Dissertation

Eigenschaften chromatischer Polynome

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

am Fachbereich für Mathematik und
Naturwissenschaften der Universität Kassel

vorgelegt von

Melanie Gerling

Tag der Disputation:
13. Oktober 2015

Erstgutachter:
Prof. Dr. Wolfram Koepf
Universität Kassel

Zweitgutachter:
Prof. Dr. Peter Tittmann
Hochschule Mittweida

Für meine Eltern Reinhard und Ilse Gerling

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Auf dem Gebiet der Eckenfärbungsproblematik bei Graphen stellt das chromatische Polynom seit einem guten Jahrhundert einen festen Bestandteil dar. Seit seiner ursprünglichen Einführung unterlag es stets unterschiedlichen Verallgemeinerungen, wobei jedoch noch immer sehr viele offene Fragen bestehen. Wie bereits bewiesen wurde, ist die Berechnung des chromatischen Polynoms eines beliebigen Graphen ein NP-vollständiges Problem, weshalb bis heute kein genereller effizienter Algorithmus zur Lösung dieses Problems existiert. Diese Tatsache gibt Anlass für die vorliegende Arbeit, in welcher Methoden zur Berechnung chromatischer Polynome häufig auftretender Graphentypen entwickelt werden.

1.1 Überblick über die Entwicklung chromatischer Polynome

Der Ursprung chromatischer Polynome lässt sich bis ins Jahr 1852 zurückverfolgen, in welchem Francis Guthrie bekanntlich die Vierfarbenvermutung äußerte. Jene besagt, dass stets vier voneinander verschiedene Farben ausreichen, um die Länder auf einer Landkarte derart einzufärben, dass jedes Land in genau einer Farbe gefärbt wird, und zwei Länder, welche eine gemeinsame Grenze besitzen, verschieden voneinander gefärbt sein müssen. Diese Frage zog das Interesse der Forschung auf sich, und infolge dessen führte George D. Birkhoff im Jahre 1912 ([3], S. 42 ff.) erstmals ein Polynom ein, welches seit 1946 durch Birkhoff und Lewis ([4], S. 360) als chromatisches Polynom bekannt wurde. Wie Birkhoff und Lewis bemerkten, geht das chromatische Polynom nicht nur der Frage nach, ob eine gegebene Anzahl an Farben ausreicht, um die Länder auf einer Landkarte in der geforderten Weise einzufärben. Vielmehr vermag es auch die Anzahl zulässiger Färbungen einer Karte zu einer gegebenen, beliebigen Farbenmenge zu verraten. Diese Problematik lässt sich graphentheoretisch interpretieren, indem man eine Karte derart als einen Graphen auffasst, dass die Länder den Ecken des Graphen entsprechen und zwei Ecken genau dann durch eine Kante miteinander verbunden werden, wenn die zugehörigen Länder benachbart sind. Bis heute wurde das so eingeführte chromatische Polynom, welches wir in dieser Arbeit vorwiegend 'univariates chromatisches Polynom' nennen werden, vielfach erforscht und auch verallgemeinert.
Eine sehr bekannte Verallgemeinerung des univariaten chromatischen Polynoms stammt von Tutte und Whitney, welche ihren Ursprung bereits im Jahre 1931 bei Whitney ([34], S. 122 ff.) fand und 1954 bei Tutte ([30], S. 85 ff.) als dichromatisches Polynom bekannt wurde. Dieses wird auch Tutte-Polynom oder Tutte-Whitney-Polynom genannt und ist ein bivariates Polynom. Es erlaubt grob gesagt in der ersten Variablen Aussagen darüber, wie stark der Graph

außerhalb von Teilgraphen zusammenhängt, während die zweite Variable darüber Aufschluss gibt, wie stark genau diese Teilgraphen unzusammenhängend sind. Das chromatische Polynom ist eine Evaluation des Tutte-Polynoms und gibt als solche im Allgemeinen bei einem wenig zusammenhängenden Graphen eine größere Anzahl an Färbungsmöglichkeiten aus als bei einem stark zusammenhängenden.
Eine weitere bedeutende Verallgemeinerung des chromatischen Polynoms stammt von Dohmen, Pönitz und Tittmann aus dem Jahre 2003 ([9], S. 69 ff.), nämlich das verallgemeinerte bivariate chromatische Polynom, welches wir auch kurz als bivariates chromatisches Polynom bezeichnen werden. Dieses gestattet zu den bisherigen Farben im Sinne des univariaten chromatischen Polynoms zusätzlich solche, welche ohne Rücksicht auf die Nachbarschaftsverhältnisse der Ecken innerhalb des Graphen vergeben werden dürfen. Ist die Menge dieser zusätzlichen Farben leer, erhalten wir selbstverständlich wiederum das univariate chromatische Polynom.
Neben den oben genannten Verallgemeinerungen des univariaten chromatischen Polynoms sind zu verschiedenen Zeiten außerdem noch weitere Graphenpolynome eingeführt worden. Hierzu gehört zum Beispiel das Monochrome Polynomial nach ([32], S. 63). Dieses lässt sich zum trivariaten chromatischen Polynom verallgemeinern, einem Spezialfall des multivariaten chromatischen Polynoms nach White ([33], S. 10 f.). Das trivariate chromatische Polynom ist darüber hinaus zugleich eine Verallgemeinerung des bivariaten chromatischen Polynoms.
Bereits vor der Einführung des trivariaten chromatischen Polynoms stellten Averbouch, Godlin und Makowsky im Jahre 2008 ein sogenanntes Edge-Elimination-Polynomial vor, welches wiederum unter anderem eine Verallgemeinerung des Tutte-Polynoms, des bivariaten chromatischen Polynoms sowie des Matching-Polynoms darstellt ([1], S. 34 f.) Zu einer in dieser Arbeit verwendeten Definition des Matching-Polynoms siehe ([16], S. 334). Das Edge-Elimination-Polynomial lässt sich rekursiv bestimmen ([1], S. 34 f.), wobei aus der Rekursionsgleichung dieses Polynoms auch insbesondere eine Rekursionsgleichung für das bivariate ([1], S. 33) und damit auch eine bereits seit langem bekannte Rekursionsformel für das univariate chromatische Polynom ([18], S. 57) folgt, da nach ([9], S. 70) das univariate chromatische Polynom leicht aus dem bivariaten chromatischen Polynom durch Gleichsetzung beider Variablen folgt.
Wie Trinks in ([27], S. 8) kürzlich zeigte, lässt sich das Edge-Elimination-Polynomial sogar aus dem trivariaten chromatischen Polynom erzeugen und umgekehrt.

1.2 Aufbau dieser Arbeit

Die vorliegende Arbeit besteht aus fünf Kapiteln und einem Anhang. Die ersten drei Kapitel dienen der Vorbereitung und liefern ab dem zweiten Kapitel zum Verständnis der Thematik wichtige Definitionen und Sätze, welche allgemein bekannt sind oder der dort angegebenen Literatur entnommen werden können. Die restlichen Kapitel befassen sich mit eigenen Forschungsergebnissen, woraufhin der Anhang zu einigen ausgewählten Resultaten Programmcode enthält. Dieser zeigt exemplarisch den Effizienz-Vorteil der eigenen Ergebnisse im Vergleich zu bereits bekannten Rekursionsbeziehungen, welche in dieser Arbeit mit vorgestellt werden. In einigen Beispielrechnungen dieser Schrift werden wir zur leichteren Bestimmung größerer Polynome ein Computerprogramm verwenden.

Das zweite Kapitel beginnt zunächst mit wichtigen allgemein bekannten Definitionen aus dem Bereich der Graphentheorie, welche in den darauf folgenden Kapiteln benötigt werden. Dieses ist vor allem deshalb nicht ganz unwichtig, da sich zum einen in der Literatur viele Definitionen voneinander unterscheiden und zum anderen verschiedene Begriffe bei verschiedenen Autoren mit derselben Bezeichnung belegt werden, was schließlich zu Missverständnissen führen könnte. Zudem stellt sich bereits bei der Definition eines Graphen heraus, welche Eigenschaften uns an Graphen interessieren und welche wir bereits durch die Definition ausschließen. So wird in dieser Arbeit bereits das Auftreten von mehrfachen Kanten durch die Definition eines Graphen in unserem Sinne ausgeschlossen.

Im dritten Kapitel gehen wir auf eine speziellere Familie von Definitionen ein, welche sehr gezielt auf die Thematik dieser Arbeit vorbereiten und nicht allgemein bekannt sein dürften. So werden im Sinne der dort genannten Literatur Arten von Eckenfärbungen von unterschiedlichem Allgemeinheitsgrad vorgestellt sowie die dazugehörigen chromatischen Polynome. Zudem geben wir auch bereits bekannte Rekursionsformeln zu den in den ersten vier Abschnitten vorgestellten Polynomen wieder. Bezogen auf das bivariate chromatische Polynom werden wir diesen Rekursionen später für gewisse Graphentypen eigene, effizientere Berechnungsmethoden gegenüberstellen sowie auch zum trivariaten chromatischen Polynom für gewisse Graphentypen alternative Berechnungswege präsentieren. Im letzten Abschnitt bereiten wir eine andere als die rekursive Zugangsweise zur Bestimmung chromatischer Polynome vor. Hierzu tragen wir einige Definitionen zu Eckenpartitionen aus der für uns relevanten Literatur zusammen. Diese bieten uns insbesondere die Möglichkeit, ein Beweismittel für viele der darauf folgenden Sätze zu schaffen, welche wiederum ihrerseits eine schnelle Berechnung chromatischer Polynome für bestimmte Graphentypen ermöglichen.

Das vierte Kapitel stellt die ersten eigenen Resultate vor. Es werden zunächst allgemeine Darstellungen des bivariaten chromatischen Polynoms mithilfe von bestimmten Eckenpartitionen entwickelt, welche zwar keine schnelle Berechnung chromatischer Polynome erlauben, dafür jedoch, wie oben bereits erwähnt, sehr nützliche Beweismittel darstellen. So verwenden wir diese im Weiteren, um Formeln für bestimmte Graphentypen zu entwickeln, welche effektivere Berechnungsmittel als die bekannten Rekursionsgleichungen sind. Weiterhin sollen auch bestimmte Grapheneigenschaften im Sinne von Rekursionsmöglichkeiten genutzt sowie die Eigenschaften von Ableitungen für bestimmte Graphentypen kurz untersucht werden. Zudem stellen wir für zwei ganz spezielle Familien von Graphen jeweils einen Zusammenhang zwischen dem bivariaten chromatischen Polynom und dem ebenfalls bereits bekannten Matchingpolynom her. Hier zeigt sich, dass sich das bivariate chromatische Polynom eines beliebigen Graphen einer der genannten Familien mithilfe der Koeffizienten des Matchingpolynoms eines weiteren Graphen bestimmen lässt.

Einen ähnlichen Aufbau weist darüber hinaus das fünfte Kapitel auf. Hier werden für das trivariate chromatische Polynom zunächst zwei allgemeine Darstellungen eingeführt, woraufhin wir für bestimmte Graphentypen wiederum spezielle Formeln angeben und schließlich auch hier gewisse Grapheneigenschaften zur Reduktion nutzen.

Abschließend zeigen wir im Anhang zu einigen ausgewählten Sätzen computergestützte Beispielberechnungen, welche, wie bereits eingangs erwähnt, den Vorteil dieser Resultate gegenüber der bereits bekannten Rekursionsformel des bivariaten chromatischen Polynoms verdeutlichen. Ausnahmen bilden hierbei lediglich die als Beweismittel vorgesehenen allgemeinen Formeln für das bivariate chromatische Polynom sowie zwei Beispiele zu den Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms, welche keinem Vergleich unterzogen werden sollen.

1.3 Danksagungen

Ganz herzlich danken möchte ich meinem Betreuer Prof. Dr. Wolfram Koepf von der Universität Kassel sowie meinem zweiten Gutachter Prof. Dr. Peter Tittmann von der Hochschule Mittweida für ihre sehr wertvolle und engagierte Unterstützung. Mein großer Dank gilt weiterhin Dr. Torsten Sprenger für seine sehr hilfreichen Implementierungen mit dem Computerprogramm *Mathematica*.

Kapitel 2

Definitionen aus der Graphentheorie

Weil wir in der vorliegenden Arbeit verschiedene bereits bekannte Begriffe aus der Graphentheorie benötigen, soll in diesem Kapitel eine kleine Einführung in die Thematik gegeben werden. Man beachte allerdings, dass einige graphentheoretische Begriffe in der Literatur nicht einheitlich verwendet werden, weshalb wir uns im Folgenden auf gewisse Bezeichnungsweisen festlegen werden. Zu den in der Literatur geläufigen Definitionen wird jeweils exemplarisch eine Quelle mit angegeben.

2.1 Ecken und Kanten

Zunächst gilt es zu klären, was wir unter einem Graphen verstehen. Dafür beginnen wir mit folgender Definition:

Definition 2.1 *Es sei M eine Menge. Dann bezeichnen wir die Potenzmenge von M mit $\mathcal{P}(M) = \{X | X \subseteq M\}$. Weiterhin sei $\mathcal{P}_k(M) = \{X \in \mathcal{P}(M) | \, |X| = k\}$.*

Da wir in dieser Arbeit in der Regel gewisse Graphentypen ausschließen werden, genügt uns eine vereinfachte Definition eines Graphen.

Definition 2.2 *([8], S. 2).*
Einen Graphen G definieren wir als ein Tupel $G = (V(G), E(G)) = (V, E)$ zweier Mengen $V(G) = V$ und $E(G) = E$ mit $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$. Die Elemente aus V nennen wir Ecken und die Elemente aus E nennen wir Kanten von G. Ein Spezialfall sei der Nullgraph $\emptyset$ ohne Ecken und Kanten.

Diese Definition schließt bereits das Auftreten von Schlingen, wobei ein Element aus $E \cap \mathcal{P}_1(V)$ Schlinge heißt, sowie mehrfachen Kanten aus, welche für unsere späteren Betrachtungen ohnehin irrelevant sind.

Bemerkung 2.3 *Ein Graph G gemäß Definition 2.2 wird häufig schlicht genannt, etwa in ([6], S. 7).*

Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, interessiert uns vor allem die Frage, ob zwischen zwei unterschiedlichen Ecken überhaupt (mindestens) eine Kante existiert oder nicht. Zudem wird es für uns von Bedeutung sein, nur endlich viele Ecken und damit auch Kanten zuzulassen.

Definition 2.4 *Ein Graph G mit $|V(G)| < \infty$ heißt endlich ([8], S. 2).*

Im Unterschied zu einigen alternativen Definitionsmöglichkeiten in der Literatur ordnet unsere Definition eines Graphen dessen Kanten keine Richtungen zu, was für unsere Zwecke auch nicht erforderlich sein wird.
Abbildung 2.1 zeigt ein Beispiel eines Graphen nach unserer Definition.

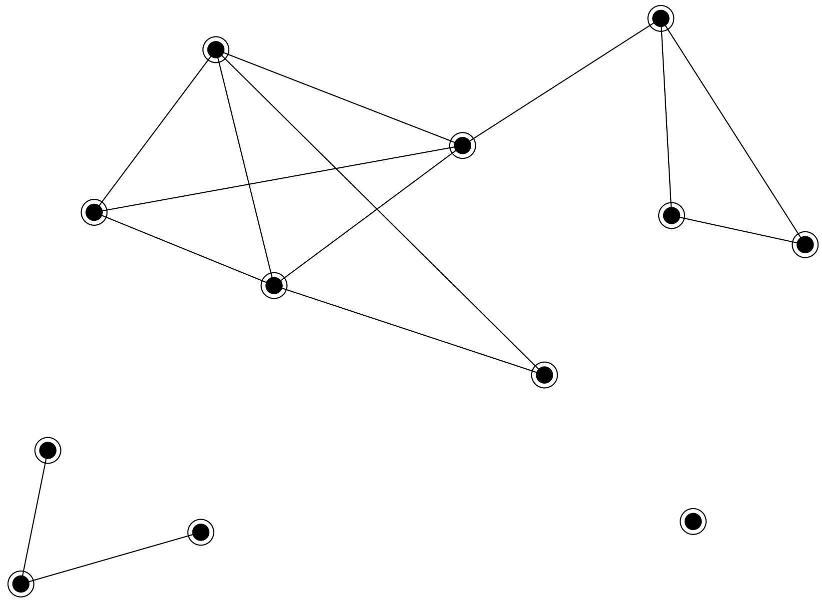


Abbildung 2.1: Graph

Bemerkung 2.5 *Von nun an werden wir stets implizit voraussetzen, dass alle betrachteten Graphen endlich sind.*

Zu einem Graphen lassen sich Aussagen sowohl über die Beziehungen zwischen Ecken oder Kanten untereinander als auch zwischen Ecken und Kanten machen.

Definition 2.6 *Zwei Ecken $v_1, v_2 \in V$ heißen adjazent oder benachbart zueinander, wenn $\{v_1, v_2\} \in E$ gilt ([8], S. 3).*
Wir nennen $N(v) = \{w \in V | \{v, w\} \in E\}$ die Menge aller Nachbarn von v ([31], S. 10).
Weiterhin nennt man eine Ecke $v \in V$ inzident zu einer Kante $e \in E$, wenn $v \in e$ gilt ([8], S. 2).
Nicht adjazente Ecken sowie Kanten ohne gemeinsame Ecken nennen wir unabhängig voneinander, und eine Menge $X \subseteq V(G)$ oder $Y \subseteq E(G)$ bezeichnen wir als unabhängig, wenn ihre Elemente paarweise unabhängig voneinander sind ([8], S. 3).

Wie wir später sehen werden, spielen insbesondere unabhängige Eckenmengen bei den Eckenfärbungsproblemen eine entscheidende Rolle.

2.2 Teilgraphen

Bei der Betrachtung von Graphen ist es häufig hilfreich, die Aufmerksamkeit auf bestimmte Teilmengen der Ecken- und Kantenmenge zu richten.

Definition 2.7 *([8], S. 3 f.).*
Einen Graphen $H = (W, F)$ nennen wir einen Teilgraphen von $G = (V, E)$, wenn $W \subseteq V$ und $F \subseteq E$ gilt. Wir schreiben dafür auch $H \subseteq G$. Dieser Graph heißt ein induzierter Teilgraph von G, wenn er alle Kanten $\{v_1, v_2\} \in E$ mit $v_1, v_2 \in W$ enthält. Für $X \subseteq V(G)$ bezeichne $G[X]$ den von X induzierten Teilgraphen.

Mit anderen Worten ist ein Teilgraph eines Graphen genau dann ein induzierter Graph, wenn die Kanten, welche zwischen den aus dem Ausgangsgraphen für den Teilgraphen ausgewählten Ecken vorkommen, allesamt auch im Teilgraphen auftreten. Betrachtet man beispielsweise eine Kante, so ist deren größtmöglicher induzierter Teilgraph die Kante selbst und der einzige nicht induzierte Teilgraph besteht aus beiden Ecken mit leerer Kantenmenge.
Weil sich ein Teilgraph H eines Graphen $G = (V, E)$ für gewisse Mengen $V_1 \subseteq V$ und $E_1 \subseteq E$ als $H = (V \setminus V_1, E \setminus E_1)$ darstellen lässt und wir später bei der Einführung von Graphenoperationen mit Bezeichnungen wie '+' und '$-$' arbeiten werden, fügen wir hier zunächst eine Bemerkung ein.

Bemerkung 2.8 *Für einen Graphen $G = (V, E)$ und Mengen $V_1 \subseteq V$ oder $E_1 \subseteq E$ werden wir die Menge $V \setminus V_1$ als $V - V_1$ und die Menge $E \setminus E_1$ entsprechend als $E - E_1$ schreiben.*

Nun wenden wir uns einigen weiteren Definitionen zu.

Definition 2.9 *Einen nichtleeren Graphen $P = (V, E)$ mit der Eckenmenge $V = \{v_0, \ldots, v_k\}$ und der Kantenmenge $E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}\}$ mit paarweise verschiedenen v_i für $i = 0, \ldots, k$ nennen wir einen Weg der Länge k von v_0 nach v_k und schreiben hierfür P_{k+1} ([8], S. 6).*
Ein nichtleerer Graph heißt zusammenhängend, wenn es für alle $u, w \in V$ einen Weg von u nach w gibt, das heißt einen Weg P mit $u = v_0$ und $w = v_k$ ([8], S. 10).
Einen maximalen zusammenhängenden Teilgraphen von G nennt man eine Komponente von G ([8], S. 11).

Der in Abbildung 2.1 gezeigte Graph besteht beispielsweise aus drei Komponenten.
In manchen Fällen ist es von Bedeutung, dass ein Teilgraph alle Ecken des ursprünglichen Graphen enthält.

Definition 2.10 *Ein aufspannender Teilgraph eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Teilgraph $H = (V, F)$ von G mit $F \subseteq E$ ([8], S. 4).*
Für $F \subseteq E$ sei $G\langle F\rangle = (V, F)$ der von F aufgespannte aufspannende Teilgraph von G ([28], S. 2).

Abbildung 2.2 zeigt einen aufspannenden Teilgraphen des oben gezeigten Graphen.

Teilgraphen eines Graphen weisen immer eine bestimmte Struktur auf, welche einerseits durch die Anzahl der Ecken und, wie es sich in unserer Arbeit meistens als entscheidender herausstellen wird, durch die Adjazenzverhältnisse zwischen den Ecken untereinander charakterisiert wird. Spezialfälle sind die paarweise Adjazenz aller Ecken zueinander sowie das Fehlen aller Kanten zwischen diesen Ecken.

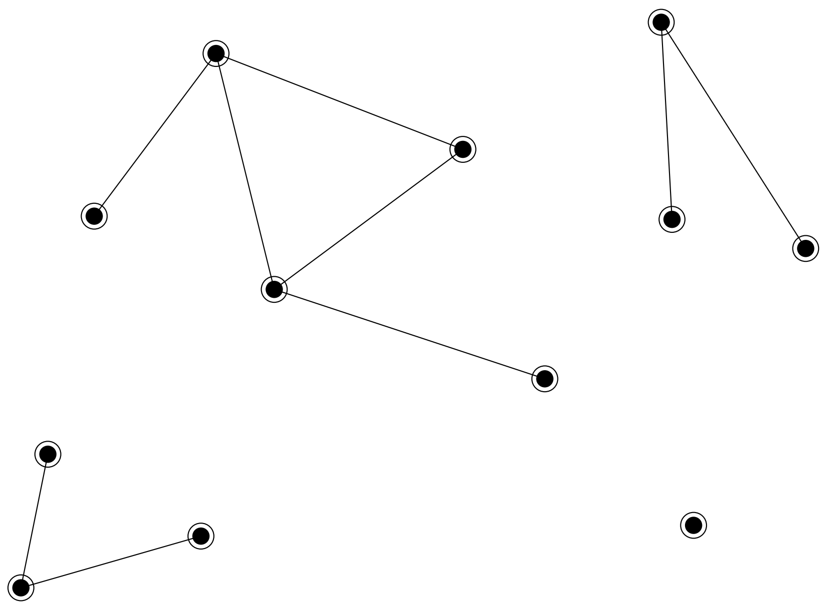


Abbildung 2.2: Aufspannender Teilgraph des Graphen aus Abbildung 2.1

Definition 2.11 *Ein Graph mit n Ecken heißt vollständig, wenn alle Ecken paarweise adjazent zueinander sind, und wird mit K_n bezeichnet ([8], S. 3).*
Es sei G ein Graph. Einen vollständigen Teilgraphen von G nennt man eine Clique ([31], S. 163).

Abbildung 2.3 zeigt einen Graphen mit den Cliquen K_3, K_2 und K_1.

Ein weiterer und für uns wichtiger Spezialfall eines Teilgraphen ist ein ganz bestimmter Typ eines aufspannenden Teilgraphen.

Definition 2.12 *([10], S. 75).*
Gegeben seien ein Graph G und ein aufspannender Teilgraph M von G. M heißt Matching von G, wenn die einzigen Komponenten von M Ecken und Kanten sind. Enthält M genau k Kanten, so nennt man M ein k-Matching von G.

Im Allgemeinen kann man in einem gegebenen Graphen kein eindeutiges k-Matching festlegen. Daher werden wir in einem späteren Kapitel sehen, dass durch das sogenannte Matchingpolynom eines Graphen G für jedes k die Anzahl der k-Matchings in G gezählt wird.

2.3 Trennende Ecken und Kanten in Graphen

Entfernt man beliebige Ecken eines Graphen, so kann es passieren, dass der neue Graph aus mehr Komponenten besteht als der vorherige Graph. Hierzu geben wir die folgende Definition an.

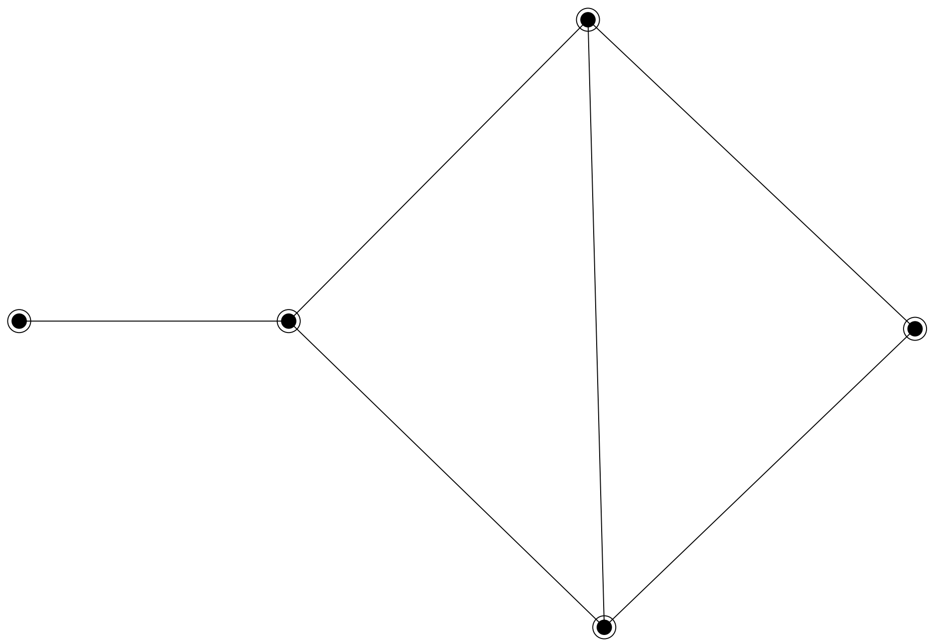


Abbildung 2.3: Graph mit den Cliquen K_3, K_2 und K_1

Definition 2.13 *Es sei G ein Graph. Eine Artikulation (in der englischsprachigen Literatur auch 'cutvertex' genannt) in G ist eine Ecke $v \in V(G)$, durch deren Entfernung sich die Anzahl der Komponenten von G vergrößert. Unter einer Brücke in G versteht man analog dazu eine Kante $e \in E(G)$, deren Entfernung unter Beibehaltung der beiden zugehörigen Ecken ebenfalls die Anzahl der Komponenten von G vergrößert ([6], S. 6).*
Falls G ein zusammenhängender Graph ist und für $W \subseteq V(G)$ oder $W \subseteq E(G)$ der Graph $G - W$ nicht mehr zusammenhängend ist, so trennt W den Graphen G. Wir nennen W einen Trenner in G. Falls zwei Ecken v und w in verschiedenen Komponenten von $G - W$ liegen, so trennt W die Ecken v und w voneinander ([6], S. 73).

In Abbildung 2.4 sind zwei Graphen zu sehen, von welchen der links abgebildete Graph eine Artikulation enthält und der rechts gezeigte Graph eine Brücke.

Diese Eigenschaften werden wir später zur Reduktion von Graphen verwenden, um damit chromatische Polynome zu bestimmen.

2.4 Operationen innerhalb von Graphen

Zur Berechnung chromatischer Polynome existieren bereits weitere Methoden, welche später vorgestellt werden sollen und sich der folgenden Operationen innerhalb eines Graphen bedienen. Diese erzeugen aus einem gegebenen Graphen jeweils einen neuen Graphen. Eine dieser

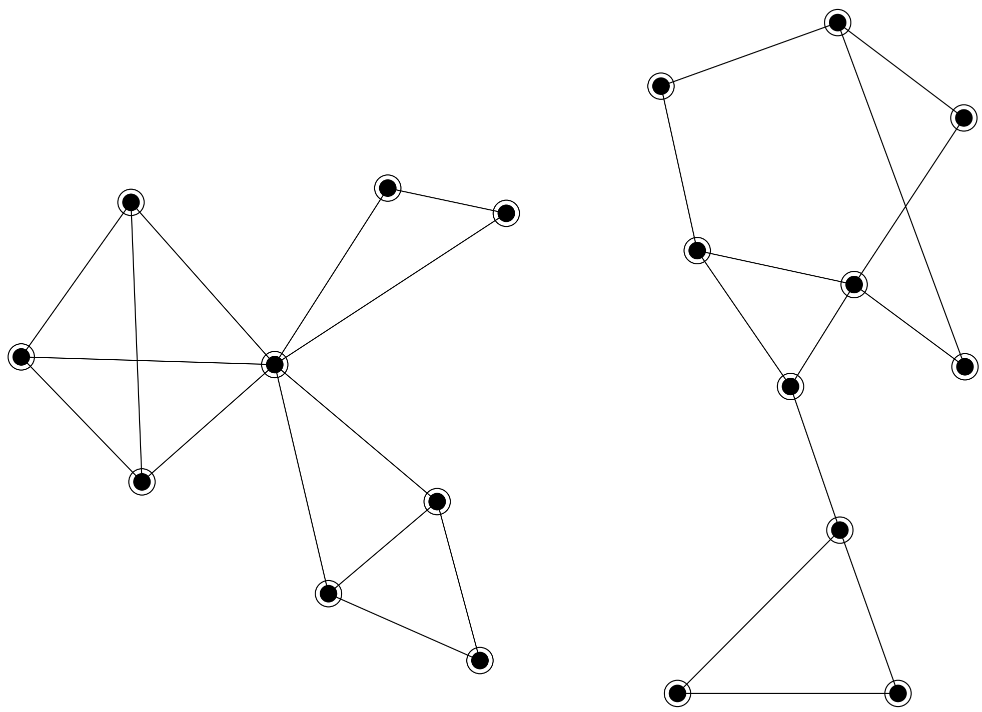


Abbildung 2.4: Artikulation und Brücke

Operationen ist das Entfernen oder Hinzufügen von Kanten ohne Veränderung der Anzahl der Ecken.

Definition 2.14 *([8], S. 4).*
Für einen Graphen $G = (V, E)$ mit $U \subset V$ sei $G - U = G[V - U]$.
Weiterhin erhalten wir für eine Ecke $v \in V$ den Graphen $G - v$ mit der Eckenmenge $V - \{v\}$ und der Kantenmenge $E - \{e \in E | v \in e\}$ (Löschung von v).
Analog dazu definieren wir für eine Kantenmenge $F \subseteq E$ den Graphen $G - F = (V, E - F)$.
Schließlich lässt sich für eine Kante $e \in E$ aus G ein neuer Graph $G - e = (V, E - \{e\})$ konstruieren (Löschung von e).
Analog sei der Graph $G + e$ für $e \in \mathcal{P}_2(V)$ definiert durch $G + e = (V, E \cup \{e\})$ (Addition von e).

Eine vorhandene Kante lässt sich nicht nur entfernen, sondern auch mitsamt ihrer Ecken zu einer neuen Ecke verschmelzen. Dadurch erhält man einen Graphen mit einer Ecke weniger als zuvor.

