlesung an dem Beispiel.

$$u_k = \sum_{m=0}^{10} (2m^2 - m + 5)k^m \quad \text{und} \quad v_k = \sum_{m=0}^{10} (2m^2 - m + 5)(k - 100)^m$$

(8 Punkte)

Aufgabe 2: (Gosper-Algorithmus)
Für die folgenden Aufgaben können Sie die Prozedur `DiskreteStammfunktion` aus dem `SpecialFunctions`-Package verwenden.

(a) In SIAM Review 36, 1994, Problem 94-2 wurde die folgende Frage gestellt:
Determine the infinite sum

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n-1)!!}{2^n(2n-1)(n+1)!}$$

where $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.
Lösen Sie das Problem mit dem Gosper-Algorithmus. Schreiben Sie dabei zunächst die Doppelfakultät in einen Ausdruck mit Fakultäten um.

(b) Zeigen Sie mit dem Gosper-Algorithmus, dass die harmonischen Zahlen

$$H_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}$$

keinen hypergeometrischen Term bilden.

(8 Punkte)

[1] für eine Definition der Resultanten siehe Abschnitt 7.5 in *Computeralgebra* von W. Koepf

Aufgabe 3: (Inverse Potenzreihen bzgl. Komposition)

(a) Programmieren Sie den Algorithmus aus Satz 10.2 als `MyInverseSeries[a]`.

(b) Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom zehnten Grades der Inversen von $f(x)$:

(i) $f(x) = e^x - 1$;

(ii) $f(x) = \sqrt{x}$

(iii) $f(x) = x^2$;

(iv) $f(x) = \ln(1 + x)$;

(v) $f(x) = x\, e^x$.

(c) Vergleichen Sie Ihre Resultate aus (b) mit denen von `InverseSeries`.

(7 Punkte)

Aufgabe 4: (Summenalgorithmus für Rekursionsgleichungen)
Gegeben seien die Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} RE1: &\quad A_{k+1} - (k+1)A_k = 0 \\ RE2: &\quad B_{k+2} - k^2(k+2)B_{k+1} + 2B_k = 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz 10.9 der Vorlesung die Rekursionsgleichung RE, deren Lösung die Summe der Lösungen von $RE1$ und $RE2$ ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 5: (Lambertsche W-Funktion)
Die Lambertsche W-Funktion (`ProductLog` in `Mathematica`) ist definiert als die Umkehrfunktion von $f(x) = x\, e^x$.

1. Zeigen Sie, daß für die Ableitung $W'(x)$ die Gleichung

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}$$

gilt.

2. Lösen Sie die Gleichung $3^t = 5\,t$ mittels der Lambertschen W-Funktion.

3. Bestimmen Sie das Integral

$$\int W(x)\, dx$$

ohne Verwendung von `Mathematica`.
Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = W(x)$.

(8 Punkte)

Abgabetermin: bis spätestens Donnerstag, 17.01.2013, 08.15 Uhr an nana@mathematik.uni-kassel.de.