Prof. Dr. W. Koepf
Dr. E. Nana Chiadjeu

Übungen zur Vorlesung

UNI KASSEL VERSITÄT

Übungsblatt 11 **COMPUTERALGEBRA II** **17.01.2013**

Aufgabe 1: (WZ-Methode und WZ-Zertifikat)
Sei $\tilde{F}(n,k)$ eine hypergeometrischer Term in n und k und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(n,k) = t_n \tag{1}$$

mit hypergeometrischem Term t_n. Die Identität (1) ist äquivalent zu

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n,k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{F}(n,k)}{t_n} = 1$$

mit hypergeometrischem Term $F(n,k)$ in n und k. Um zu beweisen, dass (1) bzw. $s_n = 1$ gilt, bestimmt man bei der *WZ-Methode* (nach Wilf und Zeilberger) eine rationale Funktion $R(n,k)$, so dass

$$F(n+1,k) - F(n,k) = R(n,k+1)F(n,k+1) - R(n,k)F(n,k) \tag{2}$$

gilt. Die Funktion $R(n,k)$ nennt man das *WZ-Zertifikat*. Bei Kenntnis von $R(n,k)$ kann man dann durch reine rationale Arithmetik die Identität (1) beweisen, indem man

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} - 1 = R(n,k+1)\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} - R(n,k) \tag{3}$$

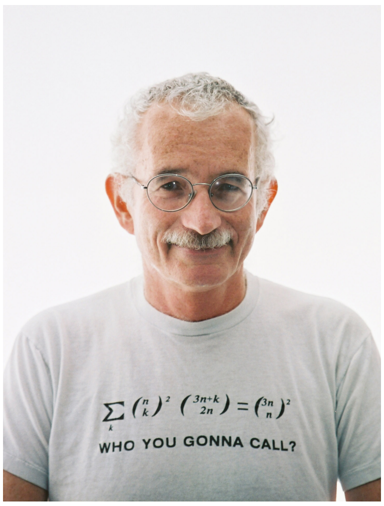
und $s_0 = 1$ verifiziert. Dann gilt nämlich (2) und damit

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(F(n+1,k) - F(n,k)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(R(n,k+1)F(n,k+1) - R(n,k)F(n,k)\right) = 0.$$

Bestimmen Sie mit dem Gosper-Algorithmus für die folgenden Summen das WZ-Zertifikat und überprüfen Sie jeweils die Gleichung (3).

(a)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{3n+k}{2n} = \binom{3n}{n}^2$$



Doron Zeilberger

(b)

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{m+k} \binom{m+k}{2k} 4^k = \frac{4^m \binom{n}{m} \binom{n-1/2}{m}}{\binom{2m}{m}}$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m-r+s}{k} \binom{n+r-s}{n-k} \binom{r+k}{n+m} = \binom{r}{m} \binom{s}{n}$$

(d)

$$\sum_{k=-n}^{n} (-1)^k \binom{n+a}{n+k} \binom{a+n}{a+k} = \binom{n+a}{n}$$

(e)

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \binom{s}{k} = s \binom{n+s-1}{n-1}$$

(12 Punkte)

Aufgabe 2: Beweisen Sie die Identität

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (1+4x)^k$$

mit dem Zeilberger-Algorithmus (z.B. `SumRekursion` aus `SpecialFunctions`). Warum sind die Grenzen der beiden Summen natürlich?

(4 Punkte)

Abgabetermin: bis spätestens Donnerstag, 24.01.2013, 08.15 Uhr an nana@mathematik.uni-kassel.de.