Definition 2.15 *([6], S. 24).*
Aus einem Graphen G erhalten wir für eine Kante $e = \{v_1, v_2\} \in E$ einen neuen Graphen G/e, indem wir v_1 und v_2 identifizieren und alle dabei eventuell entstehenden Mehrfachkanten durch einfache Kanten erstezen (Kontraktion von e).

Die beiden oben genannten Kantenoperationen finden sich auch in ([1], S. 32), wo jedoch noch eine weitere Möglichkeit eingeführt wird. Hierbei wird eine Kante unter Einbeziehung ihrer Ecken entfernt, so dass der neue Graph zwei Ecken weniger besitzt als der vorherige.

Definition 2.16 *([1], S. 32).*
Aus einem Graphen G erhalten wir für eine Kante $e = \{v_1, v_2\} \in E$ einen neuen Graphen $G - \{v_1, v_2\} = G[V - \{v_1, v_2\}]$ (Extraktion von e).

In Abbildung 2.5 zeigen wir vier Graphen. Ausgehend von dem links abgebildeten Graphen G erhalten wir folgendermaßen drei verschiedene Graphen: Löschen wir aus G eine Kante $e = \{v_1, v_2\}$, so ergibt sich der rechts daneben stehende Graph $G - e$. Kontrahieren wir dagegen in G die Kante e, erhalten wir nach dem Ersetzen der beiden entstehenden Mehrfachkanten durch jeweils einfache Kanten den dritten Graphen G/e. Der vierte Graph $G - \{v_1, v_2\}$ ergibt sich schließlich aus der Extraktion der Kante e in G.

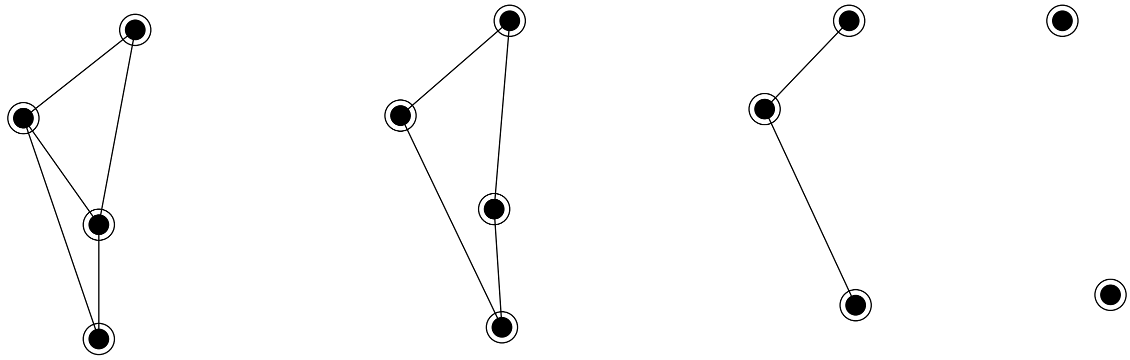


Abbildung 2.5: G, $G - e$, G/e und $G - \{v_1, v_2\}$

Für einen gegebenen Graphen benötigen wir später hin und wieder zusätzlich einen ganz bestimmten Graphen mit gleicher Eckenanzahl, bei welchem jedoch im Allgemeinen die Kantenanzahl eine andere ist.

Definition 2.17 *([8], S. 4).*
Zu einem Graphen $G = (V, E)$ nennen wir den Graphen $\overline{G} = (V, F)$ mit der Kantenmenge $F = \{\{v_1, v_2\} \in \mathcal{P}_2(V) | \{v_1, v_2\} \notin E\}$ das Komplement von G.

Eine interessante Eigenschaft eines beliebigen Graphen besteht darin, dass eine Clique dieses Graphen eine unabhängige Eckenmenge im Komplement induziert und umgekehrt. Auch auf diese Tatsache werden wir in späteren Kapiteln zurückgreifen.

2.5 Operationen zwischen verschiedenen Graphen

Bisher haben wir uns ausschließlich auf Operationen innerhalb eines gegebenen Graphen beschränkt. Wir werden sehen, dass sich auch Operationen zwischen zwei verschiedenen Graphen durchführen lassen.

Definition 2.18 *([8], S. 3).*
Es seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ gegeben. Dann sei $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ und analog $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$.

In einigen Fällen ist es jedoch sinnvoll, außer den bereits bestehenden Kanten der beteiligten Graphen gewisse weitere Kanten mit in den neuen Graphen aufzunehmen. Eine solche Möglichkeit besteht darin, alle Kanten mit zu berücksichtigen, welche aus jedem der beiden Graphen jeweils eine Ecke besitzen.

Definition 2.19 *([20], S. 131).*
Es seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und daher auch $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Dann sei $G_1 * G_2 = (W, F)$ der Graph mit der Eckenmenge $W = V_1 \cup V_2$ und der Kantenmenge $F = E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_1, v_2\} \,|v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\}$. Diesen bezeichnet man als Join der beiden Graphen G_1 und G_2.

In Abbildung 2.6 zeigen wir zwei Graphen G_1 und G_2 sowie deren Join $G_1 * G_2$.

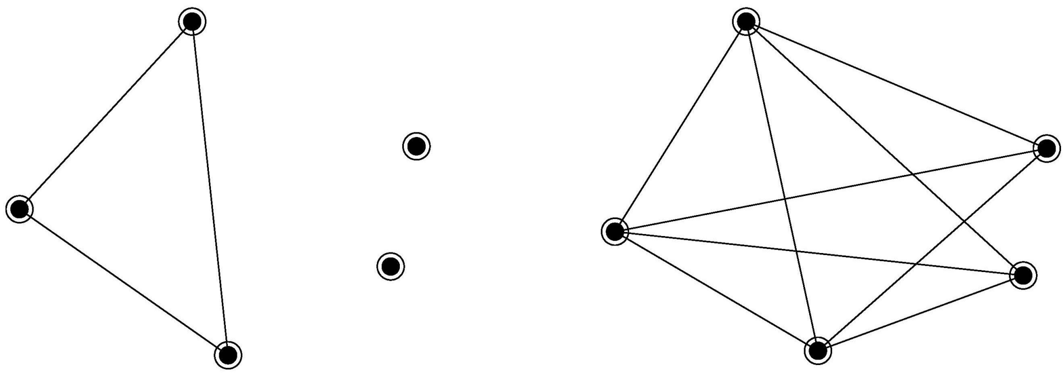


Abbildung 2.6: G_1, G_2 und $G_1 * G_2$

Auf diese Weise entsteht also stets ein Graph, welcher aus genau einer Komponente besteht.

2.6 Beziehungen zwischen Graphen

Zwei Graphen sind genau dann gleich, wenn ihre Ecken- und Kantenmengen übereinstimmen. Für viele Anwendungen ist dieser Gleichheitsbegriff jedoch zu streng.

Definition 2.20 *([8], S. 3).*
Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen isomorph, wenn es eine Bijektion $\phi : V_1 \to V_2$ gibt und zudem für alle $v, w \in V_1$ genau dann $\{\phi(v), \phi(w)\} \in E_2$ gilt, wenn $\{v, w\} \in E_1$ gilt.

Wenn wir später hinsichtlich der chromatischen Polynome von einem Graphen sprechen, so ist dabei also kein einzelner Graph gemeint, sondern die gesamte Äquivalenzklasse der zu ihm isomorphen Graphen. Der Einfachheit halber werden wir beide Begriffe synonym verwenden, da wir bei den Färbungsproblemen sehen werden, dass zueinander isomorphe Graphen dieselben chromatischen Eigenschaften aufweisen.
In Abbildung 2.7 zeigen wir zwei Graphen aus derselben Isomorphieklasse.

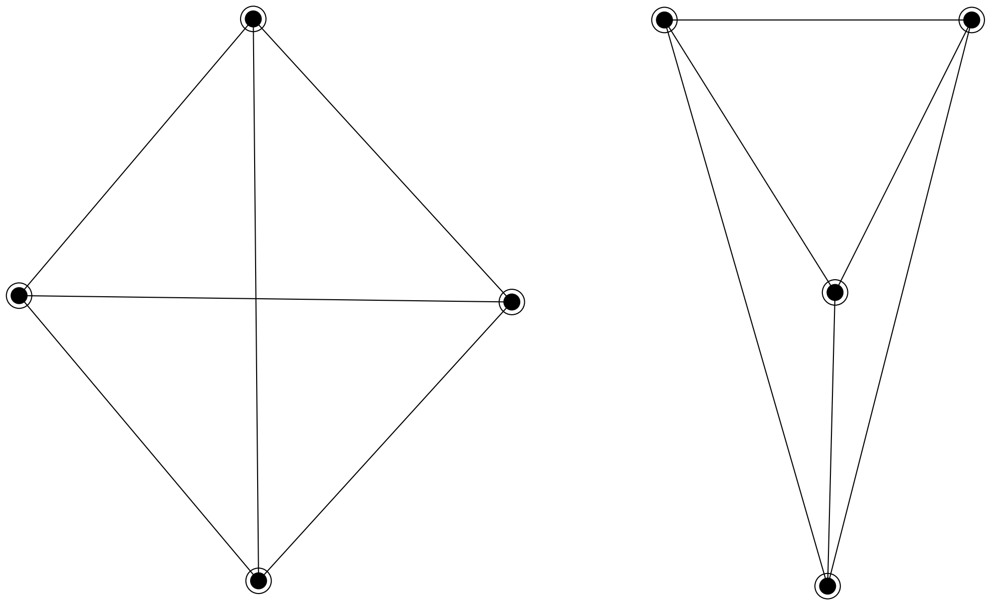


Abbildung 2.7: Zueinander isomorphe Graphen

2.7 Besondere Graphen

Einige Graphen besitzen aufgrund ihrer Adjazenzverhältnisse besondere Strukturen, welche auch bei der Berechnung chromatischer Polynome für diesen Graphentyp von Vorteil sein können. Wir beginnen mit einigen einfachen Grundtypen.

Bemerkung 2.21 *Einen Weg haben wir bereits in Definition 2.9 kennengelernt.*

Hierauf aufbauend lassen sich weitere Graphentypen definieren.

Definition 2.22 *([8], S. 8).*
Es sei $P = (V, E)$ ein Weg mit der Eckenmenge $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$ für $k \geq 3$ und der Kantenmenge $E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-2}, v_{k-1}\}\}$. Dann erhalten wir hieraus den Graphen $S = (V, F)$ mit $F = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-2}, v_{k-1}\}\} \cup \{\{v_{k-1}, v_0\}\}$ und nennen diesen einen Kreis der Länge k. Wir schreiben hierfür auch C_k.

Grafik 2.8 zeigt einen Weg P_5 der Länge 4 und einen Kreis C_7 der Länge 7.

Bei Färbungsproblemen von Graphen spielt es im Allgemeinen eine Rolle, ob ein Graph kreisfrei ist oder nicht.

Definition 2.23 *([8], S. 13).*
Einen Graphen ohne Kreise bezeichnen wir als Wald. Einen zusammenhängenden Wald nennen wir einen Baum.

Möchten wir von einem Graphen einen zusammenhängenden Teilgraphen ohne Kreise betrachten, welcher alle Ecken des Ausgangsgraphen enthält, so ist dieser zwangsläufig ein aufspannender Baum. Im Allgemeinen ist dieser in einem gegebenen Graphen, wie Teilgraphen generell, jedoch nicht eindeutig bestimmt.

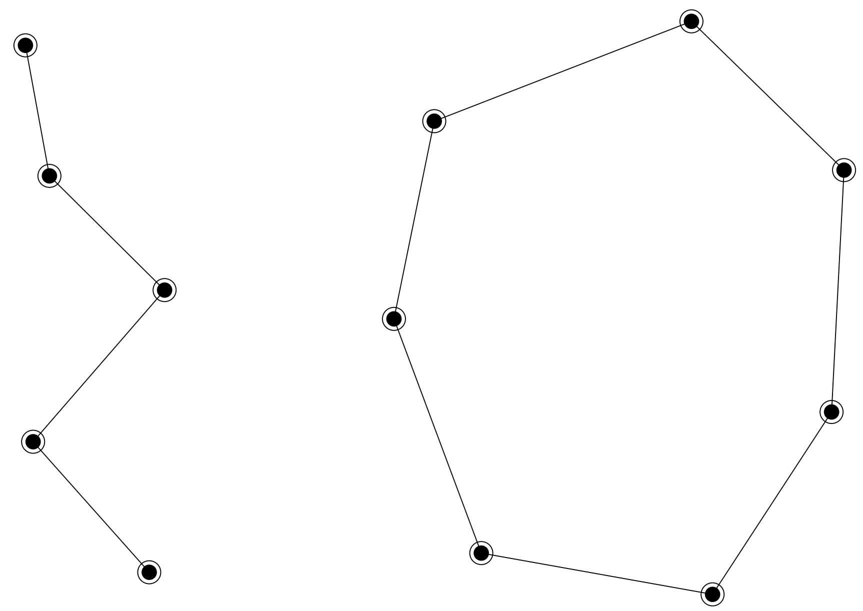


Abbildung 2.8: Weg P_5 der Länge 4 und Kreis C_7 der Länge 7

Definition 2.24 *([6], S. 10).*
Ein Teilgraph T eines Graphen G, welcher ein Baum ist und $V(T) = V(G)$ erfüllt, heißt ein Spannbaum von G.

Ein weiterer Graphentyp ist dadurch charakterisiert, dass seine Eckenmenge sich in genau r verschiedene unabhängige Mengen partitionieren lässt. Alle vorkommenden Kanten besitzen also Ecken aus verschiedenen Blöcken der Eckenpartition.

Definition 2.25 *([8], S. 17).*
Einen Graphen G nennen wir r-partit für $r \geq 2$, wenn es eine Partition $\Pi = \{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ von $V(G)$ gibt, so dass für jede Kante $e \in E(G)$ die Relation $|e \cap X_i| \leq 1$ für alle $i = 1, \ldots, r$ gilt. Für $r = 2$ nennen wir G auch bipartit.

In speziellen Fällen kann man diesen Graphen als Join mehrerer Graphen mit leerer Kantenmenge auffassen, nämlich immer dann, wenn alle erlaubten Kanten tatsächlich auftreten.

Definition 2.26 *([8], S. 17 f.).*
Einen r-partiten Graphen G nennen wir vollständig r-partit, wenn für jedes Eckenpaar mit aus verschiedenen Blöcken stammenden Ecken diese beiden Ecken zueinander adjazent sind. Ist $n_i = |X_i|$ für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, so bezeichnen wir G auch als $K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.
Graphen der Form $K_{1,n}$ heißen Sterne. Wir schreiben stattdessen auch S_{n+1}.

Eine weitere Spezialisierung des Graphen aus Definition 2.26 ist ein Graph, dessen Eckenmenge derart partitioniert ist, dass die Blöcke einelementig sind. Das bedeutet, dass alle unabhängigen

Eckenmengen jeweils genau eine Ecke enthalten und daher keine unabhängigen Eckenpaare im Graphen existieren.

Bemerkung 2.27 *Den vollständigen Graphen K_n mit n Ecken haben wir bereits in Definition 2.11 kennengelernt.*

Passend hierzu können wir einen weiteren Graphentyp definieren.

Definition 2.28 *([20], S. 141).*
Das Komplement $\overline{K_n}$ eines vollständigen Graphen K_n nennen wir einen leeren Graphen auf n Ecken.

In Abbildung 2.9 sind der vollständig 3-partite Graph $K_{2,2,1}$, der vollständige Graph K_5 sowie der leere Graph $\overline{K_5}$ aufgeführt.

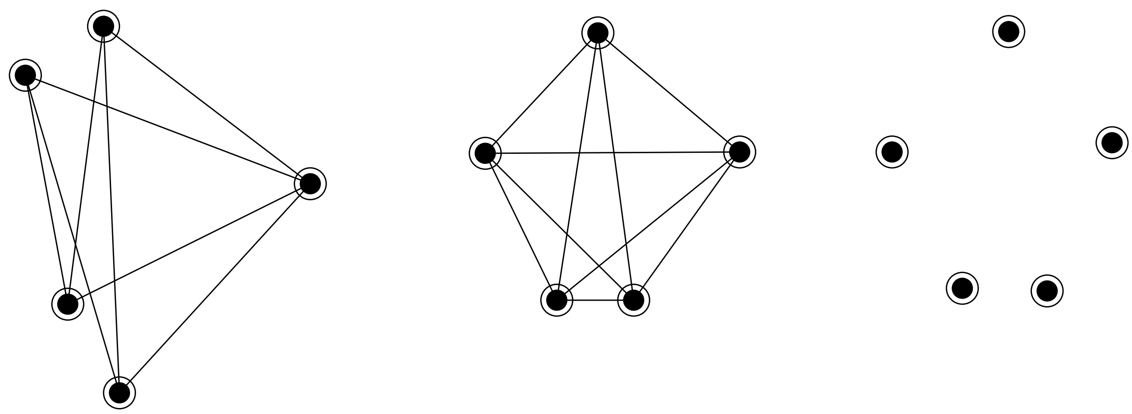


Abbildung 2.9: $K_{2,2,1}$, K_5 und $\overline{K_5}$

Einen Graphen, welcher uns hinsichtlich der Färbungsprobleme unter anderem beschäftigen wird, erhält man durch die Löschung von Sternen aus einem vollständigen Graphen.

Definition 2.29 *Es seien $t_1, \ldots, t_N$ natürliche Zahlen. Wir bezeichnen einen Graphen mit $K_n - \sum\limits_{m=1}^{N} t_m S_{m+1}$, wenn wir aus einem Graphen K_n die Kanten von jeweils t_m Sternen S_{m+1} löschen, so dass deren Ecken erhalten bleiben und insgesamt alle betrachteten Sterne paarweise eckendisjunkt sind.*

Als Beispiel zeigen wir den Graphen $K_6 - S_2 - S_3$ in Abbildung 2.10.

Ein weiterer besonderer Graphentyp erfüllt im Hinblick auf seine Kreise eine bestimmte Bedingung, wie der folgende Satz zeigt.

Definition 2.30 *([31], S. 163).*
Ein chordaler Graph ist ein Graph, dessen induzierte Kreise stets von der Form C_3 sind.

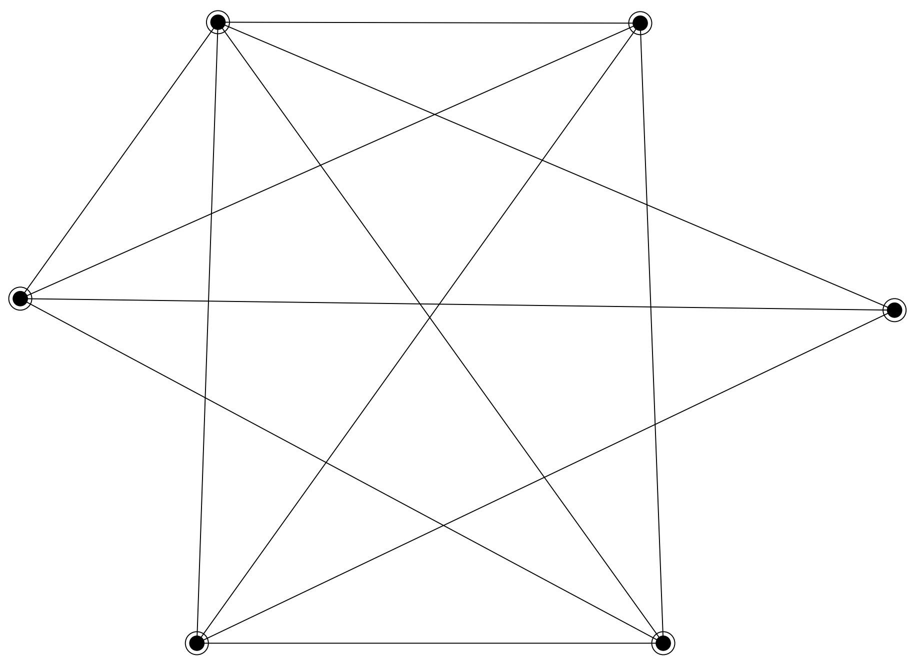


Abbildung 2.10: $K_6 - S_2 - S_3$

Schließlich gibt es Graphen, die es uns ermöglichen, die Eckenmenge derart in zwei Blöcke zu partitionieren, dass einer der Blöcke einen vollständigen Graphen und der andere eine unabhängige Eckenmenge induziert. Er wird demnach als Splitgraph bezeichnet.

Definition 2.31 *([11], S. 667).*
Ein Splitgraph ist ein Graph, dessen Eckenmenge in zwei disjunkte Teilmengen zerfällt, so dass eine der Teilmengen unabhängig ist und die andere eine Clique induziert.

Nun haben wir alle Graphentypen benannt, welche wir in den nächsten Abschnitten benötigen werden. Daher gehen wir an dieser Stelle zu den Färbungsproblemen über.

Kapitel 3

Eckenfärbungen von Graphen

In diesem Abschnitt stellen wir einige bereits bekannte Graphenpolynome vor, welche im Hinblick auf Eckenfärbungsprobleme entwickelt wurden. Letztere gehen ursprünglich von der Vierfarbenvermutung und der damit verbundenen Frage aus, ob stets vier Farben ausreichen, um die Länder auf einer Landkarte mithilfe dieser Farben derart einzufärben, dass jedes Land genau eine Farbe erhält und keine zwei benachbarten Länder gleich gefärbt sind. Motiviert durch diese Frage führte Birkhoff ([3], S. 42 ff.) im Jahre 1912 ein Polynom in einer Variablen ein, welches nach ([4], S. 360) als sogenanntes chromatisches Polynom bekannt wurde und wir im Folgenden entsprechend als univariates chromatisches Polynom bezeichnen werden. Hierbei stellen wir die Landkarte als einen Graphen dar, wobei jedes Land einer Ecke entspricht und jede Landesgrenze zwischen zwei Ländern einer Kante zwischen den entsprechenden Ecken. Dieses ist zunächst ein Graph, welcher isomorph zu einem Graphen ohne sich überschneidende Kanten, das heißt planar, ist. Das chromatische Polynom lässt sich jedoch allgemein auf jeden Graphen übertragen, so dass wir uns auch in dieser Arbeit nicht speziell auf planare Graphen beschränken. Zu einem gegebenen Graphen gibt uns das univariate chromatische Polynom für eine variable Anzahl an Farben die Anzahl aller möglichen Eckenfärbungen an, so dass zueinander adjazente Ecken niemals dieselbe Farbe erhalten dürfen. Die Menge dieser Farben heißt hierbei die Menge der echten Farben. Im Jahre 2003 stellten Dohmen, Pönitz und Tittman ([9], S. 69 ff.) darauf aufbauend ein bivariates chromatisches Polynom vor, welches über die oben genannten Färbungen hinaus zusätzlich sogenannte unechte Farben gestattet, welche beliebig an die Ecken vergeben werden dürfen. Auch hierzu gibt es mit dem sogenannten multivariaten chromatischen Polynom nach White ([33], S. 10 f.) eine Verallgemeinerung, aus welcher sich speziell das trivariate chromatische Polynom nach White ([33], S. 10 f.) ableiten lässt. Dieses trivariate chromatische Polynom berücksichtigt schließlich alle beliebigen Eckenfärbungen eines Graphen mithilfe aller gegebenen echten und unechten Farben, wobei hier auch all jene Eckenfärbungen mitgezählt werden, welche echt einfarbige Kanten enthalten. Das trivariate chromatische Polynom verallgemeinert zudem das Monochrome Polynomial nach ([32], S. 63), welches neben dem bivariaten chromatischen Polynom eine andere Verallgemeinerung des univariaten chromatischen Polynoms ist und alle beliebigen Eckenfärbungen eines Graphen mithilfe aller gegebenen echten Farben berücksichtigt, wobei auch hier echt einfarbige Kanten auftreten dürfen.

Zunächst stellen wir das univariate chromatische Polynom vor, um in den darauf folgenden Abschnitten das Monochrome Polynomial, das bivariate chromatische Polynom und das trivariate chromatische Polynom zu thematisieren.

Weil wir bei jeder Eckenfärbung eines Graphen dessen Eckenmenge derart partitionieren können, dass wir jede vergebene Farbe mit jeweils genau einer Teilmenge der Partition identifizieren, werden wir den letzten Abschnitt Eckenpartitionen von Graphen widmen.

3.1 Das univariate chromatische Polynom

In diesem Abschnitt stellen wir das bereits oben erwähnte univariate chromatische Polynom vor, zu welchem sich eine Einführung in ([18], S. 52 ff.) findet. Uns interessieren Färbungen der Ecken eines Graphen, so dass folgende Vorschrift zur Wahl der Farben gelte:

Definition 3.1 *([18], S. 52).*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Unter einer (echten) Eckenfärbung von G verstehen wir eine Abbildung $\phi : V \to \{1, 2, \dots, y\}$ mit der Bedingung, dass für alle $e = \{u, v\} \in E$ die Ungleichheit $\phi(u) \neq \phi(v)$ gelte.

Eine solche Färbung nennen wir auch eine zulässige Färbung von G.
Hierbei möchten wir auch stets zwei Färbungen, welche sich lediglich durch die Permutation der verteilten Farben voneinander unterscheiden, jedoch nicht durch die Partition der Eckenmenge in Farbgruppen, als verschiedene Färbungen behandeln. Stehen für einen Kreis C_k mit gerader Länge k etwa genau zwei Farben zur Verfügung, so gibt es also genau zwei verschiedene Färbungsmöglichkeiten.

Bemerkung 3.2 *([3], S. 42).*
Die Anzahl $P(G; y)$ aller Eckenfärbungen eines Graphen G in y Farben ist ein Polynom in y vom Grad $n = |V(G)|$, welches sich folgendermaßen ermitteln lässt: Es sei m_i für $i = 1, \dots, n$ die Anzahl aller zulässigen Eckenfärbungsmöglichkeiten von G unter Einsatz von genau i Farben und unter Missachtung von Permutationen der verwendeten Farben. Dann ergeben sich unter Berücksichtigung dieser Permutationen nun $m_i y\,(y-1)\dots(y-i+1)$ Möglichkeiten, die Ecken von G in genau i Farben zu färben, so dass auch je zwei Färbungen als verschieden voneinander betrachet werden, welche sich lediglich durch eine Permutation der Farben voneinander unterscheiden. Insgesamt erhält man also

$$P(G; y) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} m_i y^{\underline{i}} ,$$

wobei $y^{\underline{i}} = y\,(y-1)\dots(y-i+1)$ die fallende Faktorielle sei.

Für gewisse einfache Graphentypen finden sich bereits einige Beispiele:

Beispiel 3.3 *Es sei $T_n = (V, E)$ ein Baum mit $|V(T_n)| = n$. Dann gilt nach ([18], S. 61)*

$$P(T_n; y) \quad = \quad y\,(y-1)^{n-1} \; .$$

Für einen Kreis C_n erhalten wir nach ([18], S. 62)

$$P(C_n; y) \quad = \quad (y-1)^n + (-1)^n\,(y-1) \; .$$

Schließlich besitzt laut ([18], S. 54 f.) der Graph K_n beziehungsweise der Graph $\overline{K_n}$ das univariate chromatische Polynom

$$P(K_n; y) \quad = \quad y^{\underline{n}}$$

beziehungsweise

$$P(\overline{K_n}; y) \quad = \quad y^n \, .$$

Dieses Beispiel beantwortet bereits eine interessante Frage, wie die folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 3.4 *Mithilfe der Formel für beliebige Bäume nach ([18], S. 61) zeigte sich bereits früh, dass ein und demselben chromatischen Polynom durchaus mehrere nicht zueinander isomorphe Graphen zugrunde liegen können.*

Bei Graphen, welche sich in einem vollständigen Graphen schneiden, lässt sich diese Eigenschaft weiterhin zur Zerlegung des chromatischen Polynoms nutzen.

Bemerkung 3.5 *Es sei G ein Graph mit $G = G_1 \cup G_2$ für zwei Graphen G_1 und G_2 sowie $G_1 \cap G_2 = K_r$ für ein $r \geq 1$. Dann gilt nach ([18], S. 59)*

$$P(G; y) \quad = \quad \frac{P(G_1; y) P(G_2; y)}{y^{\underline{r}}} \, ,$$

wobei nach Beispiel 3.3

$$y^{\underline{r}} \quad = \quad P(K_r; y)$$

gilt.

Dieses Resultat ergibt sich nach ([18], S. 59) aus der Überlegung, dass der Schnittgraph sich aufgrund seiner Vollständigkeit in genau $y^{\underline{r}}$ Farben färben lässt und die beiden Restgraphen jeweils noch genau $\frac{P(G_1;y)}{y^{\underline{r}}}$ beziehungsweise $\frac{P(G_2;y)}{y^{\underline{r}}}$ Färbungen besitzen. Damit ergibt sich schließlich das Produkt

$$P(G; y) \quad = \quad \frac{P(G_1; y) P(G_2; y)}{y^{\underline{r}}} \, .$$

Bei Tutte ([29], S. 26 f.) finden wir außerdem die folgende Rekursionsgleichung zur Bestimmung des chromatischen Polynoms eines Graphen, welche bei Read in der folgenden Form dargestellt wird:

Satz 3.6 *([18], S. 57).*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $e \in E$. Dann gilt

$$P(G; y) \quad = \quad P(G - e; y) - P(G/e; y) \, .$$

Die Rekursion ergibt sich nach ([18], S. 55 ff.) aus der Überlegung, dass zwei zueinander adjazente Ecken stets verschieden voneinander gefärbt sein müssen. Fehlt die mit ihnen inzidente Kante, so kommen alle Fälle hinzu, in welchen beide Ecken dieselbe Farbe erhalten. Weil diese Fälle jedoch nicht der Definition einer echten Eckenfärbung im Ausgangsgraphen gerecht werden, müssen sie wieder subtrahiert werden. Das sind jedoch genau die Färbungen, welche durch die Identifikation beider Ecken als eine einzige Ecke entstehen.

Wir einigen uns speziell für den Nullgraphen $\emptyset$ auf dessen univariates chromatisches Polynom $P(\emptyset; x, y) = 1$, da wir im nächsten Abschnitt zum bivariaten chromatischen Polynom eine analoge Festlegung übernehmen werden.
Wir bestimmen nun exemplarisch das chromatische Polynom des Graphen C_4 mithilfe von Satz 3.6 und werden sehen, dass die Berechnung gemäß Beispiel 3.3 dasselbe Ergebnis liefert.

Beispiel 3.7 *Es sei $C_4 = (V, E)$ und $e \in E$. Dann ist $C_4 - e$ ein Baum T_4 (welcher zugleich ein Weg ist) und C_4/e ein vollständiger Graph K_3 (welcher zugleich ein Kreis ist). Es gilt nach Satz 3.6*

$$\begin{aligned} P(C_4; y) &= P(T_4; y) - P(K_3; y) \\ &= y\,(y-1)^3 - y^{\underline{3}} \\ &= y^{\underline{2}}\Big(\,(y-1)^2 - (y-2)\,\Big) \\ &= y^{\underline{2}}\left(y^2 - 3y + 3\right) \ . \end{aligned}$$

Beispiel 3.3 liefert ebenfalls

$$\begin{aligned} P(C_4; y) &= (y-1)^4 + (-1)^4\,(y-1) \\ &= (y-1)\,\Big(\,(y-1)^3 + 1\Big) \\ &= (y-1)\,\Big(y^3 - 3y^2 + 3y\Big) \\ &= y^{\underline{2}}\left(y^2 - 3y + 3\right) \ . \end{aligned}$$

Für Graphen mit verhältnismäßig vielen Kanten ist es jedoch recht mühsam, für die jeweils entstehenden Graphen wiederholt die Rekursion anzuwenden, bis man schließlich Graphen erhält, welche ein bekanntes univariates chromatisches Polynom besitzen. Um Rekursionsschritte einzusparen, kann es günstiger sein, wie folgt vorzugehen.

