Prof. Dr. W. Koepf
Dr. E. Nana Chiadjeu

Übungen zur Vorlesung

UNIKASSEL VERSITÄT

Übungsblatt 13 **COMPUTERALGEBRA II** **31.01.2013**

Aufgabe 1:
Benutzen Sie die Formel

$$\int \frac{c(x)}{d(x)} = \sum_{\{a|d(a)=0\}} \frac{c(a)}{d'(a)} \ln(x-a)$$

mit $c(x)$, $d(x) \in \mathbb{K}[x]$ wobei $d(x)$ quadratfrei und $deg(c(x),x) < deg(d(x),x)$ ist, um die folgenden Integrale anhand Mathematica zu berechnen.

(a)
$$\frac{1}{x^6+2x^4-x^2-2}$$

(b)
$$\frac{x^2+4}{x^5+x^4+x^3-3x^2-3x-3}$$

(c)
$$\frac{3x^4-x^3+5x^2}{x^6+2x^4+x^5+x^3-5x^2-6x-6}$$

(8 Punkte)

Aufgabe 2:
In der Zeitschrift *Americal Mathematical Monthly* erschien in der *Problems Section* unter der Nummer 10473 folgende Frage:
Prove that there are infinitely many positive integers m such that

$$s_m := \frac{1}{5\cdot 2^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}3^k$$

is an odd integer.
Beweisen Sie folgende Aussagen und lösen Sie damit obiges Problem:

(a) Die Summe s_m erfüllt die Rekursionsgleichung zweiter Ordnung

$$s_{m+2} - 4s_{m+1} + s_m = 0.$$

(b) Die Summe s_m erfüllt die Rekursionsgleichung dritter Ordnung

$$s_{m+3} - 5s_{m+2} + 5s_{m+1} - s_m = 0.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Zahlen $5s_{3n}$, s_{3n+1} und $5s_{3n+2}$ ungerade ganze Zahlen. Insbesondere sind also alle Zahlen s_{3n+1} ungerade.
Hinweis: vollständige Induktion.

(d) Es gilt

$$s_m = \frac{1}{10}\left((1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^m + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^m\right).$$

(8 Punkte)

Abgabetermin: bis spätestens Donnerstag, 07.02.2013, 08.15 Uhr an nana@mathematik.uni-kassel.de.