Bemerkung 3.8 *([18], S. 55 f.).*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $e \notin E$. Dann lässt sich durch die Umstellung der Rekursionsbeziehung aus Satz 3.6 das univariate chromatische Polynom auch durch die Addition der fehlenden Kante e bestimmen, das heißt, es gilt

$$P(G; y) \quad = \quad P(G + e; y) + P(G/e; y) \ .$$

Abschließend betrachten wir zwei weitere Möglichkeiten der Darstellung des univariaten chromatischen Polynoms. Die erste davon stellen wir in der folgenden Bemerkung vor.

Bemerkung 3.9 *([35], S. 576 f.).*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und t die Anzahl aller möglichen (echten und nicht echten) Eckenfärbungen von G. Weiterhin sei für $\{v_1, w_1\}, \ldots, \{v_k, w_k\} \in E$ und für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ der Wert $t(A_{v_i,w_i})$ die Anzahl aller solcher Färbungen derart, dass die beiden Ecken der Kante $\{v_i, w_i\}$ gleich gefärbt sind und entsprechend $t(\overline{A}_{v_i,w_i})$ die Anzahl aller solcher Färbungen

derart, dass dieses nicht zutrifft. Dann ist die Anzahl aller echten Eckenfärbungen von G durch $t(\overline{A}_{v_1,w_1}\dots\overline{A}_{v_k,w_k})$ gegeben. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} P(G;y) &= t(\overline{A}_{v_1,w_1}\dots\overline{A}_{v_k,w_k}) \\ &= t-\Big(t(A_{v_1,w_1})+\dots+t(A_{v_k,w_k})\Big) \\ &+ \Big(t(A_{v_1,w_1}A_{v_2,w_2})+t(A_{v_1,w_1}A_{v_3,w_3})+\dots+t(A_{v_{k-1},w_{k-1}}A_{v_k,w_k})\Big) \\ &- \Big(t(A_{v_1,w_1}A_{v_2,w_2}A_{v_3,w_3})+\dots\Big) \\ &+ \dots \\ &+ (-1)^{|E|}t(A_{v_1,w_1}\dots A_{v_k,w_k})\ . \end{aligned}$$

Aufgrund weiterführender Überlegungen ergibt sich nach ([35], S. 577) hieraus besonders einfach die zweite Darstellungsalternative, welche bereits in ([3], S.45) unabhängig und vor dem Hintergrund anderer Überlegungen eingeführt wurde.

Bemerkung 3.10 *([35], S. 577).*
Es sei die Situation aus Bemerkung 3.9 gegeben. Zu jedem $t(A_{v_{i_1},w_{i_1}}\dots A_{v_{i_r},w_{i_r}})$ mit $r\le k$ betrachte man den Teilgraphen $H=(V,\{\{v_{i_1},w_{i_1}\}\dots\{v_{i_r},w_{i_r}\}\})$ von G, so dass für jede Kante deren Ecken in derselben Farbe gefärbt seien. Damit sind in jeder Komponente alle Ecken einfarbig. Es sei (von ([35], S. 577) in der Notation nach ([3], S. 43) dargestellt) (p,s) die Anzahl aller Teilgraphen von G mit genau p Komponenten und s Kanten. Da man für jede Komponente jeweils eine der y Farben wählt, ergibt sich weiterhin ein Faktor y^p und zusammen mit Bemerkung 3.9 schließlich

$$P(G;y) \;=\; \sum_{p,s}(-1)^s\,(p,s)\,y^p\ .$$

In den nächsten Abschnitten zeigen wir nun einige verschiedene Verallgemeinerungen des chromatischen Polynoms.

3.2 Das Monochrome Polynomial

Das Monochrome Polynomial berücksichtigt zusätzlich zu den im Sinne des univariaten chromatischen Polynoms zulässigen Eckenfärbungen nun auch alle Eckenfärbungen mit mindestens einem adjazenten gleichfarbigen Eckenpaar. Zunächst beginnen wir mit einer Definition des Monochrome Polynomials.

Definition 3.11 *([32], S. 63).*
Es sei $G=(V,E)$ ein Graph und y die Anzahl aller gegebenen Farben. Weiterhin sei $b_i(y)$ für $i=0,\dots,|E|$ die Anzahl aller beliebigen Eckenfärbungen von G, in welchen jeweils genau i einfarbige Kanten vorkommen. Dann ist das Monochrome Polynomial definiert als

$$B\,(G;y,z) \;=\; \sum_{i=0}^{|E|} b_i(y)z^i\ .$$

Nach ([32], S. 63) ist $b_0(y)$ hierbei selbstverständlich das univariate chromatische Polynom von G.
Auch für das Monochrome Polynomial exisiert eine Rekursionsvorschrift, welche unter anderem eine spezielle Vorschrift für Graphen mit Schlingen enthält. Obwohl wir in dieser Schrift Graphen ohne Schlingen betrachten, führen wir der Vollständigkeit halber diesen Teil der Rekursion mit auf.

Satz 3.12 *([32], S. 64).*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit dem Monochrome Polynomial

$$B\left(G; y, z\right) \quad = \quad \sum_{i=0}^{|E|} b_i(y) z^i \ .$$

Dann gelten folgende Beziehungen:
Falls G zusammenhängend ist, gilt für eine Kante $e \in E$, welche keine Schlinge und keine Brücke ist,

$$B\left(G; y, z\right) \quad = \quad B\left(G - e; y, z\right) + (z - 1)\, B\left(G/e; y, z\right) \ .$$

Für den Fall, dass e eine Schlinge ist, gilt

$$B\left(G; y, z\right) \quad = \quad zB\left(G - e; y, z\right) \ .$$

Und schließlich gilt für den Fall, dass e eine Brücke ist,

$$B\left(G; y, z\right) \quad = \quad (z + y - 1)\, B\left(G/e; y, z\right) \ .$$

In ([32], S. 64) fehlt ein genauer Beweis, weil die Formeln nach ([32], S. 63) analog zu der Rekursion des univariaten chromatischen Polynoms folgen. Wir liefern an dieser Stelle eine kurze Beweisidee.
Die erste Gleichheit ergibt sich, indem man mit $B\left(G - e; y, z\right)$ alle Eckenfärbungen von G identifiziert, so dass bei den Fällen mit echt einfarbigem e dessen Beitrag z fehlt. Dieser wird von $zB\left(G/e; y, z\right)$ geliefert, wobei nun allerdings genau diese Fälle aus dem ersten Teil überflüssig werden, so dass sie durch $-B\left(G/e; y, z\right)$ wieder subtrahiert werden müssen.
Für die zweite Gleichheit berücksichtigt man, dass die Schlinge stets nur Eckenfärbungen mit mindestens einer echt einfarbigen Kante erzeugt. Enfernt man die Schlinge in $B\left(G - e; y, z\right)$, entfernt man aus jeder Eckenfärbung also genau eine echt einfarbige Kante. Daher muss man hier stets zu jeder Eckenfärbung den entfallenen Beitrag z wieder hinzumultiplizieren.
Schließlich zählt man für die dritte Gleichheit mit $zB\left(G/e; y, z\right)$ zunächst alle Eckenfärbungen, in welchen e echt einfarbig vorliegt und ersetzt den aufgrund der fehlenden Kante e ebenfalls fehlenden Beitrag z multiplikativ. Um auch die Anzahl aller anderen Eckenfärbungen zu erhalten, zieht man den Summanden $(y - 1)\, B\left(G/e; y, z\right)$ heran, wobei man die durch die Kontraktion fehlende zweite Ecke von e echt und verschieden zur ersten Ecke färbt. Hierfür gibt es noch $(y - 1)$ Möglichkeiten. Falls hierbei weitere echt einfarbige Kanten entstehen, welche diese zweite Ecke von e, aber nicht die erste, enthalten, zählt man stattdessen eine andere geeignete Eckenfärbung, in welcher diese Ecken nicht mehr dieselbe Farbe erhalten. Die vernachlässigte Eckenfärbung wird dafür analog bei der Wahl einer anderen geeigneten Farbe aus den $y - 1$ Farben gezählt.
Zu Definition 3.11 wenden wir uns folgendem Beispiel zu.

Beispiel 3.13 *Es sei nochmals der Graph K_3 gegeben. Wir können keine, genau eine oder genau drei Kanten einfarbig färben. Wir erhalten also für den Fall, dass keine einfarbige Kante vorliegt, $P(K_3; y)$ Färbungsmöglichkeiten. Falls genau eine Kante einfarbig ist, haben wir $3y^{\underline{2}}$ Möglichkeiten. Schließlich liefert uns der letzte Fall genau y Möglichkeiten. Damit erhalten wir insgesamt also*

$$B\left(K_3; y, z\right) \quad = \quad P(K_3; y) + 3y^{\underline{2}}z + yz^3 \; .$$

Eine weitere Verallgemeinerung des univariaten chromatischen Polynoms auf einer anderen Ebene stellen wir nun mit dem bivariaten chromatischen Polynom vor.

3.3 Das bivariate chromatische Polynom

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns, wie bereits erwähnt, mit einer Lockerung der Vorschriften zur Färbung der Ecken, indem wir nun zusätzlich Farben erlauben, welche beliebig vergeben werden dürfen. Die Einführung zum bivariaten chromatischen Polynom findet man in ([9], S. 69 ff.).

Definition 3.14 *([9], S. 69).*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Weiterhin sei $X = Y \cup Z$ mit $Y \cap Z = \emptyset$ die Menge aller verfügbaren Farben. Die Farben aus Y heißen echt, die Farben aus Z unecht. Es sei $|X| = x$ und $|Y| = y$. Eine verallgemeinerte echte Eckenfärbung von G ist eine Abbildung $\phi : V \to X$, so dass für alle $e = \{v_1, v_2\} \in V$ mit $\phi(v_1) \in Y$ und $\phi(v_2) \in Y$ $\phi(v_1) \neq \phi(v_2)$ gelte.

Die Anzahl aller Eckenfärbungen gemäß Definition 3.14 lässt sich in der folgenden Form zum Ausdruck bringen.

Bemerkung 3.15 *([9], S. 70).*
Die Anzahl aller verallgemeinerten echten Eckenfärbungen eines Graphen G in x Farben bezeichnet man mit $P(G; x, y)$. Diese lässt sich in der Form

$$P(G; x, y) \quad = \quad \sum_{X \subseteq V} (x - y)^{|X|} \, P(G - X; y)$$

darstellen.

Die in Bemerkung 3.15 vorgestellte Beziehung ergibt sich nach ([9], S. 70) aus folgender Überlegung: Man kann jede verallgemeinerte echte Eckenfärbung erhalten, indem man zunächst eine entsprechende Teilmenge $X \subseteq V$ für die unechten Farben auswählt. Hierbei gibt es $(x - y)^{|X|}$ Möglichkeiten, die Ecken aus X in unechten Farben einzufärben. Die verbliebenen Ecken färbt man echt, wofür es genau $P(G - X; y)$ Möglichkeiten gibt.

Es liegt nahe, zwei Sonderfälle des bivariaten chromatischen Polynoms zu betrachten.

Bemerkung 3.16 *([9], S.70).*
Falls $Y = \emptyset$ gilt, so erhalten wir

$$P(G; x, 0) \quad = \quad x^{|V(G)|} \; ,$$

während im Falle $Z = \emptyset$ mit

$$P(G; y, y) \quad = \quad P(G; y)$$

das univariate chromatische Polynom vorliegt.

Auch zu Definition 3.14 möchten wir einige Darstellungen für das bivariate chromatische Polynom bestimmter Graphentypen kurz vorstellen.

Beispiel 3.17 *([9], S. 78 ff.).*
Für den vollständigen Graphen K_n gilt

$$P(K_n; x, y) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-y)^k \, y^{\underline{n-k}} \; .$$

Weiterhin gilt für den vollständig bipartiten Graphen $K_{m,n}$

$$P(K_{m,n}; x, y) \quad = \quad \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x-y)^{m-k} \sum_{j=0}^{k} S_{k,j} y^{\underline{j}} \, (x-j)^n \; .$$

Hierbei sei $S_{k,j}$ die Stirlingzahl der zweiten Art.
Ein Weg P_n besitzt das bivariate chromatische Polynom

$$P(P_n; x, y) \quad = \quad \sum_{0 < i+2j \leq n} (-1)^{n-i-j} \binom{i+j}{i} \binom{n-i-j-1}{n-i-2j} x^i y^j \; .$$

Und schließlich gilt für den Kreis C_n

$$P(C_n; x, y) \quad = \quad (-1)^n \, y + n \sum_{0 < i+2j \leq n} \frac{(-1)^{n-i-j}}{i+j} \binom{i+j}{i} \binom{n-i-j-1}{n-i-2j} x^i y^j \; .$$

Wie bereits zum univariaten chromatischen Polynom lässt sich auch hier eine Aussage bezüglich eindeutiger oder nichteindeutiger bivariater chromatischer Polynome nichtisomorper Graphen machen.

Bemerkung 3.18 *Nicht zueinander isomorphe Graphen müssen nicht zwangsläufig voneinander verschiedene bivariate chromatische Polynome besitzen. In ([9], S. 81) wurde durch vollständige Auflistung festgestellt, dass sich unter allen Bäumen mit bis zu neun Ecken kein Paar mit demselben bivariaten chromatischen Polynom befindet. Jedoch werden in ([9], S. 81) zwei nichtisomorphe Bäume mit jeweils zehn Ecken und demselben bivariaten chromatischen Polynom angegeben. Diese stellen wir in Abbildung 3.1 dar und bestimmen deren bivariates chromatisches Polynom:*

$$\begin{aligned}
&x^{10} - y + 4xy - 8x^2y + 12x^3y - 14x^4y + 14x^5y - 12x^6y + 10x^7y - 9x^8y + 5y^2 - 20xy^2 \\
&+38x^2y^2 - 52x^3y^2 + 53x^4y^2 - 44x^5y^2 + 26x^6y^2 - 8y^3 + 30xy^3 - 48x^2y^3 + 50x^3y^3 \\
&-28x^4y^3 + 4y^4 - 12xy^4 + 9x^2y^4 \; .
\end{aligned}$$

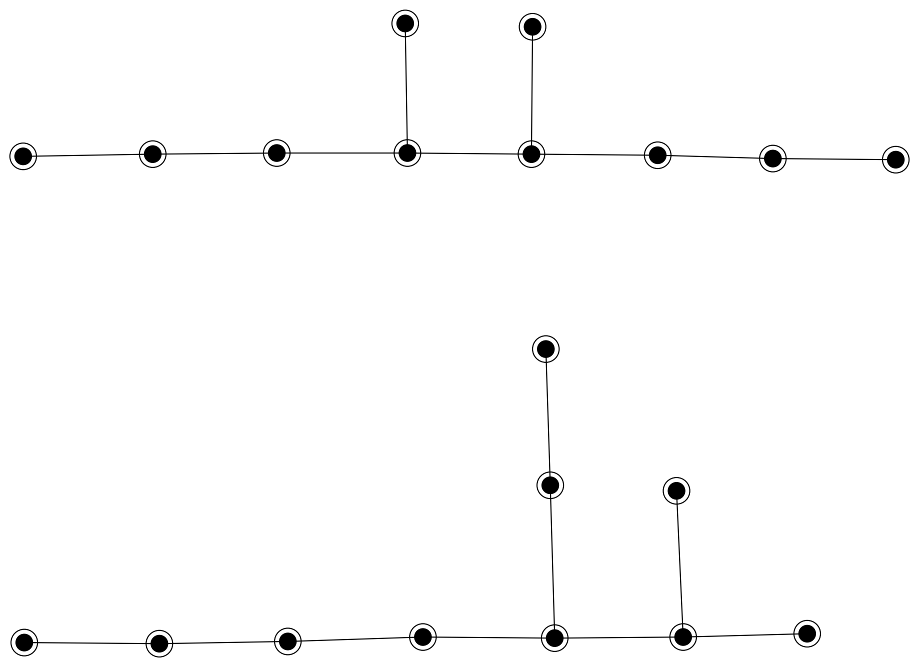


Abbildung 3.1: Nichtisomorphe Bäume mit demselben bivariaten chromatischen Polynom

Dieses Polynom haben wir mithilfe der im folgenden Satz vorgestellten Rekursionsgleichung ermittelt.

Wie im vorigen Abschnitt bereits angedeutet wurde, gibt es nämlich auch beim bivariaten chromatischen Polynom die Möglichkeit der rekursiven Bestimmung.

Satz 3.19 *([1], S. 33).*
Es sei $e = \{v_1, v_2\} \in E$. Dann gilt

$$P(G; x, y) \quad = \quad P(G - e; x, y) - P(G/e; x, y) + (x - y)\, P(G - \{v_1, v_2\}\, ; x, y)$$

mit den Anfangsbedingungen $P(K_1; x, y) = x$ und $P(\emptyset; x, y) = 1$.
Für Graphen G_1, G_2 mit disjunkten Eckenmengen gilt zudem

$$P(G_1 \cup G_2; x, y) \quad = \quad P(G_1; x, y) P(G_2; x, y)\ .$$

Dieses Resultat folgt nach ([1], S. 34) aus der Überlegung, dass eine verallgemeinerte echte Färbung von $G - e$ zugleich eine solche von G sein kann. In letzterem Fall dürfen die Ecken v_1

und v_2 jedoch nicht in derselben echten Farbe gefärbt sein. Daher subtrahieren wir alle solchen Fälle, weil sie in G nicht gestattet sind. Allerdings subtrahieren wir dabei auch unerwünschter Weise die erlaubten Fälle, in welchen beide Ecken in derselben unechten Farbe gefärbt sind und müssen diese daher wieder hinzufügen.
Analog zur Rekursionsformel des univariaten chromatischen Polynoms ist selbstverständlich auch hier eine Umstellung möglich.

Bemerkung 3.20 *Es seien G und $e = \{v_1, v_2\} \in E$ wie in Satz 3.19 sowie darüber hinaus $H = G - e$. Dann gilt nach ([1], S. 33)*

$$P(H; x, y) \quad = \quad P(H + e; x, y) + P((H + e)/e; x, y) - (x - y)\, P((H + e) - \{v_1, v_2\}\,; x, y)$$

mit $P(K_1; x, y) = x$ und $P(\emptyset; x, y) = 1$. Nach 3.17 gilt außerdem

$$P(K_n; x, y) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - y)^k\, y^{\underline{n-k}}\ .$$

Zu Satz 3.19 betrachten wir nun ein Beispiel.

Beispiel 3.21 *Es sei der Graph K_2 gegeben. Dann erhalten wir nach Satz 3.19*

$$\begin{aligned} P(K_2; x, y) &= P(\overline{K_2}; x, y) - P(K_1; x, y) + (x - y)\, P(\emptyset; x, y) \\ &= x^2 - x + x - y \\ &= x^2 - y\ . \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis folgt auch aus Beispiel 3.17 mit

$$\begin{aligned} P(K_2; x, y) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} (x - y)^k\, y^{\underline{2-k}} \\ &= y^{\underline{2}} + 2\,(x - y)\, y + (x - y)^2 \\ &= y^2 - y + 2xy - 2y^2 + x^2 - 2xy + y^2 \\ &= x^2 - y\ . \end{aligned}$$

Auch über die partielle Ableitung bivariater chromatischer Polynome nach x lässt sich eine interessante Aussage machen.

Satz 3.22 *([9], S. 71).*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} P(G; x, y) \quad = \quad \sum_{v \in V} P(G - v; x, y)\ .$$

Dieser Zusammenhang lässt sich nach ([9], S. 71) aus Bemerkung 3.15 herleiten.
Im folgenden Abschnitt werden wir eine gleichzeitige Verallgemeinerung des Monochrome Polynomials und des bivariaten chromatischen Polynoms kennenlernen.

3.4 Das trivariate chromatische Polynom

Bei der echten sowie der verallgemeinerten echten Eckenfärbung ist es nicht erlaubt, zwei Ecken einer Kante in derselben echten Farbe zu färben, weshalb alle Eckenfärbungen mit mindestens einer echt einfarbigen Kante beim univariaten und beim bivariaten chromatischen Polynom nicht berücksichtigt werden. Das Monochrome Polynomial schließt hingegen alle Eckenfärbungen aus, in welchen mindestens eine unechte Farbe verwendet wird. In ([33], S. 10 f.) wird mit dem multivariaten und speziell dem trivariaten chromatischen Polynom eine Möglichkeit dargestellt, alle diese Eckenfärbungen mit zu berücksichtigen. Wir betrachten dazu die folgende Definition des trivariaten chromatischen Polynoms nach ([26], S. 51).

Definition 3.23 *([26], S. 51).*
Das sogenannte trivariate chromatische Polynom für einen Graphen $G = (V, E)$ ist wie folgt definiert:
Es seien die Farbenmengen X, Y und Z definiert wie in Definition 3.14, das heißt $y = |Y| \leq x = |X|$. Für alle beliebigen Eckenfärbungen $\Phi : V \to \{1, \ldots, y, y+1, \ldots, x\}$ von G besitzt das trivariate chromatische Polynom die Form

$$\tilde{P}(G; x, y, z) \quad = \quad \sum_{\Phi: V \to \{1,\ldots,y,y+1,\ldots,x\}} \quad \prod_{e \in E \ mit \ \exists c \leq y \forall v \in e \Phi(v) = c} z \ .$$

Legt man Definition 2.2 eines Graphen zugrunde, so lässt sich dieses Polynom auch einfacher darstellen.

Bemerkung 3.24 *Gegeben sei die Situation in Definition 3.23. Dann besitzt das trivariate chromatische Polynom auch die Darstellung*

$$\tilde{P}(G; x, y, z) \quad = \quad \sum_{\Phi: V \to \{1,\ldots,y,y+1,\ldots,x\}} z^{|\{\{v,w\} \in E \ | \ \Phi(v) = \Phi(w) \leq y\}|} \ .$$

Nach ([27], S. 8) lässt sich dieses Graphenpolynom aus dem in ([1], siehe S. 34 f.) eingeführten Edge-Elimination-Polynomial herleiten, was wir in Bemerkung 3.27 kurz begründen werden. Das Edge-Elimination-Polynomial stellt nach ([1], S. 35) eine Verallgemeinerung einiger bekannter Graphenpolynome dar, darunter auch des bivariaten chromatischen Polynoms und des Matchingpolynoms, auf welches wir später noch einmal zurückkommen werden. Nun soll zunächst eine kurze rekursive Darstellung des Edge-Elemination-Polynomials erfolgen.

Definition 3.25 *([1], S. 35).*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $e = \{v_1, v_2\} \in E$ beliebig gewählt. Dann lässt sich das Edge-Elimination-Polynomial $\xi(G; x, y, z)$ folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} \xi(G; x, y, z) \quad &= \quad \xi(G - e; x, y, z) + y\xi(G/e; x, y, z) \\ &+ \quad z\xi(G - \{v_1, v_2\}; x, y, z) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \xi(K_1; x, y, z) \quad &= \quad x; \\ \xi(\emptyset; x, y, z) \quad &= \quad 1 \ . \end{aligned}$$

Für Graphen G_1, G_2 mit disjunkten Eckenmengen gilt ferner

$$\xi(G_1 \cup G_2; x, y, z) \quad = \quad \xi(G_1; x, y, z)\xi(G_2; x, y, z)\ .$$

Ähnlich lässt sich auch eine Rekursion für das trivariate chromatische Polynom aufstellen, wie in ([27], S. 7 f.) bewiesen wird.

Satz 3.26 *([27], S. 7).*
Für einen Graphen $G = (V, E)$ mit $e = \{v_1, v_2\} \in E$ und Graphen G_1, G_2 mit $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ gilt

$$\tilde{P}(G; x, y, z) \quad = \quad \tilde{P}(G - e; x, y, z) + (z - 1)\,\tilde{P}(G/e; x, y, z) + (1 - z)\,(x - y)\,\tilde{P}(G - v_1 - v_2; x, y, z)$$

$$\tilde{P}(G_1 \cup G_2; x, y, z) \quad = \quad \tilde{P}(G_1; x, y, z)\tilde{P}(G_2; x, y, z)$$

$$\tilde{P}(K_1; x, y, z) \quad = \quad x\ .$$

Für den Beweis wurde unter anderem eine Fallunterscheidung danach vorgenommen, ob die Kante e verschiedenfarbige Ecken besitzt oder ob diese echt beziehungsweise unecht einfarbig sind.
Nun kommen wir, wie oben bereits angemerkt wurde, kurz auf den Zusammenhang zwischen dem trivariaten chromatischen Polynom und dem Edge-Elimination-Polynomial zurück. Hier wurde in ([27], S. 8) folgende Beziehung aus dem Ergebnis in Satz 3.26 gefolgert.

Bemerkung 3.27 *([27], S. 8).*
Für einen Graphen G gilt

$$\begin{aligned} \tilde{P}(G; x, y, z) \quad &= \quad \xi(G; x, z - 1, (1 - z)\,(x - y)) \\ \xi(G; x, y, z) \quad &= \quad \tilde{P}(G; x, x + \frac{z}{y}, y + 1)\ . \end{aligned}$$

Speziell erhält man nach ([1], S. 35) das bivariate chromatische Polynom aus dem Edge-Elimination-Polynomial durch

$$\xi(G; x, -1, x - y) \quad = \quad P(G; x, y)\ .$$

Weiterhin existiert neben der rekursiven auch folgende explizite Darstellung des Edge-Elimination-Polynomials.

Definition 3.28 *([1], S. 35).*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für eine Menge $F \subseteq E$ sei $V(F)$ die Menge aller Ecken, welche zu mindestens einer Kante aus F gehören. Es sei nun $A, B \subseteq E$ mit $V(A) \cap V(B) = \emptyset$, wofür wir $(A \cup B) \subseteq E$ schreiben. Weiterhin sei $k(A)$ die Anzahl der zusammenhängenden Komponenten des Graphen (V, A) und $k_{cov}(B)$ die Anzahl der zusammenhängenden Komonenten von $(V(B), B)$. Dann besitzt das Edge-Elimination-Polynomial $\xi(G; x, y, z)$ folgende explizite

Darstellung:

$$\xi(G;x,y,z) \quad = \quad \sum_{(A\cup B)\subseteq E} x^{k(A\cup B)-k_{cov}(B)} y^{|A|+|B|-k_{cov}(B)} z^{k_{cov}(B)} \; .$$

Dieses Graphenpolynom ist äquivalent zum Covered Components Polynomial in ([28], S. 3), welches wir in Definition 3.29 vorstellen.

Definition 3.29 *([28], S. 3).*
Das Covered Components Polynomial $C(G;x,y,z)$ für einen Graphen $G=(V,E)$ ist folgendermaßen definiert:
Unter einer abgedeckten zusammenhängenden Komponente von G verstehen wir eine zusammenhängende Komponente von G mit mindestens einer Kante. Dann gilt

$$C(G;x,y,z) \quad = \quad \sum_{A\subseteq E} x^{k(G\langle A\rangle)} y^{|A|} z^{c(G\langle A\rangle)} \; ,$$

wobei $k(G\langle A\rangle)$ die Anzahl der zusammenhängenden Komponenten des aufspannenden Teilgraphen $G\langle A\rangle=(V,A)$ von G ist, welcher durch A aufgespannt wird. Weierhin sei $c(G\langle A\rangle)$ die Anzahl der entsprechenden abgedeckten zusammenhängenden Komponenten des Graphen $G\langle A\rangle=(V,A)$.

Die Äquivalenz zwischen dem Edge-Elimination-Polynomial und dem Covered Components Polynomial ist nach ([28], S. 6) folgendermaßen gegeben.

Bemerkung 3.30 *([28], S. 6).*

$$\begin{aligned} C(G;x,y,z) \quad &= \quad \xi(G;x,y,xyz-xy) \\ \xi(G;x,y,z) \quad &= \quad C(G;x,y,\frac{z}{xy}+1) \; . \end{aligned}$$

Zwischen dem bivariaten chromatischen Polynom eines Graphen $G=(V,E)$ und seinem trivariaten chromatischen Polynom besteht folgender Zusammenhang: Während das trivariate chromatische Polynom über alle beliebigen Eckenfärbungen $\Phi: V \rightarrow \{1,\ldots,y,y+1,\ldots,x\}$ von G summiert und für jede gezählte Färbung einen Summanden z^k mit

$$k \quad = \quad |\,\{e=\{v,w\}\in E | \Phi(v)=\Phi(w)\leq y\}\,|$$

hinzufügt, erhält man das bivariate chromatische Polynom von G durch eine ausschließliche Summation über alle Färbungen Φ mit $k=0$.
Zu Definition 3.23 betrachten wir nun ein Beispiel.

Beispiel 3.31 *Wir betrachten den Graphen K_3. Unter ausschließlicher Berücksichtigung der Färbungen, in welchen keine Kante in derselben echten Farbe gefärbt ist, erhalten wir nach der Definition des trivariaten chromatischen Polynoms das bivariate chromatische Polynom. Weiterhin erlaubt es der vorliegende Graph, entweder genau eine Kante in der selben echten*

Farbe zu färben oder auch alle drei Kanten echt gleichfarbig zu gestalten. Insgesamt ergibt sich also folgendes Polynom:

$$\tilde{P}(K_3; x, y, z) \quad = \quad P(K_3; x, y) + 3y\,(x-1)\,z + yz^3\ .$$

Schließlich lässt sich auch hier die Frage nach der Eindeutigkeit des trivariaten chromatischen Polynoms beantworten.

Bemerkung 3.32 *Das Edge-Elimination-Polynomial unterscheidet sich bei nichtisomorphen Graphen mit weniger als 8 Ecken, bei Graphen mit 8 Ecken und weniger als 12 Kanten oder bei Bäumen mit weniger als 10 Ecken. Jenseits dieser Einschränkungen gibt es nichtisomorphe Graphen mit demselben Edge-Elimination-Polynomial ([28], S. 22). So besitzen unter anderem die Graphen aus Abbildung 3.1 dasselbe Edge-Elimination-Polynomial ([2], S. 7).*

Aus Komplexitätsgründen verzichten wir jedoch auf die Berechnung des Polynoms.
An anderer Stelle werden wir uns der Untersuchung der in diesem Kapitel vorgestellten Graphenpolynome für bestimmte Graphentypen zuwenden, wofür wir jedoch zunächst im folgenden Abschnitt eine Vorbereitung vornehmen möchten.

3.5 Eckenpartitionen

Bei der Bestimmung chromatischer Polynome helfen uns neben rekursiven Methoden auch direkte Untersuchungen der Eckenmenge eines Graphen daraufhin, auf welche Weisen sie sich in unabhängige Mengen partitionieren lässt. Zur Vorbereitung darauf geben wir hier eine kurze Einführung zu den entsprechenden Bezeichnungen.

Definition 3.33 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Partition von V nennen wir eine Partition von G. Die Menge aller Partitionen von G bezeichnen wir mit $\Pi(G)$.*
Jedes Element einer Partition heißt Block.

Uns werden vor allem ganz besondere Partitionen der Eckenmenge interessieren, denn wie bereits angemerkt wurde, ist es für die Menge aller Farben beim univariaten chromatischen Polynom sowie für die Menge der echten Farben beim bivariaten chromatischen Polynom verboten, zueinander adjazente Ecken in derselben echten Farbe einzufärben.

Definition 3.34 *Eine unabhängige Partition π von $G = (V, E)$ ist wie in ([9], S. 74) eine Partition von G derart, dass jeder Block $A \in \pi$ gemäß Definition 2.6 unabhängig ist. Die Menge aller unabhängigen Partitionen nennen wir $\Pi_I(G)$.*

Zur Veranschaulichung ziehen wir ein Beispiel heran.

Beispiel 3.35 *Es sei der Kreis $C_4 = (V, E)$ mit*

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\ E &= \Big\{ \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\} \Big\} \end{aligned}$$

gegeben. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Pi_I(C_4) \quad = \quad & \Big\{ \Big\{ \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\} \Big\}, \Big\{ \{v_1, v_3\}, \{v_2\}, \{v_4\} \Big\}, \\ & \Big\{ \{v_1\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3\} \Big\}, \Big\{ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \Big\} \Big\}\ . \end{aligned}$$

Darüber hinaus betrachten wir auch Partitionen, von welchen jeder Block jeweils einen zusammenhängenden Graphen induziert.

Definition 3.36 *Eine zusammenhängende Partition π von $G = (V, E)$ ist wie in ([19], S. 1) eine Partition von G, so dass für alle $A \in \pi$ der Graph $G[A]$ zusammenhängend ist. Die Menge aller zusammenhängenden Partitionen nennen wir $\Pi_C(G)$.*

Auch hier wenden wir uns einem Beispiel zu.

Beispiel 3.37 *Wir betrachten die beiden Graphen $G_1 \cong P_1$ und $G_2 \cong P_2$ sowie $G = G_1 \cup G_2$ mit $G = G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Weiterhin seien*

$$\begin{aligned} V(G_1) &= \{v_1\} \\ V(G_2) &= \{v_2, v_3\} \\ E(G_1) &= \emptyset \\ E(G_2) &= \Big\{ \{v_2, v_3\} \Big\} \end{aligned}$$

gegeben. Dann erhalten wir

$$\Pi_C(G) = \Big\{ \Big\{ \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\} \Big\}, \Big\{ \{v_1\}, \{v_2, v_3\} \Big\} \Big\}.$$

Bei einigen Eckenpartitionen wird es uns später interessieren, ob zwischen zwei Ecken aus verschiedenen Blöcken eine Kante existiert oder nicht, weshalb wir die folgende Definition angeben.

Definition 3.38 *Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und eine Partition $\pi \in \Pi(G)$. Zwei verschiedene Blöcke A und B der Partition π heißen adjazent in G, wenn eine Kante $\{u, v\} \in E$ mit $u \in A$ und $v \in B$ existiert.*

Wir nehmen hierfür nochmals Bezug auf Beispiel 3.35.

Beispiel 3.39 *Es sei die Situation aus Beispiel 3.35 gegeben. In der Partition*

$$\Big\{ \{v_1\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3\} \Big\}$$

sind sowohl die Blöcke $\{v_1\}$ und $\{v_2, v_4\}$ adjazent zueinander als auch die Blöcke $\{v_3\}$ und $\{v_2, v_4\}$.

Schließlich werden wir noch eine weitere Art von Partitionen benötigen.

Definition 3.40 *Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Eine Partition $\pi \in \Pi(G)$ heißt Cliquenpartition von G, wenn jeder Block $x \in \pi$ eine Clique in G induziert. Die Menge aller Cliquenpartitionen bezeichnen wir mit $\Pi_{Cl}(G)$.*

Die oben vorgestellten Begriffe werden wir im folgenden Kapitel für einige neue Gleichungen zur Berechnung chromatischer Polynome verwenden.

Kapitel 4

Formeln für das bivariate chromatische Polynom

Um das bivariate chromatische Polynom eines Graphen zu bestimmen, wurde bereits die Rekursionsgleichung aus ([1], S. 33) vorgestellt. Hierbei ist man jedoch auf bereits bekannte bivariate chromatische Polynome von entsprechenden Graphen angewiesen. Das sind im Allgemeinen völlig kantenlose Graphen beziehungsweise vollständige Graphen. Für einige spezielle Graphentypen sind jedoch nach Beispiel 3.17 bereits eigene Beziehungen bekannt, welche eine direkte Berechnung gestatten. Im folgenden Abschnitt sollen zwei allgemeingültige und für jeden beliebigen Graphen gültige Formeln vorgestellt werden, welche mithilfe von Eckenpartitionen zum Ziel führen. Diese Darstellungen eignen sich vor allem als Beweismethode für Sätze aus dem darauffolgenden Abschnitt, in welchem wir uns wieder auf spezielle und in Beispiel 3.17 noch nicht vorgestellte Graphen mit gewissen Eigenschaften beschränken. Letztere erlauben eine gezieltere Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms. Im letzten Abschnitt nutzen wir schließlich gewisse Eigenschaften von Graphen zur Reduktion des bivariaten chromatischen Polynoms auf kleinere derartige Polynome.
Die in diesem Kapitel vorgestellten Gleichungen lassen im allgemeinen Fall auch die Beschränkung auf das univariate chromatische Polynom zu, indem man einfach den Fall $x = y$ betrachtet, ansonsten werden wir $x \neq y$ fordern. Daher werden wir den univariaten Fall zu jedem Ergebnis jeweils nur dann gesondert hinzufügen, wenn die Herleitung aus dem allgemeinen Fall etwas unübersichtlicher wird. Oftmals treten im Folgenden Terme der Form $(\dots)^0$ auf, welchen wir dann stets den Wert 1 zuordnen, insbesondere auch dann, wenn es sich um den Fall 0^0 handelt.

4.1 Allgemeine Formeln

Zunächst zeigen wir einige allgemeingültige Darstellungen des bivariaten chromatischen Polynoms, welche man auf alle schlichten Graphen anwenden kann. Die Sätze in diesem Abschnitt sollen in erster Linie als schnelles Beweismittel für mehrere Sätze aus den beiden folgenden Abschnitten verwendet werden. Alternativ mögliche vollständige Induktionen können sich nämlich für einige Behauptungen extrem lang und mühselig gestalten.
Wir beginnen mit folgendem Satz.

Satz 4.1 *Es sei G ein Graph, $\Pi_I(G[X])$ sei die Menge aller unabhängigen Partitionen von*

$X \subseteq V(G)$. Es sei $n = |V(G)|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(G;x,y) &= \sum_{W \subseteq V} (x-y)^{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_I(G[V-W])} y^{\underline{|\pi|}} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (x-y)^{n-i} \sum_{X \subseteq V(G) \ mit \ |X|=i} \ \sum_{\pi \in \Pi_I(G[X])} y^{\underline{|\pi|}} . \end{aligned}$$

Beweis:
Nach Bemerkung 3.15 gilt

$$P(G;x,y) = \sum_{W \subseteq V} (x-y)^{|W|} \, P(G-W;y) .$$

Zusammen mit der bereits bekannten Beziehung aus Korollar 4.5 erhalten wir die erste Gleichheit.
Für die zweite Gleichheit gehen wir von dem Fall aus, dass zunächst alle $v \in V(G)$ aus Z gefärbt sind, färben anschließend eine Ecke v_1 und dann stets eine weitere Ecke $v_2, \ldots, v_i \in V(G)$ aus Y. Hierbei müssen wir (wieder im Sinne von Korollar 4.5) jeweils alle unabhängigen Partitionen von $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ betrachten und zu jedem $\pi \in \Pi_I(\{v_1, v_2, \ldots, v_i\})$ pro Block eine Farbe aus Y vergeben.
q.e.d.

Zunächst untersuchen wir ein einfaches Beispiel.

Beispiel 4.2 *Wir betrachten den Weg*

$$P_3 = \Big(\{1,2,3\}, \Big\{\{1,2\}, \{2,3\}\Big\}\Big) .$$

Die untenstehende Tabelle zeigt alle Teilgraphen von P_3 sowie jeweils alle dazugehörigen möglichen unabhängigen Partitionen der jeweiligen Eckenmenge.

$G[\{1,2,3\}]$	$\Big\{\{1\},\{2\},\{3\}\Big\}, \Big\{\{1,3\},\{2\}\Big\}$
$G[\{2,3\}]$	$\Big\{\{2\},\{3\}\Big\}$
$G[\{1,3\}]$	$\Big\{\{1\},\{3\}\Big\}, \Big\{\{1,3\}\Big\}$
$G[\{1,2\}]$	$\Big\{\{1\},\{2\}\Big\}$
$G[\{1\}]$	$\Big\{\{1\}\Big\}$
$G[\{2\}]$	$\Big\{\{2\}\Big\}$
$G[\{3\}]$	$\Big\{\{3\}\Big\}$
$G[\emptyset]$	$\emptyset$

Wir setzen die entsprechenden Werte in die Gleichung aus Satz 4.1 ein:

$$\begin{aligned}
P(P_3;x,y) &= (x-y)^3\, y^{\underline{0}} + (x-y)^2\, 3y^{\underline{1}} + (x-y)\left(3y^{\underline{2}} + y^{\underline{1}}\right) + \left(y^{\underline{3}} + y^{\underline{2}}\right) \\
&= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + \left(x^2 - 2xy + y^2\right) 3y + 3xy\,(y-1) + xy - 3y^2\,(y-1) \\
&\quad -y^2 + y\left(y^2 - 3y + 2\right) + y^2 - y \\
&= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 + 3xy^2 - 3xy + xy - 3y^3 + 3y^2 \\
&\quad -y^2 + y^3 - 3y^2 + 2y + y^2 - y \\
&= x^3 + y - 2xy\ .
\end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel A.1 im Anhang zeigt, dass die Berechnung mithilfe von Satz 4.1 zwar zeitlich wesentlich ungünstiger ist als durch den Einsatz der Rekursionsbeziehungen aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20. Allerdings wird sich Satz 4.1 später als nützliches Beweismittel herausstellen, weshalb er für uns dennoch von großer Bedeutung ist. Die Berechnung in Anhang A.1 findet sich auch auf der beigefügten CD-ROM, welche diesen und alle weiteren Anhänge dieser Schrift in ausführlicher Form enthält.

In einigen Fällen wird es sich eher eignen, die äußere Summe über die unabhängigen Partitionen der Eckenmenge zu bilden. Auch hierfür haben wir eine Möglichkeit gefunden.

Satz 4.3 *Es sei G ein Graph, $\Pi_I(G)$ sei die Menge aller unabhängigen Partitionen von $V(G)$. Dann ist*

$$P(G;x,y) = \sum_{\pi\in\Pi_I(G)} \sum_{i=0}^{|\{X\in\pi|\ |X|=1\}|} \binom{|\{X\in\pi|\ |X|=1\}|}{i} (x-y)^i\, y^{\underline{|\pi|-i}}$$

eine alternative Darstellungsweise zu Theorem 6 und Korollar 7 in ([9], S. 74 f.).

Beweis:
Zunächst färben wir für jede unabhängige Partition $\pi \in \Pi_I(G)$ die Blöcke aus π paarweise verschieden echt und haben daher $y^{\underline{|\pi|}}$ Möglichkeiten wie beim univariaten chromatischen Polynom. Dieses entspricht dem Fall $i = 0$. Um die Farben aus Z einzubringen, wählen wir i Blöcke mit $i \geq 1$ zur Färbung in derartigen Farben aus, erlauben dieses Vorgehen jedoch lediglich für $X \in \pi$ mit $|X| = 1$, um doppelte Färbungen zu vermeiden. Letzteres Problem könnte sich ansonsten folgendermaßen ergeben: Aufgrund der Definition der unechten Farben dürfen wir nun auch verschiedene Blöcke von π mit derselben unechten Farbe versehen. Färben wir also einen Block $X \in \pi$ mit $|X| \geq 2$ unecht, so erhalten wir dieselbe Färbung auch über jede Verfeinerung π' von π, in welcher wir genau den Block $X \in \pi$ durch Blöcke $X'_1, \ldots, X'_k \in \pi'$ mit $2 \leq k \leq |X|$ ersetzt haben. Hierzu färben wir $X'_1, \ldots, X'_k$ jeweils in derselben unechten Farbe, in welcher wir zuvor X gefärbt haben, und übernehmen für alle anderen, unverändert gebliebenen Blöcke jeweils dieselbe Farbe wie zuvor.
Um nun aus den $|\{X \in \pi|\,|X| = 1\}|$ einelementigen Blöcken i Blöcke unecht zu färben, gibt es $\binom{|\{X\in\pi||X|=1\}|}{i}$ viele Möglichkeiten. Da auch die feinste Partition π_0 mit $|X_0| = 1$ für alle $X_0 \in \pi_0$ für jeden Graphen auftritt, wird auch der Fall berücksichtigt, dass alle Farben aus Z gewählt werden.
q.e.d.

Wir kommen noch einmal auf Beispiel 4.2 zurück, welches wir nun mithilfe von Satz 4.3 untersuchen.

Beispiel 4.4 *Für den Weg*

$$P_3 \quad = \quad \Big(\{1,2,3\}, \Big\{\{1,2\}, \{2,3\}\Big\}\Big)$$

gilt offenbar

$$\Pi_I(P_3) \quad = \quad \Big\{\Big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\Big\}, \Big\{\{1,3\}, \{2\}\Big\}\Big\} \; .$$

Wir setzen die entsprechenden Werte in die Gleichung aus Satz 4.3 ein:

$$\begin{aligned} P(P_3; x, y) &= \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} (x-y)^i \, y^{\underline{3-i}} + \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} (x-y)^i \, y^{\underline{2-i}} \\ &= y\left(y^2 - 3y + 2\right) + (3x - 3y)\left(y^2 - y\right) + 3y\left(x^2 - 2xy + y^2\right) + x^3 - 3x^2 y \\ &\quad +3xy^2 - y^3 + y^2 - y + xy - y^2 \\ &= y^3 - 3y^2 + 2y + 3xy^2 - 3xy - 3y^3 + 3y^2 + 3x^2 y - 6xy^2 + 3y^3 + x^3 - 3x^2 y \\ &\quad +3xy^2 - y^3 + y^2 - y + xy - y^2 \\ &= x^3 + y - 2xy \; . \end{aligned}$$

Auch hier möchten wir auf ein zusätzliches Beispiel A.2 im Anhang hinweisen, wobei Satz 4.3 ähnlich wie Satz 4.1 primär als späteres Beweismittel verwendet wird.

Die Sätze 4.1 und 4.3 lassen sich als eine Verallgemeinerung des folgenden Korollars auffassen, welches eine bereits seit langem geläufige Darstellung für das univariate chromatische Polynom zeigt.

Korollar 4.5 *Für den Spezialfall $Z = \emptyset$ erhalten wir die bereits bekannte und in Bemerkung 3.2 vorgestellte Darstellung des univariaten chromatischen Polynoms*

$$P(G; y) \quad = \quad \sum_{\pi \in \Pi_I(G)} y^{\underline{|\pi|}} \; .$$

Des Weiteren lässt sich zur Berechnung chromatischer Polynome zu einem gegebenen Graphen G auch ein weiterer Graph nutzen, nämlich dessen Komplement.

Bemerkung 4.6 *([12], S.74).*
Es sei G ein Graph mit $n = |V(G)|$. Dann gilt

$$P(G; y) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} s_i(\overline{G}) y^{\underline{i}} \; ,$$

wobei $s_i(\overline{G})$ die Anzahl aller aufspannenden Teilgraphen von $\overline{G}$ mit genau i zusammenhängenden Komponenten ist, welche jeweils einen vollständigen Teilgraphen in $\overline{G}$ induzieren.

Ähnlich hierzu erhalten wir für den bivariaten Fall folgendes Resultat:

Korollar 4.7 *Es sei G ein Graph. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P(G;x,y) &= \sum_{W \subseteq V(\overline{G})} (x-y)^{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_{Cl}(\overline{G}[V(\overline{G})-W])} y^{\underline{|\pi|}} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (x-y)^{n-i} \sum_{X \subseteq V(\overline{G}) \text{ mit } |X|=i} \sum_{\pi \in \Pi_{Cl}(\overline{G}[X])} y^{\underline{|\pi|}} \end{aligned}$$

und

$$P(G;x,y) = \sum_{\pi \in \Pi_{Cl}(\overline{G})} \sum_{i=0}^{|\{X \in \pi \mid |X|=1\}|} \binom{|\{X \in \pi \mid |X| = 1\}|}{i} (x-y)^i \, y^{\underline{|\pi|-i}} \, .$$

Beweis:
Weil für einen beliebigen Graphen H jede in $V(H)$ unabhängige Menge eine Clique in $\overline{H}$ induziert und umgekehrt, folgt die Behauptung aus Satz 4.1 beziehungsweise Satz 4.3.
q.e.d.

Nun verfügen wir über hilfreiche Mittel, um viele Behauptungen in den folgenden beiden Abschnitten zu beweisen.

4.2 Formeln für bestimmte Graphentypen

Für gewisse Typen von Graphen lässt sich eine Gleichung zur schnellen und einfachen Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms angeben. In diesem Abschnitt stellen wir einige dieser Spezialfälle vor.

4.2.1 Sterne und disjunkte Vereinigungen von Sternen

Wir beginnen dieses Kapitel mit einfachen Fällen von Graphen, nämlich mit Sternen und disjunkten Vereinigungen aus solchen.

Satz 4.8 *Es sei $N \geq 1$. Für einen Stern S_{N+1} gilt*

$$P(S_{N+1};x,y) = (x-y)\,x^N + y\,(x-1)^N \, .$$

Beweis:
Wenn wir die Ecke v mit $|N(v)| = N$ in einer unechten Farbe färben, so können wir die weiteren Ecken beliebig färben. Andernfalls haben wir eine echte Farbe für die Ecke v mit $|N(v)| = N$, die wir dann für die übrigen Ecken nicht nochmals verwenden dürfen.
q.e.d.

Das folgende Korollar beruht auf Satz 3.19.

Korollar 4.9 *Für einen Graphen* $G = \sum_{m=1}^{N} t_m S_{m+1} = \bigcup_{m=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{t_m} S_{m+1}$ *mit* $t_m \geq 0$ *für alle* $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *mit* $N \geq 1$ *gilt*

$$P(G; x, y) = \prod_{m=1}^{N} \Big(P(S_{m+1}; x, y)\Big)^{t_m} .$$

In Satz 4.8 haben wir eine Formel und damit eine rekursionsfreie Berechnungsmethode vorgestellt. Dieses bietet gegenüber einer Rekursionsgleichung bekanntlich einen enormen Vorteil, weil die Bestimmung weiterer Graphenpolynome entfällt. Auch an anderen Stellen in dieser Schrift werden wir rekursionsfreie Berechnungsmöglichkeiten für das bivariate chromatische Polynom oder für die Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms einführen, wobei sich selbstverständlich auch dort stets ein großer rechnerischer Vorteil ergeben wird.

Bemerkung 4.10 *Es sei* $G = (V, E)$ *der Graph aus Korollar 4.9. Offenbar gilt*

$$|E| = \sum_{m=1}^{N} t_m m$$

und für $n = |V|$

$$\begin{aligned} n &= \sum_{m=1}^{N} t_m (m+1) \\ &= |E| + \sum_{m=1}^{N} t_m \\ &> |E| . \end{aligned}$$

Es sei $H(n, N, t_1, \ldots, t_N)$ *die Anzahl aller Graphenoperationen, welche unter Verwendung von Satz 3.19 notwendig sind. Weil wir für jeden bei den Rekursionen entstehenden Graphen pro Kante jeweils einen Rekursionsschritt ausführen und in jedem solchen jeweils drei Graphen entstehen, erhalten wir offenbar*

$$\begin{aligned} H(n, N, t_1, \ldots, t_N) &\leq \sum_{i=1}^{|E|} 3^i \\ &\leq |E| 3^{|E|} \\ &\leq C 3^{|E|} \\ &< C 3^n \end{aligned}$$

und damit ein exponentiell beschränktes Wachstum mit der Basis 3*. Für den univariaten Fall ersetzen wir diese Basis lediglich durch die Basis* 2*, weil bei jedem Rekursionsschritt gemäß Satz 3.6 jeweils zwei neue Graphen entstehen.*
Diese Abschätzung lässt sich nicht weiter nach unten verfeinern, wie bereits alle Graphen vom Typ $t_1 S_2$ *mit* $t_1 \geq 1$ *demonstrieren. Es gilt*

$$|V(t_1 S_2)| = 2t_1$$

und

$$|E(t_1 S_2)| \;=\; t_1 \,.$$

Weil bei jedem Schritt der Rekursion aus Satz 3.19 drei neue Graphen mit jeweils genau einer Kante weniger als unmittelbar zuvor entstehen und die Kanten paarweise keine gemeinsamen Ecken besitzen, erhalten wir sogar die Gleichheit

$$\begin{aligned} H(2t_1, 1, t_1) &= \sum_{i=1}^{|E|} 3^i \\ &= \sum_{i=1}^{t_1} 3^i \,. \end{aligned}$$

Im univariaten Fall gilt dieses analog mit der Basis 2.
Betrachten wir dagegen die Anzahl $K(n, N, t_1 \ldots, t_N)$ *aller notwendigen Graphen- und Rechenoperationen, welche mit der Methode aus Korollar 4.9 einhergehen, so sind hier, wie man an der Beziehung*

$$P(G; x, y) \;=\; \prod_{m=1}^{N} \Big((x-y)\, x^m + y\,(x-1)^m \Big)^{t_m}$$

erkennt, weder im bivariaten noch im univariaten Fall Graphenoperationen erforderlich. Weiterhin gilt $m < n$ *und* $t_m \leq n$*. Weil die in dieser Arbeit auftretenden Rechenoperationen jedoch zumeist keinen großen Komplexitätsbeitrag leisten, werden wir diese von nun an, sofern nichts anderes erwähnt wird, vernachlässigen. Daher ergibt sich mit der Kenntnis, dass* n *linear wächst, also eine lineare Beschränkung von* $K(n, N, t_1, \ldots, t_N)$*.*

Wie wir speziell in der Implementierung A.3 von Korollar 4.9 im Anhang sehen, erreichen wir mithilfe von Korollar 4.9 gegenüber der Implementierung der Rekursionsbeziehung nach ([1], S. 33) mittels Kantenlöschung, Kantenkontraktion und Kantenextraktion aus Satz 3.19 einen sehr großen zeitlichen Vorteil. Auf die Verwendung der Umstellungsvariante letzterer Rekursionsgleichung in Bemerkung 3.20, welche Kantenadditionen, Kantenlöschungen und Kantenextraktionen erforderlich macht, verzichten wir hier allerdings, da sich die Berechnung mittels dieser Methode als noch zeitaufwendiger erwiesen hat als unter Verwendung von Satz 3.19. Wie wir am zweiten Beispielgraphen sehen, erlaubt die Formel aus Korollar 4.9 trotz der 350 Ecken und der entsprechenden Kanten des Graphen eine Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms innerhalb von weniger als einer Sekunde, während die Rekursion aus Satz 3.19 nach einer Stunde erfolglos abgebrochen wird. Aufgrund des großen Umfanges des Polynoms geben wir dieses jedoch nicht mit aus.

4.2.2 Löschung von Sternen aus vollständigen Graphen

Unsere Überlegungen setzen wir mit einem Graphentypus fort, welcher über verhältnismäßig viele Kanten verfügt. Wir erhalten ihn, indem wir aus einem vollständigen Graphen die Kanten von gewissen zueinander paarweise disjunkten Teilgraphen löschen.

Satz 4.11 *Es sei* $G = K_n - \sum\limits_{m=1}^{N} t_m S_{m+1}$*, wobei* $t_m \geq 0$ *für alle* $m \in \{1, \ldots, N\}$ *gelte und* $N \geq 1$ *die Anzahl der Kanten eines solchen Sterns mit maximaler Kantenanzahl sei. Zudem sei* $n \geq \sum_{m=0}^{N} t_m (m+1)$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P(G;x,y) &= \sum_{b_N=0}^{t_N} \binom{t_N}{b_N} N^{b_N} \sum_{b_{N-1}=0}^{t_{N-1}} \binom{t_{N-1}}{b_{N-1}} (N-1)^{b_{N-1}} \\ &\quad \ldots \sum_{b_2=0}^{t_2} \binom{t_2}{b_2} 2^{b_2} \sum_{b_1=0}^{t_1} \binom{t_1}{b_1} 1^{b_1} \\ &\quad \sum_{i=0}^{n-2b_N-\ldots-2b_1} \binom{n-2b_N-\ldots-2b_1}{i} (x-y)^i \, y^{\underline{n-b_N-\ldots-b_1-i}} \, . \end{aligned}$$

Beweis:
Zum Beweis verwenden wir Satz 4.3:
Die erste Summe in Satz 4.3 wird über alle unabhängigen Partitionen von G gebildet. Um diese Partitionen beim Graphen G zu erzeugen, darf jeder Block nur entweder aus einer Ecke oder aus zwei solchen Ecken bestehen, zwischen welchen eine Kante gelöscht wurde. Es gibt $\prod_{m=1}^{N} \sum_{b_m=0}^{t_m} \binom{t_m}{b_m} m^{b_m}$ Möglichkeiten, Blöcke X_2 mit $|X_2| = 2$ zu wählen, für die übrigen Blöcke X_1 gilt $|X_1| = 1$. Also folgt $|\Pi_I(G)| = \prod_{m=1}^{N} \sum_{b_m=0}^{t_m} \binom{t_m}{b_m} m^{b_m}$.
q.e.d.

Im folgenden Beispiel wenden wir Satz 4.11 auf den in Abbildung 4.1 gezeigten Graphen an.

Beispiel 4.12 *Wir bestimmen exemplarisch das bivariate chromatische Polynom des Graphen* $G = K_6 - S_2 - S_4$ *mithilfe von Satz 4.11:*

$$\begin{aligned} P(G;x,y) &= \sum_{b_3=0}^{1} \binom{1}{b_3} 3^{b_3} \sum_{b_2=0}^{0} \binom{0}{b_2} 2^{b_2} \sum_{b_1=0}^{1} \binom{1}{b_1} 1^{b_1} \\ &\quad \sum_{i=0}^{6-2b_3-2b_2-2b_1} \binom{6-2b_3-2b_2-2b_1}{i} (x-y)^i \, y^{\underline{6-b_3-b_2-b_1-i}} \\ &= x^6 - 42y + 60xy - 45x^2y + 24x^3y - 11x^4y + 47y^2 - 52xy^2 + 24x^2y^2 - 6y^3 \, . \end{aligned}$$

Das Ergebnis aus Satz 4.11 lässt sich selbstverständlich auch auf den Spezialfall des univariaten chromatischen Polynoms übertragen.

Korollar 4.13 *Es sei* $G = K_n - \sum\limits_{m=1}^{N} t_m S_{m+1}$*, wobei* $t_m \geq 0$ *für alle* $m \in \{1, \ldots, N\}$ *gelte und* $N \geq 1$ *die Anzahl der Kanten eines solchen Sterns mit maximaler Kantenanzahl sei.* n

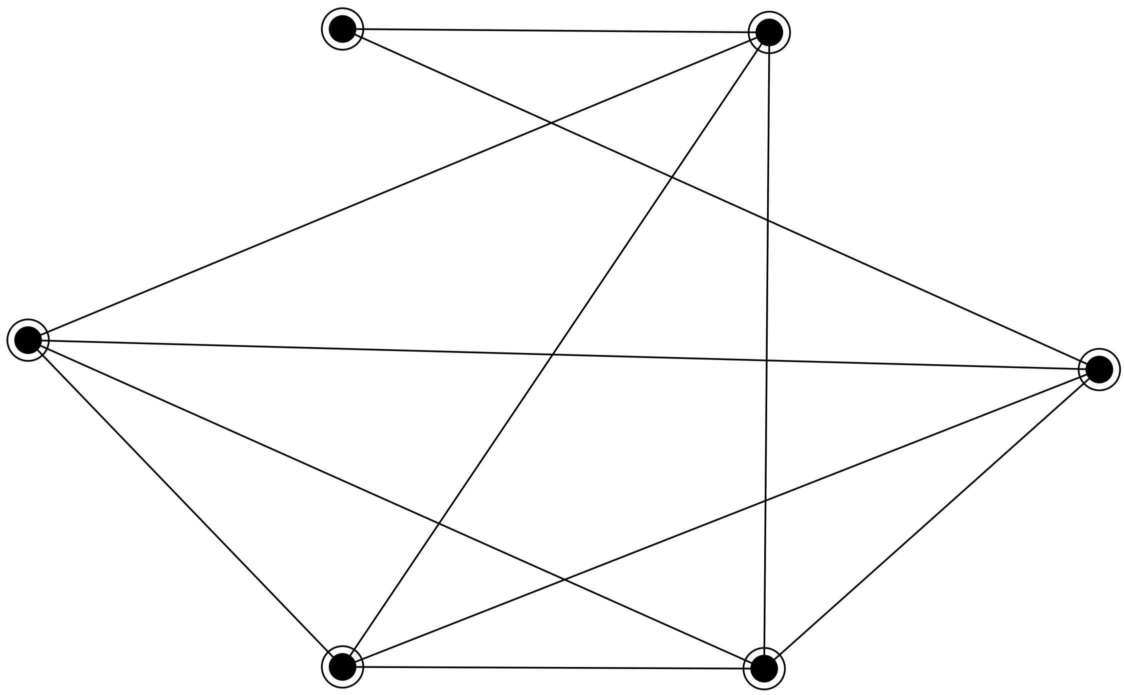


Abbildung 4.1: $K_6 - S_2 - S_4$

sei hinreichend groß. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(G;y) &= \sum_{b_N=0}^{t_N} \binom{t_N}{b_N} N^{b_N} \sum_{b_{N-1}=0}^{t_{N-1}} \binom{t_{N-1}}{b_{N-1}} (N-1)^{b_{N-1}} \\ &\quad \ldots \sum_{b_2=0}^{t_2} \binom{t_2}{b_2} 2^{b_2} \sum_{b_1=0}^{t_1} \binom{t_1}{b_1} 1^{b_1} \\ &\quad y^{\underline{n-b_N-\ldots-b_1}} . \end{aligned}$$

Beweis:
Die Behauptung folgt aus Satz 4.11 für $x = y$.
q.e.d.

Wie wir nun sehen, lässt die Anwendung der Gleichung aus Satz 4.11 eine vergleichsweise kurze Laufzeit erwarten.

Bemerkung 4.14 *Es sei $G = (V, E)$ der Graph aus Satz 4.11. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
n &\geq \sum_{m=1}^{N} t_m \,(m+1) \\
&\geq \sum_{m=1}^{N} t_m \\
&= |E(\overline{G})| \quad = \quad \frac{n\,(n-1)}{2} - |E| \,,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

wobei $\frac{n(n-1)}{2}$ etwa nach ([31], S. 6 f.) die Anzahl der Kanten des Graphen K_n ergibt.
Die für den von uns betrachteten Graphentyp zur Bestimmung des bivariaten chromatischen Polynoms günstigere der beiden Methoden aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20 ist offenbar die Methode aus Bemerkung 3.20. Diese liefert für die Anzahl $H(n, N, t_1, \ldots, t_N)$ aller hierbei notwendigen Graphenoperationen nach der Abschätzung (4.1) *die Beschränkung*

$$
\begin{aligned}
H(n, N, t_1, \ldots, t_N) &\leq \sum_{i=1}^{|E(\overline{G})|} 3^i \\
&\leq |E(\overline{G})| 3^{|E(\overline{G})|} \\
&\leq C3^{|E(\overline{G})|} \\
&= C3^{\frac{n(n-1)}{2} - |E|} \\
&\leq C3^n \,.
\end{aligned}
$$

Damit liegt ein exponentiell beschränktes Wachstum mit der Basis 3 *vor. Für den univariaten Fall gilt diese Abschätzung mit der Basis* 2.
Wie wir nun am Beispiel der Graphen $K_{2k} - kS_2$ mit $k \geq 1$ nachvollziehen, lässt sich die erste Relation nicht durch eine strenge Ungleichung ersetzen. Offenbar gilt

$$
|V(K_{2k} - kS_2)| \quad = \quad 2k
$$

und

$$
\begin{aligned}
|E(K_{2k} - kS_2)| &= \frac{2k(2k-1)}{2} - k \\
&= 2k(k-1)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
|E(\overline{K_{2k} - kS_2})| \quad = \quad k \,.
$$

Da in jedem Schritt der Rekursion nach Bemerkung 3.20 aus jedem Graphen drei neue Graphen mit jeweils genau einer Kante mehr als zuvor entstehen, benötigen wir

$$
\begin{aligned}
H(2k, 1, k) &= \sum_{i=1}^{|E(\overline{G})|} 3^i \\
&= \sum_{i=1}^{|E(\overline{K_{2k} - kS_2})|} 3^i
\end{aligned}
$$

Graphenoperationen im bivariaten Fall, während wir im univariaten Fall gemäß Bemerkung 3.8 die Basis 3 durch die Basis 2 ersetzen. Die Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass die Elemente aus $E(\overline{G})$ paarweise keine gemeinsamen Ecken besitzen und wir daher nicht mit weniger als $|E|$ Rekursionsschritten auskommen.
Die Beziehung aus Satz 4.11 beziehungsweise Korollar 4.13 verzichtet dagegen auf jegliche Graphenoperationen. Weil n lediglich einem linearen Wachstum unterliegt, ist die Komplexität $K(n, N, t_1, \ldots, t_N)$ dieser Formel sowohl im univariaten als auch im bivariaten Fall linear beschränkt.

Anhand von weiteren Beispielen wird im Anhang unter A.4 veranschaulicht, dass die Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms großer Graphen mithilfe von Satz 4.11 deutlich schneller gelingt als mit der Rekursionsformel nach ([1], S. 33) aus Satz 3.19, und auch gegenüber der Umstellung dieser Gleichung aus Bemerkung 3.20 noch einen zeitlichen Vorteil aufweist. Zudem zeigen wir auch speziell für den univariaten Fall den zeitlichen Vorteil des Ergebnisses aus Korollar 4.13 gegenüber der Implementierung des univariaten chromatischen Polynoms durch ([20], S.210 f.). Besonders erwähnenswert ist der vierte Beispielgraph, dessen bivariates chromatisches Polynom mittels Bemerkung 3.20 selbst innerhalb einer Stunde noch nicht berechnet werden kann, wohingegen die Methode aus Satz 4.11 bereits nach etwa 11 Sekunden das Polynom liefert. Aus Übersichtsgründen verzichten wir auf die Ausgabe der Abbildung des entsprechenden Graphen sowie auf die Ausgabe des Polynoms.

4.2.3 Spezielle Splitgraphen

Der nächste Graphentyp, welchem wir uns widmen, ist der sogenannte Splitgraph. Bei diesem lässt sich die Eckenmenge in zweierlei Eckenmengen partitionieren, nämlich in eine unabhängige Eckenmenge und die Eckenmenge einer Clique. Weil es jedoch mit größerer Eckenanzahl in den beiden Blöcken der Partition zunehmend mehr Kombinationsmöglichkeiten für die Kanten zwischen beiden Blöcken gibt, beschränken wir uns hier auf den Fall, dass alle diese Kanten tatsächlich auftreten. Damit haben wir auch hier wie im vorigen Abschnitt einen Graphen mit verhältnismäßig vielen Kanten vorliegen.

Satz 4.15 *Es sei $G = (V, E)$ der Graph $K_s * \overline{K_k}$ mit $s \geq 1$ und $k \geq 1$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P(G; x, y) &= \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} (x-y)^{s-t}\, y^{\underline{t}} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (x-y)^{k-l} (y-t)^{l} \\ &= \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} (x-y)^{s-t}\, y^{\underline{t}}\, (x-t)^{k} \quad . \end{aligned}$$

Beweis:
Nach Beispiel 3.17 ist das bivariate chromatische Polynom eines K_s gegeben durch

$$\begin{aligned} P(K_s; x, y) &= \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} (x-y)^{t}\, y^{\underline{s-t}} \\ &= \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} (x-y)^{s-t}\, y^{\underline{t}} \;. \end{aligned}$$

Die Ecken des Graphen $\overline{K_k}$ dürfen wir untereinander beliebig mit Farben aus Y und $X \backslash Y$ färben. Im Graphen $K_s * \overline{K_k}$ müssen wir für die Ecken des $\overline{K_k}$ jeweils lediglich genau die im Teilgraphen K_s aus Y verwendeten Farben ausschließen. Hierbei gibt es jeweils $\binom{k}{l}$ Möglichkeiten, aus k Ecken l Ecken echt zu färben, wobei genau die t echten Farben des K_s ausgeschlossen werden. Zusammenfassend müssen wir zur Färbung des $\overline{K_k}$ aus den x Farben also lediglich genau t Farben ausschließen und dürfen ansonsten frei wählen.
q.e.d.

Wir wenden uns nun einem Beispiel zu.

Beispiel 4.16 *Es sei der Graph $G = K_4 * \overline{K_3}$ gegeben. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P(G; x, y) &= \sum_{t=0}^{4} \binom{4}{t} (x-y)^{4-t} \, y^{\underline{t}} \, (x-t)^3 \\ &= x^7 + 384y - 504xy + 336x^2y - 154x^3y + 56x^4y - 18x^5y - 488y^2 \\ &+ \; 540xy^2 - 276x^2y^2 + 75x^3y^2 + 108y^3 - 60xy^3 \; . \end{aligned}$$

Zum univariaten Fall erhalten wir auf alternative Art ein bereits bekanntes Ergebnis.

Korollar 4.17 *([23], S.197).*
Es sei der Graph $G = K_s * \overline{K_k}$ mit $s \geq 1$ und $k \geq 1$ aus Satz 4.15 gegeben. Dann gilt

$$P(G; y) \;=\; y^{\underline{s}} \, (y-s)^k \; .$$

Beweis:
Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 4.15.
q.e.d.

Wir untersuchen den Rechenaufwand der Methode aus Satz 4.15 nun genauer.

Bemerkung 4.18 *In der Situation aus Satz 4.15 halten wir die Gleichungen*

$$|V| \;=\; s + k$$

und

$$|E| \;=\; \frac{s\,(s-1)}{2} + sk$$

sowie

$$|E(\overline{G})| \;=\; \frac{k\,(k-1)}{2}$$

fest.
Die Methode aus Satz 3.19 mit $H_1(s,k)$ notwendigen Graphenoperationen beziehungsweise der Einsatz von Bemerkung 3.20 mit $H_2(s,k)$ notwendigen Graphenoperationen ergibt, ähnlich

wie in den Bemerkungen 4.10 beziehungsweise 4.14, worauf wir uns von nun an auch in allen folgenden Komplexitätsanalysen berufen werden,

$$\begin{aligned} H_1(s,k) &\leq \sum_{i=1}^{|E|} 3^i \\ &\leq |E| 3^{|E|} \\ &\leq C 3^{|E|} \\ &= C 3^{\frac{s(s-1)}{2}+sk} \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} H_2(s,k) &\leq \sum_{i=1}^{|E(\overline{G})|} 3^i \\ &\leq |E(\overline{G})| 3^{|E(\overline{G})|} \\ &\leq C 3^{|E(\overline{G})|} \\ &= C 3^{\frac{k(k-1)}{2}} \end{aligned}$$

und damit jeweils ein exponentiell beschränktes Wachstum. Auf den univariaten Fall bezogen gelten diese Abschätzungen nach Satz 3.6 beziehungsweise Bemerkung 3.8 jeweils mit $C2^{\frac{s(s-1)}{2}+sk}$ *beziehungsweise* $C2^{\frac{k(k-1)}{2}}$.
Eine kleinere Basis können wir nicht finden, was wir zunächst für die Methode aus Satz 3.19 am Beispiel $K_s * K_1 = K_{s+1}$ *mit* $s \geq 2$ *zeigen. Es gilt*

$$|V(K_{s+1})| = s+1$$

und

$$\begin{aligned} |E(K_{s+1})| &= \frac{s\,(s-1)}{2} + s \\ &= \frac{(s+1)s}{2} \, . \end{aligned}$$

In jedem Rekursionsschritt nach Satz 3.19 erhalten wir drei Graphen mit jeweils höchstens zwei Ecken weniger als vorher. Damit sind mindestens $\frac{\lfloor s+1 \rfloor}{2}$ *Rekursionschritte erforderlich, um den ersten kantenlosen Graphen zu erhalten. Es gilt also*

$$H_1(s,1) \geq \sum_{i=1}^{\frac{\lfloor s+1 \rfloor}{2}} 3^i$$

für den bivariaten Fall, während wir im univariaten Fall nach Satz 3.6 stattdessen über 2^i *summieren.*
Die Gleichung aus Bemerkung 3.20 betrachten wir nochmals für alle Graphen $K_1 * \overline{K_k} = S_{k+1}$ *mit* $k \geq 2$. *Es gilt*

$$|V(S_{k+1})| = k+1$$

und

$$|E(S_{k+1})| \;=\; k$$

sowie

$$|E(\overline{S_{k+1}})| \;=\; \frac{k\,(k-1)}{2}\,.$$

In jedem Schritt der Rekursionsbeziehung aus Bemerkung 3.20 entstehen drei Graphen mit jeweils höchstens zwei Ecken weniger als zuvor. Daher müssen wir mindestens $\frac{\lfloor k \rfloor}{2}$ Rekursionsschritte durchführen, um den ersten Graphen ohne Kanten zu erhalten, woraus

$$H_2(1,k) \;\geq\; \sum_{i=1}^{\frac{\lfloor k \rfloor}{2}} 3^i$$

für den bivariaten Fall folgt, während im univariaten Fall nach Bemerkung 3.8 wieder über 2^i zu summieren ist.
Dagegen kommen in der Relation aus Satz 4.15 beziehungsweise Korollar 4.17 keinerlei Graphenoperationen vor, weshalb wegen $s < n$ und $k < n$ jeweils ein linear beschränktes Wachstum der Komplexität $K(s,k)$ vorliegt.

Für zwei weitere Beispiele verwenden wir die Methode aus Satz 4.15 im Anhang A.5 unter Einbeziehung einer Laufzeitmessung. Dabei erkennen wir einen deutlichen zeitlichen Vorteil der Beziehungen aus Satz 4.15 und Bemerkung 3.20 gegenüber der Rekursion aus Satz 3.19. Beim zweiten Beispiel verzichten wir aufgrund der hohen Eckenzahl auf die Ausgabe der Abbildung des Graphen. Hier vergleichen wir die Gleichungen aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20, welche jeweils nach einer Stunde noch zu keinem Ergebnis führen, mit der Formel aus Satz 4.15, welche die Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms innerhalb von weniger als einer Sekunde ermöglicht. Allerdings geben wir lediglich die in Anspruch genommene Zeit aus, das Polynom aufgrund seiner Länge jedoch nicht.
Wir betrachten nun einen weiteren Spezialfall eines Splitgraphen. Verknüpft man einen K_1 mit einem vollständigen Teilgraphen eines K_s, so lässt sich das bivariate chromatische Polynom noch leichter bestimmen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4.19 *Es sei $G = (V,E)$ ein Graph, welcher aus einem K_s und einer Ecke v entsteht, indem man v durch einen Join mit einem $K_r \subset K_s$ verbindet. Dann gilt*

$$P(G;x,y) \;=\; (x-y)\,P(K_s;x,y) + y\Big(P(K_s;x-1,y-1) + (s-r)\,P(K_{s-1};x-1,y-1)\Big)\,.$$

Beweis:
Falls v unecht gefärbt ist, dürfen wir den Graphen K_s beliebig färben, was $(x-y)\,P(K_s;x,y)$ Möglichkeiten ergibt.
Falls v echt gefärbt ist, dürfen wir dieselbe Farbe nicht für die Nachbarschaft $N(v)$ von v verwenden. Wir färben also zunächst den Graphen K_s ohne die bereits gewählte echte Farbe. Hierfür gibt es $y\Big(P(K_s;x-1,y-1)\Big)$ Möglichkeiten. Nun fehlen genau die Fälle, in denen eine Ecke aus $V(G) - N(v) - \{v\}$ ebenfalls in der für v gewählten echten Farbe gefärbt ist. Das

sind pro echter Farbe $(s-r)\,P(K_{s-1}; x-1, y-1)$ Möglichkeiten, womit sich also insgesamt $y\Big(P(K_s; x-1, y-1) + (s-r)\,P(K_{s-1}; x-1, y-1)\Big)$ Möglichkeiten ergeben.
q.e.d.

Auch hierzu betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 4.20 *Es sei $G = K_5 \cup K_7$ mit $K_5 \cap K_7 = K_4$ der Graph aus Abbildung 4.2. Hierbei ist $r = 4$ und $s = 7$ nach Satz 4.19. Wir erhalten*

$$\begin{aligned} P(G; x, y) &= (x-y)\,P(K_7; x, y) + y\Big(P(K_7; x-1, y-1) + 3P(K_6; x-1, y-1)\Big) \\ &= x^8 - 2880y + 3600xy - 2280x^2y + 984x^3y - 330x^4y + 94x^5y - 25x^6y + 4176y^2 \\ &- 4620xy^2 + 2470x^2y^2 - 820x^3y^2 + 165x^4y^2 - 1360y^3 + 1050xy^3 - 285x^2y^3 + 60y^4 \ . \end{aligned}$$

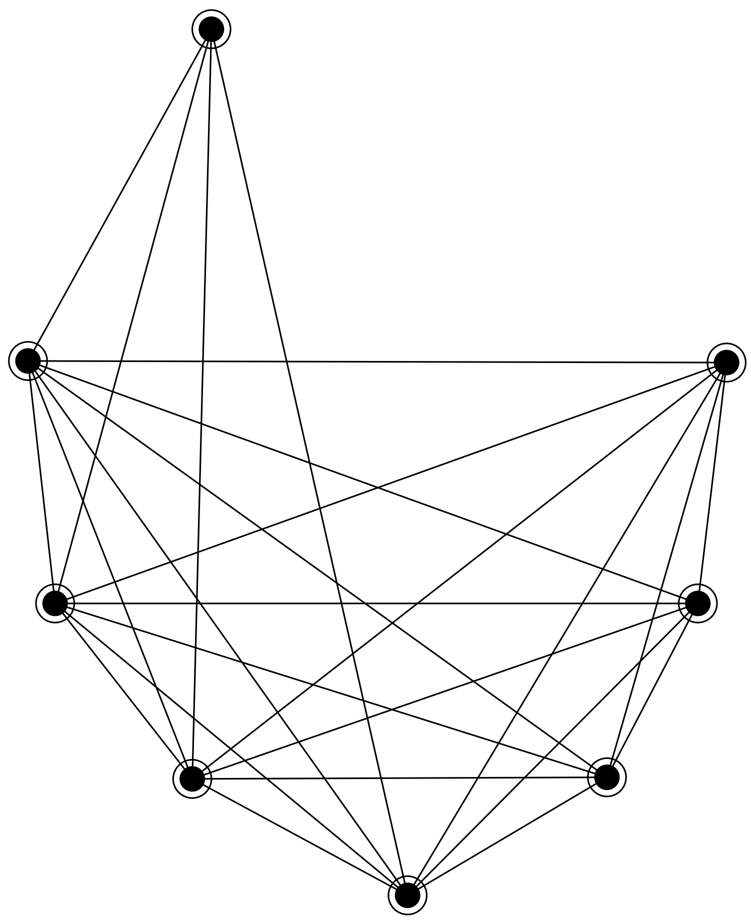


Abbildung 4.2: $K_5 \cup K_7$ mit $K_5 \cap K_7 = K_4$

Zur Komplexität der Methode aus Satz 4.19 lassen sich folgende Aussagen machen.

Bemerkung 4.21 *Wir betrachten die in Satz 4.19 gegebene Situation. Es gilt*

$$|V| \;=\; s+1$$

und

$$|E| \;=\; \frac{s\,(s-1)}{2}+r\;.$$

Für die Anzahl $H(s,r)$ aller mittels der Rekursionsgleichung aus Bemerkung 3.20 erforderlichen Graphenoperationen erhalten wir

$$H(s,r) \;\leq\; 3C(s-r)$$

für den bivariaten Fall, womit das Wachstum nur linear beschränkt ist. Letzteres trifft auch auf den univariaten Fall zu, wenngleich wir hier gemäß Bemerkung 3.8 die Konstante 2 verwenden müssen.
Betrachtet man einen Graphen $K_n - e$ mit $n \geq 2$ und $e \in E(K_n)$, so erhält man

$$H(n,n-1) \;=\; 3C$$

im bivariaten Fall, während im univariaten Fall wieder der Faktor 2 zugrunde zu legen ist.
Diese untere Grenze entspricht vom Komplexitätsaufwand der Methode aus Satz 4.19. Setzt man nämlich die rekursionsfreie Formel für das bivariate chromatische Polynom des vollständigen Graphen nach ([9], S. 78) als bekannt voraus, so sind mithilfe der Methode aus Satz 4.19 in jedem Fall nur einmalig drei Graphen zu bilden, um deren bivariates chromatisches Polynom jeweils direkt zu bestimmen. Zur Berechnung des univariaten chromatischen Polynoms werden entsprechend zwei Graphen gebildet. Somit gilt für die Anzahl $K(s,r)$ aller Graphenoperationen mittels der Beziehung aus Satz 4.19 stets

$$K(s,r) \;\leq\; H(s,r)\;.$$

Zu Beispiel 4.20 fügen wir im Anhang unter A.6 einen Programmcode hinzu. Dieser zeigt uns auch hier wieder eine deutlich kürzere Berechnungsdauer mithilfe von Satz 4.19 gegenüber den Rekursionsformeln nach ([1], S. 33) aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20.

4.2.4 Bestimmte vollständig k-partite Graphen

Zu den häufig mit Interesse untersuchten Graphen zählen unter anderem die vollständig k-partiten Graphen mit $k \geq 2$. So haben wir bereits in Beispiel 3.17 eine Darstellung des bivariaten chromatischen Polynoms vollständig bipartiter Graphen $K_{m,n}$ kennengelernt. Wir geben nun Formeln für gewisse vollständig k-partite Graphen mit $k \geq 2$ an, welche man als Verallgemeinerung der vollständig bipartiten Graphen $K_{2,2}$ und $K_{3,3}$ zu vollständig k-partiten Graphen $K_{2,\ldots,2}$ und $K_{3,\ldots,3}$ auffassen kann. Zuvor erinnern wir nochmals an die Definition eines vollständig k-partiten Graphen.

Definition 4.22 *Gemäß Definition 2.25 und Definition 2.26 ist der vollständig k-partite Graph folgendermaßen definiert:*
Einen Graphen G nennen wir k-partit für $k \geq 2$, wenn es eine Partition $\Pi = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$

von $V(G)$ gibt, so dass für jede Kante $e \in E(G)$ die Relation $|e \cap X_i| \leq 1$ für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt. Für $k = 2$ nennen wir G auch bipartit. Einen k-partiten Graphen G nennen wir vollständig k-partit, wenn für jedes Eckenpaar mit aus verschiedenen Blöcken stammenden Ecken diese beiden Ecken zueinander adjazent sind. Ist $n_i = |X_i|$ für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, so bezeichnen wir G auch als $K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Wir beginnen nun mit dem Graphentyp $K_{2,\ldots,2}$, welchen wir als $K_{2,2,2,2,2}$ in Abbildung 4.3 zeigen.

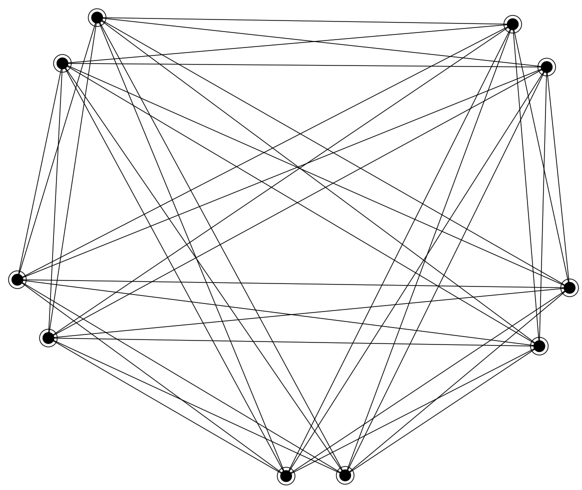


Abbildung 4.3: $K_{2,2,2,2,2}$

Satz 4.23 *Es sei $G = (V, E)$ der vollständig k-partite Graph $K_{\underbrace{2,2,\ldots,2}_{k-mal}}$. Dann gilt*

$$P(G; x, y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \sum_{l=0}^{2k-2i} \binom{2k-2i}{l} (x-y)^{2k-2i-l}\, y^{\underline{i+l}} .$$

Beweis:
Wir verwenden Satz 4.11 und identifizieren den dort betrachteten Graphen $K_n - \sum_{m=1}^{N} t_m S_{m+1}$ für $N \geq 1$ und $t_m \geq 0$ mit dem Graphen $K_{\underbrace{2,2,\ldots,2}_{k-mal}}$, indem wir $n = 2k$, $N = 1$ und $t_1 = k$ setzen:

$$\begin{aligned} P(K_{2k} - kS_2; x, y) &= \sum_{b_1=0}^{k} \binom{k}{b_1} \sum_{l=0}^{2k-2b_1} \binom{2k-2b_1}{l} (x-y)^{b_1+l}\, y^{\underline{2k-b_1-l}} \\ &= \sum_{b_1=0}^{k} \binom{k}{b_1} \sum_{l=0}^{2k-2b_1} \binom{2k-2b_1}{l} (x-y)^{2k-2b_1-l}\, y^{\underline{b_1+l}} . \end{aligned}$$

q.e.d.

Hierzu berechnen wir folgendes Beispiel.

Beispiel 4.24 *Es sei $G = K_{2,2,2,2}$. Dann erhalten wir*

$$
\begin{aligned}
P(G;x,y) &= \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} \sum_{l=0}^{8-2i} \binom{8-2i}{l} (x-y)^{8-2i-l}\, y^{\underline{i+l}} \\
&= x^8 - 2790y + 3408xy - 2128x^2y + 912x^3y - 306x^4y + 88x^5y - 24x^6y + 4059y^2 \\
&- 4392xy^2 + 2320x^2y^2 - 768x^3y^2 + 156x^4y^2 - 1332y^3 + 1008xy^3 - 272x^2y^3 + 60y^4 \ .
\end{aligned}
$$

Auf den univariaten Fall beschränkt ergibt sich folgendes Resultat.

Korollar 4.25 *Es sei $G = (V,E)$ der vollständig k-partite Graph $K_{\underbrace{2,2,\ldots,2}_{k-mal}}$ aus Satz 4.23.*

Dann gilt

$$
P(G;y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} y^{\underline{2k-i}} \ .
$$

Beweis:
Die Behauptung folgt aus Satz 4.23.
q.e.d.

Wir untersuchen nun die Komplexität des Ergebnisses aus Satz 4.23.

Bemerkung 4.26 *In der Situation aus Satz 4.23 sei $H(n,k)$ für $n = |V|$ die Anzahl aller Graphenoperationen, welche sich durch die rekursive Bestimmung des bivariaten chromatischen Polynoms gemäß Bemerkung 3.20 ergeben. Es gilt offenbar*

$$
n = 2k
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
|E| &= \frac{2k\,(2k-1)}{2} - k \\
&= 2k\,(k-1)
\end{aligned}
$$

und

$$
|E(\overline{G})| = k \ .
$$

Damit erhalten wir für den bivariaten Fall aufgrund der Beziehung

$$
\begin{aligned}
H(n,k) &= \sum_{i=1}^{|E(\overline{G})|} 3^i \\
&\leq |E(\overline{G})| 3^{|E(\overline{G})|} \\
&\leq C 3^{|E(\overline{G})|} \\
&= C 3^k \\
&= C 3^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

ein exponentiell beschränktes Wachstum mit der Basis $\sqrt{3}$. Für den univariaten Fall ergibt sich nach Bemerkung 3.8 dieses Ergebnis mit der Basis $\sqrt{2}$. Die Gleichheit erhalten wir, weil alle $e \in E(\overline{G})$ paarweise keine gemeinsamen Ecken besitzen.
Betrachten wir dagegen die Gleichung aus Satz 4.23 beziehungsweise Korollar 4.25, so unterliegt die Komplexität $K(n,k)$ hier wegen $k < n$ und dem linearen Wachstum von n einer linearen Beschränkung.

Unter A.7 im Anhang erfolgt wiederum eine beispielhafte Berechnung des bivariaten sowie des univariaten chromatischen Polynoms von Graphen der Form aus Satz 4.23. Hierbei zeigt die Laufzeitmessung für den bivariaten Fall den zeitlichen Vorteil der Formel aus Satz 4.23 gegenüber den Rekursionsgleichungen nach ([1], S. 33) aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20. Wie man sieht, vergrößert sich dieser mit zunehmender Ecken- und Kantenanzahl. Für einen Graphen mit 30 Ecken beispielsweise liefert die Rekursion aus Bemerkung 3.20, welche für diesen Graphentyp schneller arbeitet als die Rekursion aus Satz 3.19, nach einer Stunde noch immer kein Ergebnis, wohingegen wir dieses mittels Satz 4.23 nach etwa 14 Sekunden erhalten, welches wir allerdings, ebenso wie die Abbildung des Graphen selbst, nicht mit ausgeben. Auch beim Vergleich des Ergebnisses aus Korollar 4.25 mit der Implementierung des univariaten chromatischen Polynoms durch ([20], S. 210 f.) sehen wir einen zeitlichen Vorteil der Methode aus Satz 4.23.

Es folgt nun der aus kombinatorischen Gründen schon ein wenig aufwendiger zu untersuchende Graphentyp $K_{3,\ldots,3}$.

Satz 4.27 *Es sei $G = (V,E)$ der vollständig k-partite Graph $K_{\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k-mal}}$. Dann gilt*

$$P(G;x,y) \;=\; \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\sum_{t=0}^{i}\binom{i}{t}3^{i-t}\sum_{l=0}^{3k-2i-t}\binom{3k-2i-t}{l}(x-y)^{3k-2i-t-l}\,y^{\underline{i+l}}\,.$$

Beweis:
Wir verwenden Satz 4.3 mit

$$|\Pi_I(K_{3,3,\ldots,3})| \;=\; \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\sum_{t=0}^{i}\binom{i}{t}3^{i-t}$$

sowie für jedes $\pi_{i,t} \in \Pi_I(K_{3,3,\ldots,})$ wegen

$$\begin{aligned}|\pi_{i,t}| &= 3k-2i-t+(i-t)+t\\ &= 3k-i-t\end{aligned}$$

außerdem

$$|\{X \in \pi_{i,t}|\,|X|=1\}| \;=\; 3k-2i-t\,.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}P(K_{3,3,\ldots,3};x,y) &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\sum_{t=0}^{i}\binom{i}{t}3^{i-t}\sum_{l=0}^{3k-2i-t}\binom{3k-2i-t}{l}(x-y)^{l}\,y^{\underline{3k-i-t-l}}\\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\sum_{t=0}^{i}\binom{i}{t}3^{i-t}\sum_{l=0}^{3k-2i-t}\binom{3k-2i-t}{l}(x-y)^{3k-2i-t-l}\,y^{\underline{i+l}}\,.\end{aligned}$$

q.e.d.

Mithilfe von Satz 4.27 bestimmen wir nun das bivariate chromatische Polynom des Graphen $K_{3,3}$.

Beispiel 4.28 *Für den Graphen $G = K_{3,3}$ liefert die Berechnung*

$$\begin{aligned} P(G;x,y) &= \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}\sum_{t=0}^{i}\binom{i}{t}3^{i-t}\sum_{l=0}^{6-2i-t}\binom{6-2i-t}{l}(x-y)^{6-2i-t-l}\,y^{\underline{i+l}} \\ &= x^6-31y+42xy-33x^2y+18x^3y-9x^4y+36y^2-36xy^2+18x^2y^2-6y^3\ . \end{aligned}$$

Auch für diesen Graphentyp leiten wir den univariaten Fall her.

Korollar 4.29 *Für den Graphen $G = K_{\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k-mal}}$ aus Satz 4.27 gilt*

$$P(G;y) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\sum_{t=0}^{i}\binom{i}{t}3^{i-t}y^{\underline{3k-i-t}}\ .$$

Beweis:
Das Ergebnis erhalten wir aus Satz 4.27.
q.e.d.

Auch hier betrachten wir den Rechenaufwand genauer.

Bemerkung 4.30 *Für Satz 4.27 erhalten wir analog zu Bemerkung 4.26 folgendes Ergebnis. Es sei $H(n,k)$ mit $n = |V|$ die Anzahl aller unter Einsatz von Bemerkung 3.20 durchzuführenden Graphenoperationen. Es zeigt sich aufgrund der Beziehungen*

$$n = 3k$$

sowie

$$\begin{aligned} |E| &= \frac{3k\,(3k-1)}{2} - 3k \\ &= \frac{9k\,(k-1)}{2} \end{aligned}$$

und

$$|E(\overline{G})| = 3k$$

für den bivariaten Fall durch die Abschätzung

$$\begin{aligned} H(n,k) &\leq \sum_{i=1}^{|E(\overline{G})|} 3^i \\ &\leq |E(\overline{G})|3^{|E(\overline{G})|} \\ &\leq C3^{|E(\overline{G})|} \\ &= C3^{3k} \\ &= C3^{n} \end{aligned}$$

ein exponentiell beschränktes Wachstum mit der Basis 3. *Für den univariaten Fall ergibt sich gemäß Bemerkung 3.8 dasselbe Ergebnis stattdessen mit der Basis* 2.
Eine kleinere Basis lässt sich nicht finden, da offenbar für jeden einzelnen Block jeweils mehr als drei Graphenoperationen erforderlich sind. Da wir also für jeden der k *Blöcke jeweils mehr als einen Rekursionsschritt einplanen müssen, ergibt sich also*

$$H(n,k) \quad > \quad \sum_{i=1}^{k} 3^i$$

für den bivariaten Fall, während der univariate Fall abermals den Ersatz der Basis 3 *durch die Basis* 2 *erfordert.*
Dagegen unterliegt die Komplexität $K(n,k)$ *der Formel aus Satz 4.27 beziehungsweise Korollar 4.29 wegen* $k < n$ *und dem linearen Wachstum von* n *einer linearen Beschränkung.*

Auch hierzu sollen im Anhang unter A.8 Beispiele folgen. Wieder zeigt sich hier für den bivariaten Fall der zeitliche Vorteil bei der Verwendung von Satz 4.27 gegenüber den Rekursionsgleichungen nach ([1], S. 33) aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20. Der zeitliche Unterschied zwischen den Rekursionsgleichungen und der Formel aus Satz 4.27 wächst wiederum zusammen mit der Ecken-und Kantenanzahl. Dieses gilt auch für den univariaten Fall aus Korollar 4.29 im Vergleich zur Implementierung nach ([20], S. 210 f.). Für den bivariaten Fall können wir auch hier wieder erkennen, dass die Methode aus Satz 4.27 noch dann ein Ergebnis liefert, wenn der Graph bereits 60 Ecken und die entsprechenden Kanten umfasst, wofür wir lediglich etwa 72 Sekunden benötigen. Auf die Darstellung des Graphen sowie die Ausgabe des Polynoms verzichten wir jedoch aus Übersichtlichkeitsgründen. Dagegen erreichen wir mit der Rekursion aus Bemerkung 3.20, welche für diesen Graphentyp schneller arbeitet als die Rekursion aus Satz 3.19, selbst nach einer Stunde noch kein Resultat.

4.3 Möglichkeiten der Reduktion

Bei dem Versuch, das bivariate chromatische Polynom eines Graphen zu bestimmen, stellt sich häufig die Frage, ob man dabei auf bereits bekannte bivariate chromatische Polynome von anderen Graphen zurückgreifen kann. Dieses ist, wie wir bereits erfahren haben, etwa bei der Anwendung der Rekursionsformel nach ([1], S. 33) der Fall. Weil sich dieses Verfahren jedoch mit zunehmender Ecken- und Kantenanzahl als unverhältnismäßig aufwendig erweist, stellen wir hier einige weitere Ansätze vor. Dabei nutzen wir die Besonderheiten von Graphen mit bestimmten günstigen Eigenschaften aus, indem wir auf die entsprechenden Polynome von Teilgraphen zurückgreifen oder rekursiv auf andere Graphen derselben Art.

4.3.1 Splitgraphen

An dieser Stelle kommen wir noch einmal auf Splitgraphen zurück, zu welchen wir bereits zwei Spezialfälle betrachtet haben. Hier lassen wir nun stattdessen beliebige Splitgraphen zu und zeigen mit dem folgenden Satz, dass sich das bivariate chromatische Polynom eines solchen Graphen auf bivariate chromatische Polynome kleinerer Graphen reduzieren lässt.

Satz 4.31 *Es sei* $G = (V,E)$ *ein Splitgraph mit* $G_1 = K_k$ *und* $G_2 = \overline{K_s}$*, welcher die Eckenmenge* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *mit* $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ *besitzt. Weiter sei* $\Gamma(v)$ *die Menge* *aller unabhängigen Teilmengen von $V(G)$, die v enthalten. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P(G;x,y) &= \sum_{i=0}^{k} (x-y)^{k-i}\, y^{\underline{i}} \sum_{\{v_1,v_2,\ldots,v_i\}\subseteq V(G_1)} \\ &\quad \sum_{(I_1,I_2,\ldots,I_i)\in\Gamma(v_1)\times\Gamma(v_2)\times\ldots\times\Gamma(v_i) \text{ mit } I_l\cap I_m=\emptyset \text{ für alle } l,m\in\{1,2,\ldots,i\} \text{ mit } l\neq m} \\ &\quad P(\overline{K_s}-I_1-I_2-\ldots-I_i;x-i,y-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (x-y)^{k-i}\, y^{\underline{i}} \sum_{\{v_1,v_2,\ldots,v_i\}\subseteq V(G_1)} \\ &\quad \sum_{(I_1,I_2,\ldots,I_i)\in\Gamma(v_1)\times\Gamma(v_2)\times\ldots\times\Gamma(v_i) \text{ mit } I_l\cap I_m=\emptyset \text{ für alle } l,m\in\{1,2,\ldots,i\} \text{ mit } l\neq m} \\ &\quad (x-i)^{s-|I_1|-|I_2|-\ldots-|I_i|+i} \quad . \end{aligned}$$

Beweis:
Wir wenden auf G_1 Satz 4.1 an. Innerhalb des Graphen G_1 erlaubt jede Auswahl $\{v_1,v_2,\ldots,v_i\}$ lediglich die triviale unabhängige Partition $\{\{v_1\},\{v_2\},\ldots,\{v_i\}\}$. Somit müssen alle echten Farben in G_1 paarweise verschieden zueinander sein. Daher erhalten wir $(x-y)^{k-i}\, y^{\underline{i}}$ Möglichkeiten für G_1, die gewählten Ecken echt und die verbliebenen Ecken in G_1 unecht zu färben. Für die jeweiligen zugehörigen Färbungsmöglichkeiten von G_2 betrachten wir alle Möglichkeiten, Ecken aus $V(G_2)$ jeweils gleich zu färben wie die jeweils gewählten Ecken v_r mit $r=1,2,\ldots,i$. Die v_r sind paarweise verschieden echt gefärbt, daher auch die I_r, also muss gelten $I_l\cap I_m=\emptyset$ für alle $l,m\in\{1,2,\ldots,i\}$ mit $l\neq m$. Die bereits verwendeten Farben aus Y verwenden wir nicht für die übrigen Ecken in G_2, um unerlaubte Färbungen auszuschließen, da Nachbarschaften zwischen Ecken aus $V(G_1)$ und $V(G_2)$ im Allgemeinen existieren. Die erlaubten Fälle wurden bereits in der Auswahl der $(I_1,I_2,\ldots,I_i)$ berücksichtigt.
q.e.d.

Zur Veranschaulichung betrachten wir das Beispiel des in Abbildung 4.4 gezeigten Graphen.

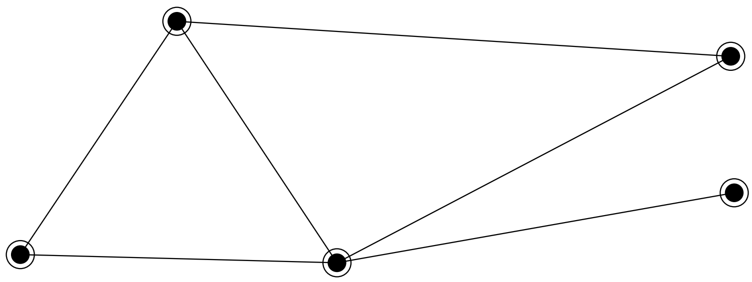


Abbildung 4.4: Splitgraph aus Beispiel 4.32

Beispiel 4.32 *Es sei G wie in Satz 4.31 mit $k = 3$ und $s = 2$. Wir setzen*

$$\begin{aligned}
V(G_1) &= V(K_3) = \{1,2,3\} \\
V(G_2) &= V(\overline{K_2}) = \{4,5\} \\
V(G) &= \{1,2,3,4,5\} \\
E(K_3) &= \Big\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \Big\} \\
E(\overline{K_2}) &= \emptyset \\
E(G) &= E(K_3) \cup \Big\{ \{1,4\}, \{2,4\}, \{2,5\} \Big\} .
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \Big\{ \{1\}, \{1,5\} \Big\} \\
\Gamma(2) &= \Big\{ \{2\} \Big\} \\
\Gamma(3) &= \Big\{ \{3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,4,5\} \Big\} \\
\Gamma(1) \times \Gamma(2) &= \Big\{ \Big(\{1\}, \{2\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{2\} \Big) \Big\} \\
\Gamma(1) \times \Gamma(3) &= \Big\{ \Big(\{1\}, \{3\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{3\} \Big), \Big(\{1\}, \{3,4\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{3,4\} \Big), \\
&\quad \Big(\{1\}, \{3,5\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{3,5\} \Big), \Big(\{1\}, \{3,4,5\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{3,4,5\} \Big) \Big\} \\
\Gamma(2) \times \Gamma(3) &= \Big\{ \Big(\{2\}, \{3\} \Big), \Big(\{2\}, \{3,4\} \Big), \Big(\{2\}, \{3,5\} \Big), \Big(\{2\}, \{3,4,5\} \Big) \Big\} \\
\Gamma(1) \times \Gamma(2) \times \Gamma(3) &= \Big\{ \Big(\{1\}, \{2\}, \{3\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{2\}, \{3\} \Big), \Big(\{1\}, \{2\}, \{3,4\} \Big), \\
&\quad \Big(\{1,5\}, \{2\}, \{3,4\} \Big), \Big(\{1\}, \{2\}, \{3,5\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{2\}, \{3,5\} \Big), \\
&\quad \Big(\{1\}, \{2\}, \{3,4,5\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{2\}, \{3,4,5\} \Big) \Big\} .
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
I_{\Gamma(1)} &= \Big\{ \{1\}, \{1,5\} \Big\} \\
I_{\Gamma(2)} &= \Big\{ \{2\} \Big\} \\
I_{\Gamma(3)} &= \Big\{ \{3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,4,5\} \Big\} \\
I_{\Gamma(1)} \times I_{\Gamma(2)} &= \Big\{ \Big(\{1\}, \{2\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{2\} \Big) \Big\} \\
I_{\Gamma(1)} \times I_{\Gamma(3)} &= \Big\{ \Big(\{1\}, \{3\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{3\} \Big), \Big(\{1\}, \{3,4\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{3,4\} \Big), \\
&\quad \Big(\{1\}, \{3,5\} \Big), \Big(\{1\}, \{3,4,5\} \Big) \Big\} \\
I_{\Gamma(2)} \times I_{\Gamma(3)} &= \Big\{ \Big(\{2\}, \{3\} \Big), \Big(\{2\}, \{3,4\} \Big), \Big(\{2\}, \{3,5\} \Big), \Big(\{2\}, \{3,4,5\} \Big) \Big\} \\
I_{\Gamma(1)} \times I_{\Gamma(2)} \times I_{\Gamma(3)} &= \Big\{ \Big(\{1\}, \{2\}, \{3\} \Big), \Big(\{1,5\}, \{2\}, \{3\} \Big), \Big(\{1\}, \{2\}, \{3,4\} \Big), \\
&\quad \Big(\{1,5\}, \{2\}, \{3,4\} \Big), \Big(\{1\}, \{2\}, \{3,5\} \Big), \Big(\{1\}, \{2\}, \{3,4,5\} \Big) \Big\} .
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen in die Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
P(G;x,y) &= (x-y)^3\,x^2 \\
&+ (x-y)^2\,y\left(3\,(x-1)^2+3\,(x-1)+1\right) \\
&+ (x-y)\,y^{\underline{2}}\left(3\,(x-2)^2+6\,(x-2)+3\right) \\
&+ y^{\underline{3}}\left((x-3)^2+3\,(x-3)+2\right) \\
&= x^5+4y-9xy+9x^2y-6x^3y-3y^2+4xy^2\ .
\end{aligned}$$

Zum univariaten Fall ergibt sich folgende Vereinfachung.

Korollar 4.33 *Es sei G der Graph aus in Satz 4.31. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
P(G;y) &= y^{\underline{k}} \sum_{\{v_1,v_2,\ldots,v_i\}\subseteq V(G_1)} \\
&\qquad \sum_{(I_1,I_2,\ldots,I_i)\in\Gamma(v_1)\times\Gamma(v_2)\times\ldots\times\Gamma(v_i)\ \text{mit}\ I_l\cap I_m=\emptyset\ \text{für alle}\ l,m\in\{1,2,\ldots,i\}\ \text{mit}\ l\neq m} \\
&\qquad (y-i)^{\underline{s-|I_1|-|I_2|-\ldots-|I_i|+i}}\ .
\end{aligned}$$

Beweis:
Die Behauptung folgt aus Satz 4.31.
q.e.d.

Nachdem wir in Satz 4.31 allgemeine Splitgraphen betrachtet haben, beschränken wir uns im folgenden Satz nochmals auf einen Spezialfall. Hier wird sich nämlich herausstellen, dass sich für einen solchen Fall eine Rekursionsgleichung aufstellen lässt, welche für die Bestimmung des bivariaten chromatischen Polynoms auf die bivariaten chromatischen Polynome von Graphen desselben Typs zurückgreift. Dabei soll ein solcher Graph folgendermaßen beschaffen sein: Wir betrachten zu zwei Graphen K_s und $\overline{K_k}$ mit $s\geq 1$ und $k\geq 1$ deren Join $K_s*\overline{K_k}$ und löschen genau t paarweise voneinander unabhängige Kanten, welche jeweils genau eine Ecke aus K_s und eine weitere Ecke aus $\overline{K_k}$ besitzen.

Satz 4.34 *Es sei der Graph $K_s*\overline{K_k}-\{e_1,e_2,\ldots,e_t\}$ gegeben mit $s\geq 1$, $k\geq 1$, $s\geq t$ und $k\geq t$, so dass für alle $i,j\in\{1,2,\ldots,t\}$ mit $i\neq j$ $e_i\cap e_j=\emptyset$ sowie für alle $e_i=\{v_1,v_2\}$ mit $i\in\{1,2,\ldots,t\}$ $v_1\in V(K_s)$ und $v_2\in V(\overline{K_k})$ gelte. Dann gilt die Rekursion*

$$\begin{aligned}
P(K_s*\overline{K_k}-\{e_1,e_2,\ldots,e_t\};x,y) &= P(K_s*\overline{K_k}-\{e_1,e_2,\ldots,e_{t-1}\};x,y) \\
&+ P(K_s*\overline{K_{k-1}}-\{e_1,e_2,\ldots,e_{t-1}\};x,y) \\
&- (x-y)\,P(K_{s-1}*\overline{K_{k-1}}-\{e_1,e_2,\ldots,e_{t-1}\};x,y)
\end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{aligned}
P(K_s*\overline{K_k}-\{e_1\};x,y) &= P(K_s*\overline{K_k};x,y)+P(K_s*\overline{K_{k-1}};x,y) \\
&- (x-y)\,P(K_{s-1}*\overline{K_{k-1}};x,y)\ .
\end{aligned}$$

Beweis:
Zum Beweis verwenden wir die Rekursionsbeziehung aus Satz 3.19, welche wir gemäß Bemerkung 3.20 so umstellen, dass wir von dem Graphen mit einer gelöschten Kante $e = \{v_1, v_2\}$ ausgehen:

$$\begin{aligned} P(G-e;x,y) &= P(G;x,y) + P(G/e;x,y) \\ &- (x-y)\,P(G-\{v_1,v_2\};x,y)\ . \end{aligned}$$

q.e.d.

Wir betrachten die Komplexität dieser Methode.

Bemerkung 4.35 *Für Satz 4.34 erhalten wir zunächst*

$$\begin{aligned} |V| &= |V(K_s)| + |V(\overline{K_k})| \\ &= s + k \end{aligned}$$

und

$$|E(K_s * \overline{K_k} - \{e_1, e_2, \ldots, e_t\})| = \frac{s\,(s-1)}{2} + sk - t$$

sowie wegen

$$t \le \min\{s,k\}$$

auch

$$\begin{aligned} |E(\overline{K_s * \overline{K_k} - \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}})| &= \frac{k\,(k-1)}{2} + t \\ &\le \frac{k\,(k-1)}{2} + \min\{s,k\}\ . \end{aligned}$$

Somit ergibt sich zunächst mithilfe der herkömmlichen Rekursionen aus Satz 3.19 beziehungsweise Bemerkung 3.20 wiederum eine exponentiell beschränkte Anzahl der jeweils benötigten Graphenoperationen $H_1(s,k,t)$ beziehungsweise $H_2(s,k,t)$. Dieses sehen wir durch die Abschätzungen

$$\begin{aligned} H_1(s,k,t) &\le \sum_{i=1}^{|E(K_s*\overline{K_k}-\{e_1,e_2,\ldots,e_t\})|} 3^i \\ &\le |E(K_s * \overline{K_k} - \{e_1, e_2, \ldots, e_t\})|\,3^{|E(K_s*\overline{K_k}-\{e_1,e_2,\ldots,e_t\})|} \\ &\le C3^{|E(K_s*\overline{K_k}-\{e_1,e_2,\ldots,e_t\})|} \\ &= C3^{\frac{s(s-1)}{2}+sk-t} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} H_2(s,k,t) &\le \sum_{i=1}^{|E(\overline{K_s*\overline{K_k}-\{e_1,e_2,\ldots,e_t\}})|} 3^i \\ &\le |E(\overline{K_s * \overline{K_k} - \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}})|\,3^{|E(\overline{K_s*\overline{K_k}-\{e_1,e_2,\ldots,e_t\}})|} \\ &\le C3^{|E(\overline{K_s*\overline{K_k}-\{e_1,e_2,\ldots,e_t\}})|} \\ &= C3^{\frac{k(k-1)}{2}+t} \\ &\le C3^{\frac{k(k-1)}{2}+\min\{s,k\}}\ . \end{aligned}$$

Wie Satz 3.6 und Bemerkung 3.8 zeigen, ergibt sich für den univariaten Fall hier stattdessen jeweils $C2^{\frac{s(s-1)}{2}+sk-t}$ *beziehungsweise* $C2^{\frac{k(k-1)}{2}+\min\{s,k\}}$.
Eine kleinere Basis lässt sich für keine der beiden Beziehungen finden, da wir bereits für den Teilgraphen K_s *mithilfe der Rekursion aus Satz 3.19 mindestens* $\frac{\lfloor s \rfloor}{2}$ *Rekursionsschritte benötigen, um erstmalig auf einen kantenlosen Graphen zu stoßen und das Verfahren aus Bemerkung 3.20 analog mindestens* $\frac{\lfloor k \rfloor}{2}$ *Rekursionsschritte erfordert, bis der erste vollständige Graph erscheint. Weil aus jedem Graphen im bivariaten Fall jeweils drei neue entstehen, ergibt sich hier offenbar*

$$H_1(s,k,t) \quad \geq \quad \sum_{i=1}^{\frac{\lfloor s \rfloor}{2}} 3^i$$

beziehungsweise

$$H_2(s,k,t) \quad \geq \quad \sum_{i=1}^{\frac{\lfloor k \rfloor}{2}} 3^i \; .$$

Im univariaten Fall ersetzen wir wiederum die Summanden 3^i *durch* 2^i.
Setzt man bei der Methode aus Satz 4.34 die für die Bestimmung des bivariaten chromatischen Polynoms des Graphen $K_s * \overline{K_k}$ *aus der Anfangsbedingung notwendige rekursionsfreie Darstellung als bekannt voraus, so erhalten wir für die Anzahl aller mittels Satz 4.34 benötigten Graphenoperationen* $K(s,k,t)$

$$\begin{aligned} K(s,k,t) &\leq 3C^t \\ &\leq 3C^{\min\{s,k\}} \end{aligned}$$

mit der Basis 3, *was wegen* $t \leq s$ *und* $t \leq k$ *zumeist von Vorteil ist. Im univariaten Fall erhalten wir dabei wiederum statt dem Faktor* 3 *den Faktor* 2.

Wie wir in Anhang A.9 veranschaulichen, stellt Satz 4.34 eine beachtliche zeitliche Verkürzung der Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms des Graphentyps aus Satz 4.34 im Vergleich zu den Rekursionsgleichungen nach ([1], S. 33) aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20 zur Verfügung. Wie der vierte Beispielgraph mit 50 Ecken zeigt, liefern die herkömmlichen beiden Rekursionen nach einer Stunde noch kein Ergebnis, während dieses mithilfe von Satz 4.34 bereits nach rund 32 Sekunden möglich ist. Allerdings verzichten wir hierbei auf die Abbildung des Graphen sowie auf die Ausgabe des Polynoms. Für den univariaten Fall zeigt der Vergleich der Methode aus Satz 4.34 mit der Implementierung nach ([20], S. 210 f.) ebenfalls einen zeitlichen Vorteil.
Wir stellen noch eine abschließende weitere Formel für allgemeine Splitgraphen vor.

Satz 4.36 *Es sei* $G = (V,E)$ *ein Splitgraph wie in Satz 4.31 mit* $V(G) = V(K_k) \cup V(\overline{K_s})$ *und* $V(K_k) \cap V(\overline{K_s}) = \emptyset$. *Weiter sei* $V(\overline{K_s}) = \{v_i \in V(G) | i = 1,\ldots,s\}$ *und für* $W \subseteq V(K_k)$ *sei* $N_{G[V(K_k)-W]}(v_i) = \{w \in V(K_k) - W | \{v_i, w\} \in E(G)\}$. *Dann gilt*

$$P(G;x,y) \quad = \quad \sum_{W \subseteq V(K_k)} (x-y)^{|W|} \, y^{\underline{k-|W|}} \prod_{i=1}^{s} \left(x - \left|N_{G[V(K_k)-W]}(v_i)\right|\right) \; .$$

Beweis:
Nach ([23], S. 197) gilt

$$P(G;y) \;=\; y^{\underline{k}} \prod_{i=1}^{s} (y - |N(v_i)|)$$

mit $N(v_i)$, weil es für den Teilgraphen K_k aufgrund seiner k paarweise zueinander adjazenten Ecken $y^{\underline{k}}$ Färbungsmöglichkeiten gibt und für jede der Ecken v_i des Teilgraphen $\overline{K_s}$ genau die Farben gewählt werden dürfen, welche noch nicht in $N(v_i)$ auftreten. Zusammen mit der Beziehung

$$P(G;x,y) \;=\; \sum_{W \subseteq V(G)} (x-y)^{|W|}\, P(G-W;y)$$

aus Bemerkung 3.15 folgt die Behauptung.
q.e.d.

Wir greifen nun bezogen auf Satz 4.36 nochmals das Beispiel 4.32 auf.

Beispiel 4.37 *Es sei die Situation aus Beispiel 4.32 gegeben. Wegen $W \subseteq V(K_3)$ betrachten wir*

$$\mathcal{P}(X) \;=\; \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, V(K_3)\Big\}\;.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
P(G;x,y) &= \sum_{W \in \mathcal{P}(X)} (x-y)^{|W|}\, y^{\underline{3-|W|}} \prod_{i=4}^{5} \Big(x - |N_{G[V(K_3-W)]}(i)|\Big) \\
&= y^{\underline{3}}\,(x-1)\,(x-2) + (x-y)\,y^{\underline{2}}\,\Big((x-1)^2 + x\,(x-1) + (x-1)\,(x-2)\Big) \\
&+ (x-y)^2\,y\,\Big(x^2 + x\,(x-1) + (x-1)^2\Big) + (x-y)^3\,x^2 \\
&= x^5 + 4y - 9xy + 9x^2y - 6x^3y - 3y^2 + 4xy^2\;.
\end{aligned}$$

Dieses Beispiel gibt Anlass zu der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 4.38 *Die Summen in den Sätzen 4.31 und 4.36 unterscheiden sich offensichtlich in ihrem für die Anwendung jeweils erforderlichen Aufwand erheblich voneinander. Daher gelingt die Bestimmung des bivariaten chromatischen Polynoms eines allgemeinen Splitgraphen mithilfe von Satz 4.36 sehr viel leichter als unter Verwendung von Satz 4.31.*

4.3.2 Bestimmte bipartite Graphen

Graphen, welche häufig im Mittelpunkt des Interesses der Forschung in der Graphentheorie stehen, sind bekanntlich die bipartiten Graphen. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass es ähnlich wie in Satz 4.34 möglich ist, eine Rekursionsbeziehung für spezielle bipartite Graphen anzugeben. Wir beginnen mit dem folgenden Satz.

Satz 4.39 *Es sei* $G = (V, E)$ *der Graph* $K_{r_1+r_2,s_1+r_2} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{r_2}\}$ *mit* $e_i \in E(G)$ *für* $i \in \{1, 2, \ldots, r_2\}$ *und* $e_i \cap e_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$*. Dann gilt die Rekursionsgleichung*

$$\begin{aligned} P(G; x, y) &= P(K_{r_1+r_2,s_1+r_2} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{r_2-1}\}\,; x, y) \\ &+ yP(K_{r_1+r_2-1,s_1+r_2-1} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{r_2-1}\}\,; x-1, y-1) \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung

$$P(K_{r_1+1,s_1+1} - \{e_1\}\,; x, y) = P(K_{r_1+1,s_1+1}; x, y) + yP(K_{r_1,s_1}; x-1, y-1)\ .$$

Eine Darstellung des bivariaten chromatischen Polynoms für einen Graphen der Form $K_{r,s}$ *liefert Beispiel 3.17 mit*

$$P(K_{r,s}; x, y) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (x-y)^{r-k} \sum_{j=0}^{k} S_{k,j}\, y^{\underline{j}}\, (x-j)^s\ .$$

Beweis:
$P(K_{r_1+r_2,s_1+r_2} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{r_2-1}\}\,; x, y)$ liefert genau all jene Eckenfärbungen des Graphen $K_{r_1+r_2,s_1+r_2} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{r_2}\}$, bei welchen v_1 und v_2 mit $\{v_1, v_2\} = e_{r_2}$ nicht in derselben Farbe aus Y gefärbt sind. Letztere Färbungen sind jedoch wegen $e_{r_2} \notin E(G)$ aber auch erlaubt, das sind genau $yP(K_{r_1+r_2-1,s_1+r_2-1} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{r_2-1}\}\,; x-1, y-1)$, da für alle $v \in V(G) \setminus \{v_1, v_2\}$ $v \in N(v_1) \cup N(v_2)$ gilt.
q.e.d.

Wir wenden uns nun einem Beispielgraphen zu, welcher in Abbildung 4.5 gezeigt wird.

Beispiel 4.40 *Es sei die Situation aus Satz 4.39 mit* $r_1 = 3$*,* $s_1 = 2$ *und* $r_2 = 2$ *gegeben sowie* $V(K_{3+2,2+2}) = \{v_{r_1 1}, v_{r_1 2}, v_{r_1 3}, v_{r_2 1}, v_{r_2 2}, w_{s_1 1}, w_{s_1 2}, w_{r_2 1}, w_{r_2 2}\}$ *mit* $e_1 = \{v_{r_2 1}, w_{r_2 1}\}$ *und* $e_2 = \{v_{r_2 2}, w_{r_2 2}\}$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & P(K_{3+2,2+2} - \{e_1, e_2\}\,; x, y) \\ = \;& P(K_{3+2,2+2} - \{e_1\}\,; x, y) + yP(K_{3+1,2+1} - \{e_1\}\,; x-1, y-1) \\ = \;& \Big(P(K_{3+2,2+2}; x, y) + yP(K_{3+1,2+1}; x-1, y-1)\Big) \\ + \;& y\Big(P(K_{3+1,2+1}; x-1, y-1) + (y-1)\, P(K_{3,2}; x-2, y-2)\Big) \\ = \;& \sum_{k=0}^{3+2} \binom{3+2}{k} (x-y)^{3+2-k} \sum_{j=0}^{k} S_{k,j}\, y^{\underline{j}}\, (x-j)^{2+2} \\ + \;& 2y \sum_{k=0}^{3+1} \binom{3+1}{k} (x-y)^{3+1-k} \sum_{j=0}^{k} S_{k,j}\, (y-1)^{\underline{j}}\, (x-1-j)^{2+1} \\ + \;& y\,(y-1) \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (x-y)^{3-k} \sum_{j=0}^{k} S_{k,j}\, (y-2)^{\underline{j}}\, (x-2-y)^2 \\ = \;& x^9 + 1649y - 2565xy + 2054x^2y - 1134x^3y + 485x^4y - 175x^5y + 56x^6y \\ - \;& 18x^7y - 2735y^2 + 3877xy^2 - 2753x^2y^2 + 1294x^3y^2 - 430x^4y^2 \\ + \;& 97x^5y^2 + 1223y^3 - 1385xy^3 + 693x^2y^3 - 174x^3y^3 - 138y^4 + 78xy^4\ . \end{aligned}$$

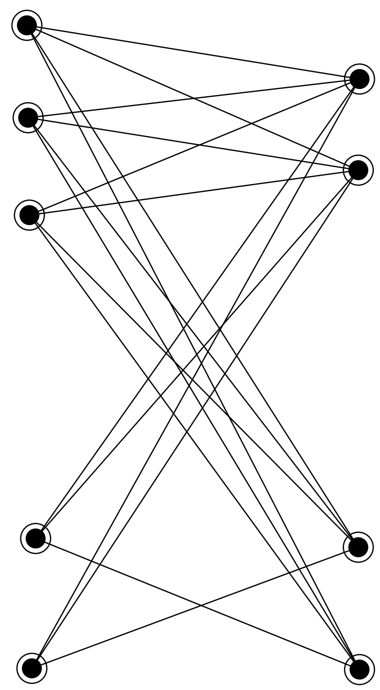


Abbildung 4.5: $K_{3+2,2+2} - \{e_1, e_2\}$ aus Beispiel 4.40

Es folgt nun eine Komplexitätsanalyse der Rekursionsbeziehung aus Satz 4.39.

Bemerkung 4.41 *In der Situation aus Satz 4.39 erhalten wir für $n = |V|$ und $|E|$ die Beziehungen*

$$n = r_1 + s_1 + 2r_2 \tag{4.2}$$

und

$$|E| = (r_1 + r_2)(s_1 + r_2) - r_2$$

sowie

$$|E(\overline{G})| = \frac{(r_1 + r_2)(r_1 + r_2 - 1)}{2} + \frac{(s_1 + r_2)(s_1 + r_2 - 1)}{2} + r_2 \,.$$

Es sei $H_1(r_1, r_2, s_1)$ beziehungsweise $H_2(r_1, r_2, s_1)$ die Anzahl aller Graphenoperationen, welche unter Verwendung der Rekursionsformel aus Satz 3.19 beziehungsweise aus Bemerkung 3.20 zur Bestimmung des bivariaten chromatischen Polynoms eines Graphen der Form

$K_{r_1+r_2,s_1+r_2} - \{e_1,\ldots,e_{r_2}\}$ erforderlich sind. Auf diese Weise ergibt sich jeweils

$$\begin{aligned} H_1(r_1,r_2,s_1) &\leq \sum_{i=1}^{|E|} 3^i \\ &= \sum_{i=1}^{(r_1+r_2)(s_1+r_2)-r_2} 3^i \\ &\leq (r_1+r_2)(s_1+r_2) - r_2 3^{(r_1+r_2)(s_1+r_2)-r_2} \\ &\leq C3^{(r_1+r_2)(s_1+r_2)-r_2} \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} H_2(r_1,r_2,s_1) &\leq \sum_{i=1}^{|E(\overline{G})|} 3^i \\ &\leq \sum_{i=1}^{\frac{(r_1+r_2)(r_1+r_2-1)}{2}+\frac{(s_1+r_2)(s_1+r_2-1)}{2}+r_2} 3^i \\ &\leq \left(\frac{(r_1+r_2)(r_1+r_2-1)}{2} + \frac{(s_1+r_2)(s_1+r_2-1)}{2} + r_2\right) \\ &\cdot\ 3^{\frac{(r_1+r_2)(r_1+r_2-1)}{2}+\frac{(s_1+r_2)(s_1+r_2-1)}{2}+r_2} \\ &\leq C3^{\frac{(r_1+r_2)(r_1+r_2-1)}{2}+\frac{(s_1+r_2)(s_1+r_2-1)}{2}+r_2}\ . \end{aligned}$$

Nach Satz 3.6 beziehungsweise Bemerkung 3.8 erhalten wir im univariaten Fall analog stattdessen $C2^{(r_1+r_2)(s_1+r_2)-r_2}$ beziehungsweise $C2^{\frac{(r_1+r_2)(r_1+r_2-1)}{2}+\frac{(s_1+r_2)(s_1+r_2-1)}{2}+r_2}$.
Eine kleinere Basis lässt sich nicht wählen, wie das Beispiel des Graphen $K_{2,2}$ mit $n=4$ zeigt. Hier benötigen wir mittels Satz 3.19 bis zum Erhalt des ersten kantenlosen Graphen zwei Rekursionsschritte und damit bereits $\sum_{i=1}^{\frac{\lfloor 4\rfloor}{2}} 3^i$ Graphenoperationen. Damit gilt also speziell für diesen Graphen im bivariaten Fall

$$H_1(2,0,2) \quad \geq \quad \sum_{i=1}^{\frac{\lfloor n\rfloor}{2}} 3^i\ . \tag{4.3}$$

Vewenden wir Bemerkung 3.20, so sind bis zum Erhalt des ersten vollständigen Graphen ebenfalls $\sum_{i=1}^{\frac{\lfloor 4\rfloor}{2}} 3^i$ Graphenoperationen notwendig, woraus speziell für den Graphen $K_{2,2}$

$$H_2(2,0,2) \quad \geq \quad \sum_{i=1}^{\frac{\lfloor n\rfloor}{2}} 3^i \tag{4.4}$$

folgt. Im univariaten Fall müssen wir dagegen in beiden Ergebnissen stattdessen jeweils über 2^i summieren.
Zum Vergleich sei $K(r_1,r_2,s_1)$ die Anzahl aller Graphenoperationen, welche nun unter Anwendung von Satz 4.39 zur Bestimmung des bivariaten chromatischen Polynoms eines Graphen der Form $K_{r_1+r_2,s_1+r_2} - \{e_1,\ldots,e_{r_2}\}$ erfoderlich sind. Pro Rekursionsschritt entstehen zwei

neue Graphen, jeder durch jeweils eine Kantenaddition oder zwei Eckenlöschungen, wobei wir letztere als Extraktion auffassen können. Insgesamt erhalten wir also

$$K(r_1, r_2, s_1) \quad \leq \quad C2^{r_2} \ .$$

Im univariaten Fall ergibt sich dasselbe Resultat, weil wir auch hier in jedem Rekursionsschritt immer beide Graphenoperationen benötigen.
Es zeigt sich zwar bereits bei der Methode aus Satz 4.39 ein exponentielles Wachstum, jedoch genügt hier im bivariaten Fall schon eine kleinere Basis als Obergrenze. Daher erweist sich die Methode aus Satz 4.39 hier als der schnellere Weg. Im univariaten Fall folgt aus den Beziehungen (4.2), (4.3) *und* (4.4) *eine zumindest nicht größere Komplexität der Methode aus Satz 4.39 gegenüber der Komplexität der Gleichungen aus Satz 3.6 und Bemerkung 3.8.*

Wie zu vielen bisher aufgeführten Sätzen sollen auch hierzu im Anhang unter A.10 Beispiele berechnet werden. Bezüglich des bivariaten chromatischen Polynoms ist der zeitliche Vorteil der Verwendung von Satz 4.39 gegenüber den Rekursionsbeziehungen nach ([1], S. 33) aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20 auch hier offensichtlich. Während diese Rekursionsgleichungen für einen Graphen wie in Satz 4.39 mit 60 Ecken nach einer Stunde noch kein Ergebnis liefern, kann die Methode aus Satz 4.39 dieses nach etwa 220 Sekunden leisten. Der Vergleich zwischen der Verwendung des Satzes 4.39 für den univariaten Fall und der Implementierung des univariaten chromatischen Polynoms nach ([20], S. 210 f.) zeigt ebenfalls einen großen zeitlichen Vorteil.

4.3.3 Vollständig k-partite Graphen

In diesem Abschnitt möchten wir speziell die vollständig bipartiten Graphen zu vollständig k-partiten Graphen für alle $k \geq 1$ verallgemeinern. Auch hier lässt sich das bivariate chromatische Polynom rekursiv berechnen.

Satz 4.42 *Es seien $r \geq 1$ und $k \geq 1$. Dann gilt für den Graphen $K_{\underbrace{r, r, \ldots, r}_{k\text{-mal}}}$ (analog zum bipartiten Fall bei ([9], S. 78)) die Rekursionsformel*

$$P(K_{\underbrace{r, r, \ldots, r}_{k\text{-mal}}}; x, y) \quad = \quad \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (x-y)^i \sum_{j=0}^{r-i} S_{r-i,j} y^{\underline{j}} P(K_{\underbrace{r, r, \ldots, r}_{(k-1)\text{-mal}}}; x-j, y-j)$$

mit der Anfangsbedingung

$$P(\overline{K_r}; x, y) = x^r \ .$$

Beweis:
Wir können den Graphen $K_{\underbrace{r, r, \ldots, r}_{k\text{-mal}}}$ offenbar folgendermaßen auffassen:

$$P(K_{\underbrace{r, r, \ldots, r}_{k\text{-mal}}}; x, y) \quad = \quad P(K_{\underbrace{r, r, \ldots, r}_{(k-1)\text{-mal}}} * \overline{K_r}; x, y) \ .$$

Aus den r Ecken des Graphen $\overline{K_r}$ wählen wir stets i Ecken aus, welche wir unecht färben möchten. Dabei durchlaufen wir von keiner Ecke bis hin zu allen Ecken jedes i als Anzahl der ausgewählten Ecken. Hierbei ist für jedes dieser i die Anzahl aller möglichen Auswahlen von i Ecken aus den r Ecken bekanntlich $\binom{r}{i}$. Die verbleibenden $r-i$ Ecken färben wir echt. Aufgrund ihrer paarweisen Unabhängigkeit dürfen wir sie beliebig partitionieren, um den Blöcken paarweise verschiedene echte Farben zuzuordnen. Hier ergeben sich als mögliche Anzahlen von Blöcken alle Zahlen von 0 bis $r-i$. Weil jede dieser Ecken zu jeweils allen Ecken des Graphen $K_{\underbrace{r,r,\ldots,r}_{(k-1)\text{-mal}}}$ adjazent ist, dürfen wir die bereits verwendeten echten Farben für den Graphen $K_{\underbrace{r,r,\ldots,r}_{(k-1)\text{-mal}}}$ nicht mehr verwenden. Damit ergibt sich schließlich

$$P(K_{\underbrace{r,r,\ldots,r}_{k\text{-mal}}};x,y) \quad = \quad \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(x-y)^i\sum_{j=0}^{r-i}S_{r-i,j}y^{\underline{j}}P(K_{\underbrace{r,r,\ldots,r}_{(k-1)\text{-mal}}};x-j,y-j)\ .$$

q.e.d.

Speziell für den univariaten Fall lässt sich folgendes Resultat festhalten.

Korollar 4.43 *Es sei die Situation aus Satz 4.42 gegeben. Dann gilt*

$$P(K_{\underbrace{r,r,\ldots,r}_{k\text{-mal}}};y) \quad = \quad \sum_{j=0}^{r}S_{r,j}y^{\underline{j}}P(K_{\underbrace{r,r,\ldots,r}_{(k-1)\text{-mal}}};y-j)$$

mit der Anfangsbedingung

$$P(\overline{K_r};y) = y^r\ .$$

Beweis:
Die Behauptung ergibt sich direkt aus Satz 4.42.
q.e.d.

Wir geben später in Bemerkung 4.47 eine Komplexitätsuntersuchung für einen allgemeineren Fall an und beginnen im Anhang unter A.11 für Satz 4.42 mit einigen Beispielberechnungen. Es zeigt sich bei dieser rekursiven Methode ein deutlicher Zeitvorteil gegenüber der Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms mithilfe der Rekursionsgleichungen nach ([1], S. 33) aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20. Für einen Graphen mit 40 Ecken und den entsprechenden Kanten liefern die Methoden aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20 selbst nach einer Stunde noch kein Ergebnis, während man dieses unter Verwendung von Satz 4.42 bereits nach etwa 162 Sekunden erzielt. Auch für das univariate chromatische Polynom erweist sich die Verwendung von Korollar 4.43 gegenüber der Implementierung nach ([20], S. 210 f.) als zeitlich vorteilhaft.

Mit derselben Methode wie in Satz 4.42 lässt sich die folgende Verallgemeinerung beweisen.

Satz 4.44 *Es seien $t \geq 1$ und $n_i \geq 1$ für alle $i \in \{1,2,\ldots,t\}$. Dann gilt für den Graphen $K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}$ (auch hier wieder analog zum bipartiten Fall bei ([9], S. 78)) die Rekursionsdarstellung*

$$P(K_{n_1,n_2,\ldots,n_t};x,y) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n_t}\binom{n_t}{i}(x-y)^i\sum_{j=0}^{n_t-i}S_{n_t-i,j}y^{\underline{j}}P(K_{n_1,n_2,\ldots,n_{t-1}};x-j,y-j)$$

mit der Anfangsbedingung

$$P(\overline{K_{n_1}}; x, y) = x^{n_1} \ .$$

Beweis:
Wir können den Graphen $K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}$ offenbar folgendermaßen auffassen:

$$P(K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}; x, y) \quad = \quad P(K_{n_1,n_2,\ldots,n_{t-1}} * \overline{K_{n_t}}; x, y) \ .$$

Aus den n_t Ecken des Graphen $\overline{K_{n_t}}$ wählen wir stets i Ecken aus, welche wir unecht färben möchten. Dabei durchlaufen wir von keiner Ecke bis hin zu allen Ecken jedes i als Anzahl der ausgewählten Ecken. Hierbei ist für jedes dieser i die Anzahl aller möglichen Auswahlen von i Ecken aus den n_t Ecken bekanntlich $\binom{n_t}{i}$. Die verbleibenden $n_t - i$ Ecken färben wir echt. Aufgrund ihrer paarweisen Unabhängigkeit dürfen wir sie beliebig partitionieren, um den Blöcken paarweise verschiedene echte Farben zuzuordnen. Hier ergeben sich als mögliche Anzahlen von Blöcken alle Zahlen von 0 bis $n_t - i$. Weil jede dieser Ecken zu jeweils allen Ecken des Graphen $K_{n_1,n_2,\ldots,n_{t-1}}$ adjazent ist, dürfen wir die bereits verwendeten echten Farben für den Graphen $K_{n_1,n_2,\ldots,n_{t-1}}$ nicht mehr verwenden. Damit ergibt sich schließlich

$$P(K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}; x, y) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n_t} \binom{n_t}{i} (x-y)^i \sum_{j=0}^{n_t - i} S_{n_t - i, j}\, y^{\underline{j}} P(K_{n_1,n_2,\ldots,n_{t-1}}; x-j, y-j) \ .$$

q.e.d.

An dieser Stelle veranschaulichen wir die Situation an folgendem Beispiel.

Beispiel 4.45 *Es sei der Graph $K_{2,2,3}$ gegeben. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
& P(K_{2,2,3}; x, y) \\
= \quad & \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} (x-y)^i \sum_{j=0}^{3-i} S_{3-i,j}\, y^{\underline{j}} P(K_{2,2}; x-j, y-j) \\
= \quad & \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} (x-y)^i \sum_{j=0}^{3-i} S_{3-i,j}\, y^{\underline{j}} \\
& \left(\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} (x-j-y+j)^k \sum_{l=0}^{2-k} S_{2-k,l}\, (y-j)^{\underline{l}}\, P(\overline{K_2}; x-j-l, y-j-l) \right) \\
= \quad & x^7 + 284y - 376xy + 256x^2y - 121x^3y + 46x^4y - 16x^5y \\
- \quad & 366y^2 + 410xy^2 - 216x^2y^2 + 62x^3y^2 + 84y^3 - 48xy^3 \ .
\end{aligned}$$

Auch hier ergänzen wir eine kurze Betrachtung des univariaten Falls.

Korollar 4.46 *Aus der Situation gemäß Satz 4.44 folgt*

$$P(K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}; y) \quad = \quad \sum_{j=0}^{n_t} S_{n_t,j}\, y^{\underline{j}} P(K_{n_1,n_2,\ldots,n_{t-1}}; y-j)$$

mit der Anfangsbedingung

$$P(\overline{K_{n_1}}; y) = y^{n_1} \ .$$

Beweis:
Wir setzen in Satz 4.44 $x = y$.
q.e.d.

Für Satz 4.44 und damit auch für Satz 4.42 zeigen wir nun den zeitlichen Vorteil bei der Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms gegenüber der Rekursion aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20.

Bemerkung 4.47 *Für den Graphen aus Satz 4.44 gilt für $|V| = n$ selbstverständlich*

$$n \ = \ \sum_{i=1}^{t} n_i \tag{4.5}$$

und offensichtlich auch

$$|E| \ = \ \sum_{i=1}^{t-1} n_i \sum_{j=i+1}^{t} n_j$$

sowie

$$|E(\overline{G})| \ = \ \sum_{i=1}^{t} \frac{n_i\,(n_i - 1)}{2} \ .$$

Damit können wir die Komplexität $H_1(n_1, \ldots, n_t, t)$ beziehungsweise $H_2(n_1, \ldots, n_t, t)$ der Methode aus Satz 3.19 beziehungsweise Bemerkung 3.20 im bivariaten Fall folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
H_1(n_1, \ldots, n_t, t) \ &\leq \ \sum_{i=1}^{|E|} 3^i \\
&\leq \ \sum_{i=1}^{\sum_{i=1}^{t-1} n_i \sum_{j=i+1}^{t} n_j} 3^i \\
&\leq \ \sum_{i=1}^{t-1} n_i \sum_{j=i+1}^{t} n_j 3^{\sum_{i=1}^{t-1} n_i \sum_{j=i+1}^{t} n_j} \\
&\leq \ C 3^{\sum_{i=1}^{t-1} n_i \sum_{j=i+1}^{t} n_j} \\
&\leq \ C 3^{\frac{t(t-1)}{2} n^2} \\
&= \ C 3^{\frac{t(t-1)}{2} \left(\sum_{i=1}^{t} n_i\right)^2}
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
H_2(n_1,\ldots,n_t,t) &\leq \sum_{i=1}^{|E(\overline{G})|} 3^i \\
&\leq \sum_{i=1}^{\sum_{i=1}^{t}\frac{n_i(n_i-1)}{2}} 3^i \\
&\leq \sum_{i=1}^{t} \frac{n_i\,(n_i-1)}{2} 3^{\sum_{i=1}^{t}\frac{n_i(n_i-1)}{2}} \\
&\leq C3^{\sum_{i=1}^{t}\frac{n_i(n_i-1)}{2}} \\
&\leq C3^{t\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= C3^{t\frac{\sum_{i=1}^{t} n_i\left(-1+\sum_{i=1}^{t} n_i\right)}{2}}.
\end{aligned}$$

Gemäß Satz 3.6 beziehungsweise Bemerkung 3.8 ergibt sich hier für das univariate chromatische Polynom $C2^{\frac{t(t-1)}{2}\left(\sum_{i=1}^{t} n_i\right)^2}$ *beziehungsweise* $C2^{t\frac{\sum_{i=1}^{t} n_i\left(-1+\sum_{i=1}^{t} n_i\right)}{2}}$.
Um zu zeigen, dass man im bivariaten Fall für die Abschätzug von $H_1(n_1,\ldots,n_t,t)$ *keine kleinere Basis wählen kann, betrachten wir den Beispielgraphen* $K_{1,1}$ *mit* $n = 2$. *Es sind ein Rekursionschritt und damit drei Graphenoperationen notwendig, um ausschließlich kantenlose Graphen zu erhalten, womit wir für diesen Graphen*

$$H_1(1,1,2) \quad \geq \quad \sum_{i=1}^{\frac{\lfloor n\rfloor}{2}} 3^i$$

gezeigt haben.
Untersuchen wir nun $H_2(n_1,\ldots,n_t,t)$, *so ergibt sich für den Graphen* $K_{\underbrace{2,\ldots,2}_{t-mal}}$ *mit* $t \geq 1$ *und* $n = 2t$

$$H_2(\underbrace{2,\ldots,2}_{t-mal},t) \quad = \quad \sum_{i=1}^{\frac{\lfloor t\rfloor}{2}} 3^i$$

wie in Bemerkung 4.26. Wir sehen also, dass sich zu unseren Abschätzungen keine kleinere Basis finden lässt. Im univariaten Fall gelten diese Überlegungen jeweils analog mit den Summanden 2^i.
Betrachten wir die Methode aus Satz 4.44, so haben wir die Komplexität der Stirlingzahlen zweiter Art mit zu berücksichtigen. Diese lassen sich zum einen etwa nach ([36], S. 19) rekursiv durch die Relation

$$S_{r,k} \quad = \quad S_{r-1,k-1} + kS_{r-1,k}$$

für $(r,k) \neq (0,0)$ *mit* $S_{r,0} = 0$ *und* $S_{r,r} = 1$ *bestimmen. Falls* $r < k$, $r < 0$ *oder* $k < 0$ *ist, so setzt man* $S_{r,k} = 0$.

Eine rekursionsfreie Alternative bietet die Gleichung

$$S_{r,k} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \frac{i^{r-1}}{(i-1)!(k-i)!}$$

mit $r, k > 0$, *welche etwa in ([36], S. 20) angegeben wird.*
Verwendet man die Rekursionsgleichung, so ist hierbei ein exponentielles Wachstum des Rechenaufwandes zu erwarten. Allerdings bringt diese Methode unter Verwendung der Rememberprogrammierung in Mathematica, *wie es etwa in ([13], S. 36 ff.) anhand der rekursiven Bestimmung der Fibonaccizahlen demonstriert wird, eine nur geringe Komplexität mit sich. Die Komplexität der zweiten Methode erweist sich dagegen aufgrund der Rekursionsfreiheit der Gleichung als noch besser, weshalb wir nun diese verwenden und die Anzahl aller notwendigen Rechenoperationen bestimmen*[1]. *Zunächst benötigen wir zur Berechnung von* $S_{r,k}$ *insgesamt*

$$(k-1) + 4k$$

Additionen. Hiervon stammen $k-1$ *Additionen aus der Summe über* k *Summanden, während innerhalb eines jeden Summanden jeweils* 4 *Additionen erforderlich sind, welche zusammen* $4k$ *Additionen liefern. Weiterhin erhalten wir*

$$4k + (r-2)\,k + \sum_{j=1}^{k-1} 2\,(k-j-1) + \sum_{j=2}^{k} (j-2)$$

Multiplikationen. Hierbei liefert jeder der k *Summanden* 4 *davon durch die Multiplikationen* $(-1)\cdot 1$ *und* $(-1)^{(\ldots)} \cdot \frac{(\ldots)}{(\ldots)}$, *die Division und die Multiplikation* $(\ldots)! \cdot (\ldots)!$ *im Nenner. Weiterhin ergeben sich in jedem der* k *Summanden innerhalb der Potenz* i^{r-1} *weitere* $r-2$ *Multiplikationen, was über alle Summanden zu* $k\,(r-2)$ *führt, und schließlich innerhalb der Terme* $(-1)^{k-i}$, $(i-1)!$ *und* $(k-i)!$ *über alle Summanden zusammen* $\sum_{j=1}^{k-1} 2\,(k-j-1) + \sum_{j=2}^{k} (j-2)$ *Multiplikationen.*
Insgesamt erhalten wir mit $k \leq r$ *für die Anzahl* $L(S_{r,k})$ *aller Rechenoperationen, welche zur Bestimmung von* $S_{r,k}$ *erforderlich sind, also die Abschätzung*

$$\begin{aligned} L(S_{r,k}) &\leq (k-1) + 4k + 4k + (r-2)\,k + \sum_{j=1}^{k-1} 2\,(k-j-1) + \sum_{j=1}^{k-1} (j-1) \\ &= \frac{3k^2}{2} + kr + \frac{5k}{2} + 2 \\ &\leq \frac{5r^2}{2} + \frac{5r}{2} + 2 \\ &< Cr^2\,. \end{aligned}$$

Man beachte die Gültigkeit von $r < n$, *was man anhand des Auftretens der Stirlingzahlen in Satz 4.44 leicht erkennt. Unter der Voraussetzung, dass Rechenoperationen ein deutlich geringeres Maß an Komplexität mit sich bringen als Graphenoperationen, erhalten wir nun*

[1] Eine einfachere Methode geht iterativ vor und benötigt daher keine Fakultätsberechnungen, wie man in ([15], Abschnitt 1.9) nachlesen kann.

für die Anzahl $K(n, n_1, \ldots, n_t, t)$ aller unter Verwendung von Satz 4.44 notwendigen Graphen- und Rechenoperationen

$$K(n, n_1, \ldots, n_t, t) \quad \leq \quad C\,(t-1)\,n^4 \,.$$

Hierbei werden die Rechenoperationen mit der Variablen n und die Graphenoperationen mit der Variablen t identifiziert. Auf diese Weise ergibt sich offenbar lediglich ein polynomiell beschränktes Wachstum der Anzahl aller hierbei notwendigen Rechenperationen, was auch für den univariaten Fall aus Korollar 4.46 gilt, während die Graphenoperationen sogar nur linear beschränkt sind. Aufgrund der Gleichung (4.5) *können wir $K(n, n_1, \ldots, n_t, t)$ auch ohne die Abhängigkeit von t in der Form $K(n, n_1, \ldots, n_t)$ betrachten. Somit erhalten wir*

$$K(n, n_1, \ldots, n_t) \quad \leq \quad Cn^5$$

und damit insgesamt ein nur polynomiell beschränktes Wachstum von $K(n, n_1, \ldots, n_t)$, wobei ein Faktor n^4 in n^5 für die bereits erwähnte geringere Komplexität der Rechenoperationen steht. Insgesamt weist die Methode aus Satz 4.44 beziehungsweise Korollar 4.46 also gegenüber den Standardrekursionen einen deutlichen Komplexitätsvorteil auf.

4.3.4 Trenner in Graphen

Nachdem wir in den vorigen Abschnitten recht spezielle Graphentypen betrachet haben, wenden wir uns nun einem zumindest etwas allgemeineren Fall zu. Die einzige Bedingung, welche die im Folgenden behandelten Graphen erfüllen müssen, ist die, dass diese Graphen einen bestimmten vollständigen Graphen als Trenner besitzen. Der folgende Satz beginnt mit dem einfachsten Fall, nämlich mit Graphen, welche einen Graphen K_1 als Trenner enthalten.

Satz 4.48 *Es sei $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ mit $G_i \cap G_j = \{v\}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$ und ein $v \in V(G)$, das heißt, v sei eine Artikulation in G. Es sei $\Gamma(v)$ wie in Satz 4.31. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P(G; x, y) \quad &= \quad (x-y) \prod_{i=1}^{r} P(G_i - \{v\}\,; x, y) \\ &+ \quad y \sum_{I \in \Gamma(v)} \prod_{i=1}^{r} P(G_i - I; x-1, y-1)\,. \end{aligned}$$

Man beachte, dass G_i nicht zusammenhängend sein muss.

Beweis:
Die Ecke v lässt sich aus Z oder aus Y färben. Der erste Fall ist mit $(x-y) \prod_{i=1}^{r} P(G_i - \{v\}\,; x, y)$ Möglichkeiten trivial. Im zweiten Fall gibt es y Möglichkeiten, die Ecken aus I in einer einzigen echten Farbe zu färben. Für $V(G) - I$ bleiben dann $y-1$ echte Farben und $x-1$ Farben insgesamt zur Auswahl übrig.
q.e.d.

Hierzu betrachten wir den in Abbildung 4.6 dargestellten Graphen, dessen bivariates chromatisches Polynom wir in Beispiel 4.49 mithilfe von Satz 4.48 bestimmen.

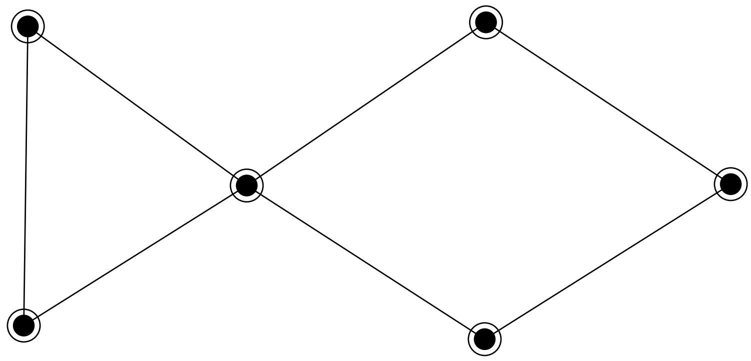


Abbildung 4.6: Graph aus Beispiel 4.49

Beispiel 4.49 *Es sei $r = 2$ und der Graph aus Abbildung 4.6 derart, dass $G_1 \cong C_3$ und $G_2 \cong C_4$ mit $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$ ist. Wir definieren die Ecken- und Kantenmengen folgendermaßen:*

$$\begin{aligned}
V(G_1) &= \{v, 1, 2\} \\
E(G_1) &= \Big\{ \{v, 1\}, \{v, 2\}, \{1, 2\} \Big\} \\
V(G_2) &= \{v, 3, 4, 5\} \\
E(G_2) &= \Big\{ \{v, 3\}, \{v, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\} \Big\} .
\end{aligned}$$

Weiterhin sei

$$\Gamma(v) = \Big\{ \{v\}, \{v, 4\} \Big\} .$$

Nach Satz 4.48 erhalten wir

$$\begin{aligned}
P(G; x, y) &= (x - y)\, P(G_1 - \{v\}; x, y) P(G_2 - \{v\}; x, y) \\
&+ y\Big(P(G_1 - \{v\}; x - 1, y - 1) P(G_2 - \{v\}; x - 1, y - 1) \\
&+ P(G_1 - \{v, 4\}; x - 1, y - 1) P(G_2 - \{v, 4\}; x - 1, y - 1)\Big) \\
&= (x - y)\, P(P_2; x, y) P(P_3; x, y) \\
&+ y\Big(P(P_2; x - 1, y - 1) P(P_3; x - 1, y - 1) \\
&+ P(P_2; x - 1, y - 1) P(\overline{K_2}; x - 1, y - 1)\Big) .
\end{aligned}$$

Nach ([9], S. 80) kennen wir

$$\begin{aligned}
P(P_2; x, y) &= x^2 - y \\
P(P_3; x, y) &= x^3 - 2xy + y .
\end{aligned}$$

Daraus folgt auch

$$\begin{aligned}
P(P_2; x - 1, y - 1) &= (x - 1)^2 - (y - 1) \\
&= x^2 - 2x - y + 2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P(P_3;x,y) &= (x-1)^3 - 2\,(x-1)\,(y-1) + (y-1) \\ &= x^3 - 3x^2 - 5x - 2xy + 3y - 4\ . \end{aligned}$$

Zudem gilt selbstverständlich wegen $\overline{K_2} \cong K_1 \cup K_1$ *mit* $K_1 \cap K_1 \neq \emptyset$ *nach Satz 3.19*

$$P(\overline{K_2};x-1,y-1) \;=\; (x-1)^2\ .$$

Schließlich fassen wir die oben genannten bivariaten chromatischen Polynome zu folgendem Endergebnis zusammen:

$$P(G;x,y) \;=\; x^6 - 6y + 12xy - 13x^2y + 10x^3y - 7x^4y + 9y^2 - 14xy^2 + 10x^2y^2 - 2y^3\ .$$

Eine Vereinfachung von Satz 4.48 ergibt sich für den Spezialfall $G = \bigcup_{i=1}^{k} K_{r_i}$ mit der Bedingung $K_{r_l} \cap K_{r_m} = \{v\}$ für alle $l,m \in \{1,2,\ldots,k\}$ mit $l \neq m$, so dass wir hier nicht mit der Menge $\Gamma(v)$ zu arbeiten brauchen. Daraus ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 4.50 *Es sei* $G = \bigcup_{i=1}^{k} K_{r_i}$ *mit* $K_{r_l} \cap K_{r_m} = \{v\}$ *für alle* $l,m \in \{1,2,\ldots,k\}$ *mit* $l \neq m$ *und ein* $v \in V(G)$*, das heißt,* v *sei eine Artikulation in* G*. Dann gilt*

$$P(G;x,y) \;=\; (x-y)\prod_{i=1}^{k} P(K_{r_i-1};x,y) + y\prod_{i=1}^{k} P(K_{r_i-1};x-1,y-1)\ .$$

Beweis:
Die Behauptung folgt aus Satz 4.48.
q.e.d.

Enthält ein Trenner außer einer einzelnen Ecke noch eine weitere, so lässt sich genau danach unterscheiden, ob der Trenner ein K_2 oder ein $\overline{K_2}$ ist. Wir wenden uns zunächst dem erstgenannten Fall zu.

Satz 4.51 *Es sei* $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ *mit* $G_i \cap G_j = K_2$ *für alle* $i,j \in \{1,\ldots,r\}$ *mit* $i \neq j$ *und* $\bigcap_{i=1}^{r} G_i = K_2$*, das heißt,* K_2 *mit* $V(K_2) = \{v_1,v_2\}$ *sei ein Trenner in* G*. Es seien* $\Gamma(v_1)$ *und* $\Gamma(v_2)$ *wie in Satz 4.31. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P(G;x,y) &= (x-y)^2\prod_{i=1}^{r} P(G_i - \{v_1,v_2\}\,;x,y) \\ &+ (x-y)\,y \sum_{I_1\in\Gamma(v_1)} \prod_{i=1}^{r} P(G_i - (I_1 \cup \{v_2\})\,;x-1,y-1) \\ &+ (x-y)\,y \sum_{I_2\in\Gamma(v_2)} \prod_{i=1}^{r} P(G_i - (I_2 \cup \{v_1\})\,;x-1,y-1) \\ &+ y\,(y-1) \\ &\qquad \sum_{(I_1,I_2)\in\Gamma(v_1)\times\Gamma(v_2)\ \mathit{mit}\ I_1\cap I_2=\emptyset}\ \prod_{i=1}^{r} P(G_i - (I_1,I_2)\,;x-2,y-2)\ . \end{aligned}$$

Beweis:
Die Ecken aus $\bigcap_{i=1}^{r} G_i = K_2$ lassen sich beide aus $Z = X \setminus Y$ färben, hierfür gibt es demnach genau $(x-y)^2 \prod_{i=1}^{r} P(G_i - \{v_1, v_2\}\,; x, y)$ Möglichkeiten.
Es lässt sich weiterhin auch je eine Ecke aus Y und die andere Ecke aus Z färben. Dieselbe echte Farbe wie die der bereits echt gefärbten Ecke dürfen wir an alle Ecken vergeben, welche untereinander sowie zu der bereits echt gefärbten Ecke unabhängig sind. Für alle übrigen Ecken bleiben $y-1$ echte und $x-1$ Farben insgesamt übrig.
Färben wir beide Ecken aus $\bigcap_{i=1}^{r} G_i = K_2$ (zwangsläufig verschieden) echt, so betrachten wir alle $(I_1, I_2) \in \Gamma(v_1) \times \Gamma(v_2)$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und färben beide dieser Mengen verschieden echt, das ergibt $y\,(y-1)$ Möglichkeiten der Farbwahl. Für die übrigen Ecken bleiben $y-2$ echte und $x-2$ Farben insgesamt.
q.e.d.

Als Trenner betrachten wir im Folgenden auch den Graphen $\overline{K_2}$, was sich als ein wenig komplizierter erweist.

Satz 4.52 *Es sei $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ mit $G_i \cap G_j = \overline{K_2}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$ und $\bigcap_{i=1}^{r} G_i = \overline{K_2}$, das heißt, $\overline{K_2}$ mit $V(\overline{K_2}) = \{v_1, v_2\}$ sei ein Trenner in G. Es seien $\Gamma(v_1)$ und $\Gamma(v_2)$ wie in Satz 4.31. Weiterhin sei $\Gamma(v_1, v_2)$ die Menge aller unabhängigen $W \subseteq V(G)$ mit $v_1, v_2 \in W$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
P(G; x, y) \quad &= \quad (x-y)^2 \prod_{i=1}^{r} P(G_i - \{v_1, v_2\}\,; x, y) \\
&+ \quad (x-y)\, y \sum_{I_1 \in \Gamma(v_1) - \{v_2\}} \prod_{i=1}^{r} P(G_i - (I_1 \cup \{v_2\})\,; x-1, y-1) \\
&+ \quad (x-y)\, y \sum_{I_2 \in \Gamma(v_2) - \{v_1\}} \prod_{i=1}^{r} P(G_i - (I_2 \cup \{v_1\})\,; x-1, y-1) \\
&+ \quad y \sum_{I_{1,2} \in \Gamma(v_1, v_2)} \prod_{i=1}^{r} P(G_i - I_{1,2}; x-1, y-1) \\
&+ \quad y\,(y-1) \sum_{(I_1, I_2) \in (\Gamma(v_1) - \{v_2\}) \times (\Gamma(v_2) - \{v_1\}) \text{ mit } I_1 \cap I_2 = \emptyset} \\
&\qquad \prod_{i=1}^{r} P(G_i - (I_1, I_2)\,; x-2, y-2)\,.
\end{aligned}$$

Beweis:
Der Beweis wird analog zum Beweis von Satz 4.51 geführt. Allerdings müssen wir wegen $\{v_1, v_2\} \notin E(G)$ statt der Mengen $\Gamma(v_1)$ und $\Gamma(v_2)$ die Mengen $\Gamma(v_1) - \{v_2\}$ und $\Gamma(v_2) - \{v_1\}$ betrachten. Außerdem dürfen wir nun zusätzlich v_1 und v_2 in derselben echten Farbe färben. Daher müssen wir den Summanden $y \sum_{I_{1,2} \in \Gamma(v_1, v_2)} \prod_{i=1}^{r} P(G_i - I_{1,2}; x-1, y-1)$ hinzunehmen.
q.e.d.

Zur Veranschaulichung ziehen wir den in Abbildung 4.7 gezeigten Graphen heran.

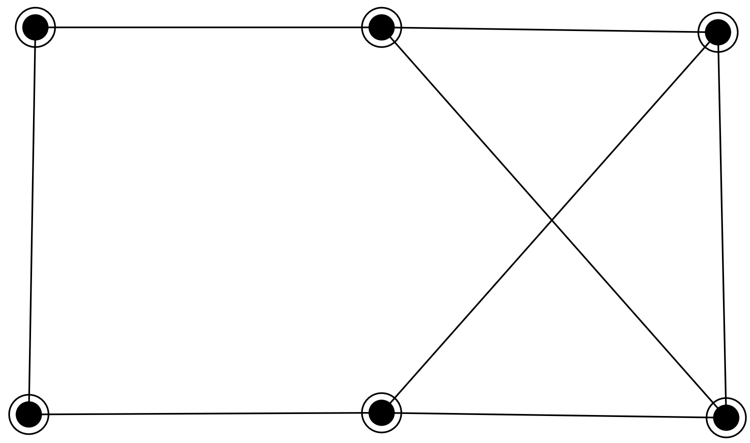


Abbildung 4.7: Graph aus Beispiel 4.53

Beispiel 4.53 *Es sei $G = G_1 \cup G_2$ mit $G_1 \cap G_2 = \overline{K_2}$. Weiterhin sei*

$$\begin{aligned}
V(\overline{K_2}) &= \{u, v\} \\
E(\overline{K_2}) &= \emptyset \\
V(G_1) &= \{u, v, 1, 2\} \\
E(G_1) &= \Big\{ \{u,1\}, \{1,2\}, \{v,2\} \Big\} \\
V(G_2) &= \{u, v, 3, 4\} \\
E(G_2) &= \Big\{ \{u,3\}, \{u,4\}, \{3,4\}, \{v,3\}, \{v,4\} \Big\},
\end{aligned}$$

so dass $G_1 = C_4 - \{u, v\} = P_4$ beziehungsweise $G_2 = K_4 - \{u, v\}$ sei. Dann erhalten wir die untenstehende Tabelle.

$\Gamma(u) - \{v\}$	$\Big\{ \{u\}, \{u,2\} \Big\}$
$\Gamma(v) - \{u\}$	$\Big\{ \{v\}, \{v,2\} \Big\}$
$\Gamma(u) - \{v\} \times \Gamma(v) - \{u\}$	$\Big\{ \Big(\{u\}, \{v\} \Big), \Big(\{u\}, \{v,1\} \Big), \Big(\{u,2\}, \{v\} \Big), \Big(\{u,2\}, \{v,1\} \Big) \Big\}$
$\Gamma(u, v)$	$\Big\{ \{u, v\} \Big\}$

Das Einsetzen in die Formel aus Satz 4.52 ergibt

$$\begin{aligned}
P(G; x, y) &= (x-y)^2 \, P(P_2; x, y)^2 \\
&+ 2\,(x-y)\,y\,\big(P(P_2; x-1, y-1)^2 + P(K_1; x-1, y-1) P(P_2; x-1, y-1)\big) \\
&+ yP(P_2; x-1, y-1)^2 \\
&+ y\,(y-1)\,\Big(P(P_2; x-2, y-2)^2 + 2P(K_1; x-2, y-2) P(P_2; x-2, y-2) \\
&+ P(\emptyset; x-2, y-2) P(P_2; x-2, y-2)\Big) \\
&= x^6 - 14y + 20xy - 17x^2y + 12x^3y - 8x^4y + 19y^2 - 24xy^2 + 14x^2y^2 - 3y^3 \;,
\end{aligned}$$

wobei wir die bivariaten chromatischen Polynome der beteiligten Graphen bereits aus Satz 3.19 und Beispiel 4.49 kennen.

Schließlich ist es auch möglich, generell für ein beliebiges $s \geq 2$ zu einem Graphen G mit einem Teilgraphen K_s als Trenner eine Rekursionsformel anzugeben. Der nächste Satz zeigt uns jedoch, wie der Aufwand mit wachsendem s steigt.

Satz 4.54 *Es sei $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ mit $G_i \cap G_j = K_s$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$ und $\bigcap_{i=1}^{r} G_i = K_s$, das heißt, K_s sei ein Trenner in G. Es sei $\Gamma(v)$ für $v \in V(G)$ definiert wie in Satz 4.31. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P(G; x, y) \quad = \quad & \sum_{k=0}^{s} (x-y)^{s-k}\, y^{\underline{k}} \sum_{\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(\bigcap_{i=1}^{r} G_i)} \\ & \sum_{(I_1, I_2, \ldots, I_k) \in \Gamma(v_1) \times \Gamma(v_2) \times \ldots \times \Gamma(v_k) \text{ mit } I_l \cap I_m = \emptyset \text{ für } l \neq m} \\ & \prod_{i=1}^{r} P\big(G_i - \bigcap_{j=1}^{r} G_j - \bigcup_{t=1}^{k} I_t; x-k, y-k\big) \ . \end{aligned}$$

Hierbei sei der Summand für $k = 0$ zu verstehen als $(x-y)^s \prod_{i=0}^{r} P(G_i - \bigcap_{j=1}^{r} G_j; x, y)$.

Beweis:
Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 4.1.
q.e.d.

Zunächst halten wir die Situation für den Fall $x = y$ fest. Allerdings werden wir in Satz 4.58 eine Darstellung des bivariaten chromatischen Polyoms für diesen Fall nach ([25], S. 100) vorstellen, welche sich besser eignet als das folgende Korollar 4.55.

Korollar 4.55 *Für die Situation aus Satz 4.54 gilt*

$$\begin{aligned} P(G; y) \quad = \quad & y^{\underline{s}} \sum_{\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(\bigcap_{i=1}^{r} G_i)} \\ & \sum_{(I_1, I_2, \ldots, I_k) \in \Gamma(v_1) \times \Gamma(v_2) \times \ldots \times \Gamma(v_k) \text{ mit } I_l \cap I_m = \emptyset \text{ für } l \neq m} \\ & \prod_{i=1}^{r} P\big(G_i - \bigcap_{j=1}^{r} G_j - \bigcup_{t=1}^{s} I_t; y-s\big) \ . \end{aligned}$$

Beweis:
Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 4.54.
q.e.d.

Es besteht jedoch auch für einen Graphen mit einem allgemeineren Trenner die Möglichkeit einer Reduktion, wie wir unten zeigen werden. Zuvor benötigen wir hierfür eine Definition.

Definition 4.56 *([25], S. 99 f.).*
Es sei G ein Graph und H ein Teilgraph von G. Weiterhin sei $\pi \in \Pi_I(H)$. Dann erhalten wir bezüglich π einen neuen Graphen G_π folgendermaßen: Jeden Block $X \in \pi$ ersetzen wir durch eine Ecke und fügen zwischen jedem Paar dieser neuen Ecken jeweils eine Kante ein, sofern beide Ecken noch nicht adjazent zueinander sind. Außerdem bestehe zwischen allen Eckenpaaren $v \in V(H)$ und $w \in V(G-H)$ genau dann eine Adjazenz, wenn w in G zu einer Ecke aus dem Block $X \in \pi$ mit $v \in X$ adjazent war.

Beispiel 4.57 *Es sei nochmals der Graph aus Beispiel 4.53 und Abbildung 4.7 gegeben. Dann gilt für $H = \overline{K_2}$*

$$\Pi_I(H) \quad = \quad \Big\{ \Big\{ \{u\}, \{v\} \Big\}, \Big\{ \{u,v\} \Big\} \Big\} .$$

Abbildung 4.8 zeigt die daraus resultierenden Graphen $G_{\{\{u\},\{v\}\}}$ und $G_{\{\{u,v\}\}}$.

Abbildung 4.8: $G_{\{\{u\},\{v\}\}}$ und $G_{\{\{u,v\}\}}$ aus Beispiel 4.57

Hiermit können wir nun für einen zusammenhängenden Graphen mithilfe eines Trenners von beliebiger Form das bivariate chromatische Polynom bestimmen, wobei sich verschiedene Ansätze betrachten lassen.

Satz 4.58 *Es sei $G = G^1 \cup G^2$ mit $G^1 \cap G^2 = H$. Für $W \subseteq V(H)$ sei $P^{H-W}\big(\big(G^i - W\big)_\pi; x, y\big)$ die Anzahl der verallgemeinerten echten Färbungen von $G^i - W$ unter der Bedingung, dass alle Ecken aus $(H-W)_\pi$ echt gefärbt seien. Für $W \subseteq V(K_{|\pi|})$ definieren wir $P^{K_{|\pi|}-W}(G^i_\pi; x, y)$ entsprechend. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P(G;x,y) &= \sum_{W \subseteq V(G)} (x-y)^{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_I(G[V(H)-W])} \frac{P\big(\big(G^1-W\big)_\pi; y\big) P\big(\big(G^2-W\big)_\pi; y\big)}{y^{\underline{|\pi|}}} \\ &= \sum_{W \subseteq V(H)} (x-y)^{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_I(G[V(H)-W])} \frac{P^{H-W}\big(\big(G^1-W\big)_\pi; x, y\big) P^{H-W}\big(\big(G^2-W\big)_\pi; x, y\big)}{y^{\underline{|\pi|}}} . \end{aligned}$$

Für den Fall $x \neq y$ gilt außerdem

$$P(G;x,y) \quad = \quad \sum_{\pi \in \Pi_I(G[V(H)])} \sum_{W \subseteq V(K_{|\pi|})} \frac{P^{K_{|\pi|}-W}(G^1_\pi; x, y) P^{K_{|\pi|}-W}(G^2_\pi; x, y)}{(x-y)^{|W|} \, y^{\underline{|\pi|-|W|}}}$$

beziehungsweise für den Fall $x = y$ nach ([25], S. 100)

$$P(G;y) \quad = \quad \sum_{\pi \in \Pi_I(G[V(H)])} \frac{1}{y^{|\pi|}} P(G^1_\pi;y) P(G^2_\pi;y) \; .$$

Beweis:
Die erste Gleichung folgt aus der Kombination der beiden folgenden Gleichungen:
Zunächst gilt nach Bemerkung 3.15

$$P(G;x,y) \quad = \quad \sum_{W \subseteq V(G)} (x-y)^{|W|} P(G-W;y) \; .$$

Wie bereits erwähnt, gilt nach ([25], S. 100)

$$P(G;y) \quad = \quad \sum_{\pi \in \Pi_I(G[V(H)])} \frac{1}{y^{|\pi|}} P(G^1_\pi;y) P(G^2_\pi;y) \; .$$

Diese Überlegung ergibt sich folgendermaßen: Zunächst wähle man wie in ([25], S. 97 f.) G_1 und G_2 derart, dass diese Graphen keine gemeinsame Kante im Trenner $(V(H), E(G[V(H)]))$ besitzen. Das weitere Vorgehen besteht gemäß ([25], S. 99 f.) darin, aus jeder unabhängigen Partition des Trenners wie in Definition 4.56 jeweils einen vollständigen Graphen zu konstruieren. Damit lässt sich die Situation aus Bemerkung 3.5 anwenden, wonach für einen Graphen $G = G_1 \cup G_2$ mit $G_1 \cap G_2 = K_r$ und $r \geq 1$

$$P(G;y) \quad = \quad \frac{P(G_1;y)P(G_2;y)}{P(K_r;y)}$$

gilt.
Für die zweite Gleichung summieren wir statt über alle $W \subseteq V(G)$ lediglich über alle $W \subseteq V(H)$. Um die unechten Farben in $V(G-H)$ zu berücksichtigen, müssen wir statt den univariaten chromatischen Polynomen nun die bivariaten chromatischen Polynome von $G_i - W$ für $i \in \{1,2\}$ heranziehen, jedoch unter der Einschränkung, dass die Ecken aus $(H-W)_\pi$ echt gefärbt seien.
Für den letzten Schritt vertauschen wir die Summationsreihenfolge sowie die Rollen von W und π.
q.e.d.

Hieraus ergibt sich unmittelbar ein einfacher Spezialfall.

Korollar 4.59 *Es sei die Situation aus Satz 4.58 für den Fall $H \cong K_r$ mit $r = \left|V(G^1) \cap V(G^2)\right|$ gegeben. Dann gilt*

$$P(G;x,y) \quad = \quad \sum_{W \subseteq V(K_r)} \frac{P^{K_r - W}(G^1;x,y) P^{K_r - W}(G^2;x,y)}{(x-y)^{|W|}\, y^{r-|W|}}$$

Beweis:
Weil $\Pi_I(K_r) = \Big\{ \{ \{v_1\}, \dots, \{v_r\} \} \Big\}$ mit $V(K_r) = \{v_1, \dots, v_r\}$ gilt, folgt die Behauptung.
q.e.d.

Um die etwas unschönen Beschränkungen an die chromatischen Polynome in der Beziehung aus Satz 4.58 zu umgehen, bietet sich der folgende Ansatz an, welcher sich dem allgemein bekannten Prinzip der Inklusion-Exklusion bedient (siehe hierzu etwa [7], S. 12 f.). Diese Methode wurde bereits in Bemerkung 3.9 für die allgemeine Darstellung des univariaten chromatischen Polynoms verwendet, ohne jedoch speziell Trenner-Eigenschaften zu nutzen. Setzt man die Möbius-Inversion als bekannt voraus, so lässt sich das Prinzip der Inklusion-Exklusion damit leicht beweisen (siehe hierzu etwa [24], S. 173 f.). Wir werden hier jedoch einen alternativen Beweis mittels vollständiger Induktion zeigen.

Satz 4.60 *Es sei die Situation aus Satz 4.58 gegeben. Dann gilt*

$$P(G;x,y) = \sum_{W \subseteq V(H)} (x-y)^{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_I(G[V(H)-W])} \frac{\prod_{i=1}^{2} \sum_{\sigma \subseteq \pi} (-1)^{|\sigma|} (x-y)^{|\sigma|} P\big(\big(G^i - W - \sigma\big)_{\pi-\sigma}; x,y\big)}{y^{|\pi|}} .$$

Beweis:
Wir zeigen

$$P^{(H-W)}\big(\big(G^i - W\big)_\pi; x,y\big) = \sum_{\sigma \subseteq \pi} (-1)^{|\sigma|} (x-y)^{|\sigma|} P\big(\big(G^i - W - \sigma\big)_{\pi-\sigma}; x,y\big)$$

durch vollständige Induktion nach $|\pi|$.
Einen induktiven Beweis des Prinzips der Inklusion-Exklusion findet man zum Beispiel in ([7], S. 12 f.). Wir werden ihn hier jedoch auf unsere Anwendung bezogen durchführen.
Induktionsanfang: $|\pi| = 1$.
In diesem Fall ist $(H-W)_\pi \cong K_1$, und es sei $V(K_1) = \{v\}$.
Wir könnten die Ecke v zunächst echt oder unecht färben. Unter der Einschränkung, sie stets echt färben zu müssen, bestimmen wir zunächst die Anzahl aller verallgemeinerten Färbungen von $\big(G^i - W\big)_\pi$ und subtrahieren die Anzahl aller verallgemeinerten Färbungen von $\big(G^i - W\big)_\pi$ unter der Bedingung, dass v unecht gefärbt ist:

$$\begin{aligned} P^{(H-W)}\big(\big(G^i - W\big)_\pi; x,y\big) &= P\big(\big(G^i - W\big)_\pi; x,y\big) - (x-y)\, P\big(\big(G^i - W - \pi\big); x,y\big) \\ &= (-1)^0 (x-y)^0 P\big(\big(G^i - W - \emptyset\big)_{\pi-\emptyset}; x,y\big) \\ &+ (-1)^1 (x-y)^1 P\big(\big(G^i - W - \pi\big)_{\pi-\pi}; x,y\big) \\ &= \sum_{\sigma \subseteq \pi} (-1)^{|\sigma|} (x-y)^{|\sigma|} P\big(\big(G^i - W - \sigma\big)_{\pi-\sigma}; x,y\big) . \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für $|\pi|$.

Induktionsschritt: $|\pi| \to |\pi| + 1$.
Es sei $\kappa \in \Pi_I(H-W)$ mit $|\kappa| = |\pi| + 1$. Wir wählen einen Block $\kappa_1 \in \kappa$ derart, dass

$\pi = \kappa - \{\kappa_1\}$ sei. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} P^{(H-W)}(\big(G^i - W\big)_\kappa ; x, y) &= P^{(H-W-\kappa_1)}(\big(G^i - W\big)_\kappa ; x, y) \\ &- (x-y)\, P^{(H-W-\kappa_1)}(\big(G^i - W - \kappa_1\big)_\kappa ; x, y) \\ &= P^{(H-W-\kappa_1)}(\Big(\big(G^i - W\big)_{\kappa_1}\Big)_\pi ; x, y) \\ &- (x-y)\, P^{(H-W-\kappa_1)}(\big(G^i - W - \kappa_1\big)_\pi ; x, y) . \end{aligned}$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt nun

$$\begin{aligned} P^{(H-W)}(\big(G^i - W\big)_\kappa ; x, y) &= \sum_{\sigma \subseteq \pi} (-1)^{|\sigma|} (x-y)^{|\sigma|} P(\Big(\big(G^i - W\big)_{\kappa_1} - \sigma\Big)_{\pi-\sigma} ; x, y) \\ &- (x-y) \sum_{\sigma \subseteq \pi} (-1)^{|\sigma|} (x-y)^{|\sigma|} P(\big(G^i - W - \kappa_1 - \sigma\big)_{\pi-\sigma} ; x, y) \\ &= \sum_{\sigma \subseteq \pi} (-1)^{|\sigma|} (x-y)^{|\sigma|} P(\Big(\big(G^i - W\big)_{\kappa_1} - \sigma\Big)_{\pi-\sigma} ; x, y) \\ &+ \sum_{\sigma \subseteq \pi} (-1)^{|\sigma|+1} (x-y)^{|\sigma|+1} P(\big(G^i - W - \kappa_1 - \sigma\big)_{\pi-\sigma} ; x, y) \\ &= \sum_{\sigma \subseteq \pi} (-1)^{|\sigma|} (x-y)^{|\sigma|} P(\big(G^i - W - \sigma\big)_{\pi-\sigma} ; x, y) . \end{aligned}$$

q.e.d.

Zur Verdeutlichung greifen wir auf ein oben bereits angeführtes Beispiel zurück.

Beispiel 4.61 *Es sei nochmals die Situation aus Beispiel 4.53 und Abbildung 4.7 mit* $H = \overline{K_2}$ *und* $V(H) = \{u, v\}$ *gegeben. Dann erhalten wir*

$$\mathcal{P}(V(H)) = \Big\{\emptyset, \{u\}, \{v\}, \{u, v\}\Big\}$$

und damit

$$\begin{aligned} \Pi_I(G[V(H)] - \emptyset) &= \Big\{\Big\{\{u\}, \{v\}\Big\}, \Big\{\{u, v\}\Big\}\Big\} \\ \Pi_I(G[V(H)] - \{u\}) &= \Big\{\{v\}\Big\} \\ \Pi_I(G[V(H)] - \{v\}) &= \Big\{\{u\}\Big\} \\ \Pi_I(G[V(H)] - \{u, v\}) &= \Big\{\emptyset\Big\} . \end{aligned}$$

Für das Einsetzen in die Gleichung aus Satz 4.60 beachte man folgende Isomorphien:

$$\begin{aligned}
(P_4)_{\{\{u\},\{v\}\}} &\cong C_4 \\
(P_3)_{\{\{u\}\}} &\cong (P_3)_{\{\{v\}\}} \cong P_3 \\
(P_2)_{\{\emptyset\}} &\cong P_2 \\
(K_4 - e)_{\{\{u\},\{v\}\}} &\cong K_4 \\
(K_3)_{\{\{u\}\}} &\cong (K_3)_{\{\{v\}\}} = K_3 \\
(K_2)_{\{\emptyset\}} &\cong K_2 \\
(P_4)_{\{\{u,v\}\}} &\cong C_3 \\
(K_4 - e)_{\{\{u,v\}\}} &\cong K_3 \, .
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
P(G;x,y) &= \Bigg(\Big(P(C_4;x,y) - 2\,(x-y)\,P(P_3;x,y) + (x-y)^2\,P(P_2;x,y)\Big) \\
&\quad \Big(P(K_4;x,y) - 2\,(x-y)\,P(K_3;x,y) + (x-y)^2\,P(K_2;x,y)\Big)\frac{1}{y^2} \\
&+ \Big(P(C_3;x,y) - (x-y)\,P(P_2;x,y)\Big) \\
&\quad \Big(P(K_3;x,y) - (x-y)\,P(K_2;x,y)\Big)\frac{1}{y}\Bigg) \\
&+ 2\,(x-y) \\
&\quad \Bigg(\Big(P(P_3;x,y) - (x-y)\,P(P_2;x,y)\Big) \\
&\quad \Big(P(K_3;x,y) - (x-y)\,P(K_2;x,y)\Big)\frac{1}{y}\Bigg) \\
&+ (x-y)^2 \\
&\quad \Big(P(P_2;x,y)P(K_2;x,y)\Big) \, .
\end{aligned}$$

Selbstverständlich treffen die folgenden Beziehungen zu:

$$\begin{aligned}
K_3 &\cong C_3 \\
K_2 &\cong P_2 \, .
\end{aligned}$$

Nach ([9], S. 80) gilt zudem

$$\begin{aligned}
P(C_3;x,y) &= x^3 - 3xy + 2y \\
P(C_4;x,y) &= x^4 - 4x^2y + 4xy + 2y^2 - 3y \\
P(P_3;x,y) &= x^3 - 2xy + y
\end{aligned}$$

sowie nach Beispiel 3.17

$$\begin{aligned}
P(K_4;x,y) &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (x-y)^k \, y^{\underline{4-k}} \\
&= x^4 - 6y + 8xy - 6x^2y + 3y^2 \, .
\end{aligned}$$

Hieraus und mithilfe des bivariaten chromatischen Polynoms $P(P_2; x, y) = x^2 - y$ aus Beispiel 4.49 folgt schließlich

$$P(G; x, y) \;=\; x^6 - 14y + 20xy - 17x^2y + 12x^3y - 8x^4y + 19y^2 - 24xy^2 + 14x^2y^2 - 3y^3 \;.$$

Im Allgemeinen lassen sich Graphen jedoch mehrfach trennen, so dass wir in einem gegebenen Graphen statt eines Trenners zumeist mehrere Trenner finden können. Besonders unkompliziert gestalten sich dabei Graphen mit vollständigen Trennern, weil hier die Notwendigkeit entfällt, die voneinander getrennten Teilgraphen mühsam zu modifizieren wie in Satz 4.58. Wir werden sehen, dass sich insbesondere chordale Graphen derart zerlegen lassen. Hierfür benötigen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 4.62 *([8], S. 337).*
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph, T ein Baum und $X = (X_t)_{t \in V(T)}$. Eine Baumzerlegung (T, X) von G ist folgendermaßen definiert:

1. *$V = \bigcup_{t \in V(T)} X_t$.*
2. *Zu jeder Kante $e \in E$ gibt es ein $t \in V(T)$, so dass X_t beide Ecken von e enthält.*
3. *Für $t_1, t_2, t_3 \in V(T)$ gilt: Wenn t_2 auf einem Weg in T mit Anfangspunkt t_1 und Endpunkt t_3 liegt, dann gilt $X_{t_1} \cap X_{t_3} \subseteq X_{t_2}$.*

Der folgende Satz zeigt die Bedeutung von Definition 4.62 für chordale Graphen.

Satz 4.63 *([8], S. 344).*
Ein Graph G ist genau dann chordal, wenn er eine Baumzerlegung (T, X) mit $X = (X_t)_{t \in V(T)}$ derart besitzt, dass die Graphen $G[X_t]$ vollständig sind.

Dieser Satz wird in ([8], S. 344) per Induktion nach der Eckenzahl von G bewiesen.
Wir ziehen ihn nun heran, um das bivariate chromatische Polynom eines chordalen Graphen, welcher eine bestimmte Art der Baumzerlegung gemäß Satz 4.63 besitzt, unter Verwendung kleinerer Graphen zu bestimmen.

Satz 4.64 *Es sei $G = (V, E)$ ein chordaler Graph, welcher eine Baumzerlegung (T, X) mit $V(T) = I$ und $X = (X_i)_{i \in I}$ derart besitzt, dass für jedes $i \in I$ die Eckenmenge X_i eine Clique induziert und für alle paarweise voneinander verschiedenen $i_1, i_2, j_1, j_2 \in I$ die Beziehung $V(G[X_{i_1}] \cap G[X_{j_1}]) \cap V(G[X_{i_2}] \cap G[X_{j_2}]) = \emptyset$ erfüllt sei. Wir bezeichnen für jede Teilmenge $W \subseteq \bigcup_{i,j \in I \text{ mit } i \neq j} V(G[X_i] \cap G[X_j])$ die Anzahl aller verallgemeinerten echten Eckenfärbungen von $G[X_i]$–W unter der Bedingung, dass alle Ecken aus $G[X_i] \cap G[X_{i+1}]$–W echt gefärbt seien und hierbei jeder Block von $\pi \in \Pi_I(\bigcup_{i,j \in I \text{ mit } i \neq j}(G[X_i] \cap G[X_j] - W))$ gemäß $(\bigcup_{i,j \in I \text{ mit } i \neq j}(G[X_i] \cap G[X_j] - W))_\pi$ dieselbe echte Farbe erhält, analog zu der Definition in Satz 4.58 mit $P^{\bigcup \cap - W}(G[X_i]–W; x, y)$. Dann gilt*

$$P(G; x, y) \;=\; \sum_{W \subseteq \bigcup_{i,j \in I \text{ mit } i \neq j} V(G[X_i] \cap G[X_j])} (x - y)^{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_I(\bigcup_{i,j \in I \text{ mit } i \neq j}(G[X_i] \cap G[X_j]) - W)} \frac{1}{y^{\underline{|\pi|}}}$$
$$\prod_{i=1}^{|I|} P^{\bigcup \cap - W}(G[X_i]–W; x, y) \;.$$

Bevor wir zum Beweis übergehen, erwähnen wir den Graphen $K_2 * \overline{K_4}$ als Beispiel eines chordalen Graphen mit einer nicht gestattenten Baumzerlegung, nämlich $X_1 = V(K_3), X_2 = V(K_3), X_3 = V(K_3), X_4 = V(K_3)$ und $X_5 = V(K_2)$ mit $T = S_5$.

Beweis:
Wir führen eine vollständige Induktion nach $|I|$ durch.

Induktionsanfang: $|I| = 2$.
Dieser Fall wurde schon in Satz 4.58 behandelt. An dieser Stelle handelt es sich zudem um den Spezialfall, dass aufgrund der Cliqueneigenschaften der $V(X_i)$ und $V(X_j)$ für alle $i, j \in I$ auch $V(G[X_i] \cap G[X_j])$ eine Clique induziert und der Graph $G[X_i] \cap G[X_j]$ somit vollständig ist. Daher gilt für $\pi \in \Pi_I(\bigcup_{i,j\in I \text{ mit } i\neq j}(G[X_i] \cap G[X_j]))$ stets $(G[X_i] \cap G[X_j])_\pi = G[X_i] \cap G[X_j]$.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein I mit $|I| \geq 2$ für einen wie im Satz geforderten Graphen $H = \bigcup_{i=1}^{|I|} G[X_i]$. Es sei $G = H \cup G[X_{|I|+1}]$ ebenfalls ein wie im Satz geforderter Graph.

Induktionsschritt: $|I| \to |I| + 1$.
Wir wenden Satz 4.58 auf $G = H \cup G[X_{|I|+1}]$ an. Es seien $I = \{1, 2, \ldots, k-1\}$ und $I \cup \{k\} = \{1, 2, \ldots, k-1, k\}$. Dann ist $|I \cup \{k\}| = |I| + 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
P(G;x,y) &= \sum_{W'\subseteq V(H\cap G[X_{|I|+1}])} (x-y)^{|W'|} \sum_{\pi'\in\Pi_I(H\cap G[X_{|I|+1}-W'])} \frac{1}{y^{|\pi'|}} \\
&\quad P^{H\cap G[X_{|I|+1}]-W'}(H-W';x,y)P^{H\cap G[X_{|I|+1}]-W'}(G[X_{|I|+1}]-W';x,y) \\
&= \sum_{W'\subseteq V(H\cap G[X_{|I|+1}])} (x-y)^{|W'|} \sum_{\pi'\in\Pi_I(H\cap G[X_{|I|+1}-W'])} \frac{1}{y^{|\pi'|}} \\
&\quad \Big(\sum_{W''\subseteq\bigcup_{i,j\in I \text{ mit } i\neq j} V(G[X_i]\cap G[X_j])} (x-y)^{|W''|} \sum_{\pi''\in\Pi_I(\bigcup_{i,j\in I \text{ mit } i\neq j}(G[X_i]\cap G[X_j])-W'')} \frac{1}{y^{|\pi''|}} \\
&\quad \cdot \Big(\prod_{i=1}^{|I|} P^{\bigcup\bigcap-W''}(G[X_i]-W'';x,y)\Big) P^{H\cap G[X_{|I|+1}]-W'}(G[X_{|I|+1}]-W';x,y)\Big) .
\end{aligned}$$

Da für alle $i_1, i_2, j_1, j_2 \in I$ nach der Voraussetzung die Beziehung $V(G[X_{i_1}] \cap G[X_{j_1}]) \cap V(G[X_{i_2}] \cap G[X_{j_2}]) = \emptyset$ gilt, folgt offenbar auch $W' \cap W'' = \emptyset$ sowie für alle $\sigma' \in \pi'$ und $\sigma'' \in \pi''$ $\sigma' \cap \sigma'' = \emptyset$. Wir setzen $W = W' \cup W''$. Weiterhin gilt o. B. d. A. zudem $H \cap G[X_{|I|+1}] = G[X_{|I|}] \cap G[X_{|I|+1}]$. Ansonsten nummeriere man die Elemente aus I um. Unter diesen Bedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
P(G;x,y) &= \sum_{W\subseteq\bigcup_{i,j\in I\cup\{k\} \text{ mit } i\neq j} V(G[X_i]\cap G[X_j])} \\
&\quad \sum_{\pi\in\Pi_I(\bigcup_{i,j\in I\cup\{k\} \text{ mit } i\neq j}(G[X_i]\cap G[X_j])-W)} (x-y)^{|W|}\frac{1}{y^{|\pi|}} \\
&\quad \prod_{i=1}^{|I|+1} P^{\bigcup\bigcap-W}(G[X_i]-W;x,y) .
\end{aligned}$$

q.e.d.

Abschließend betrachten wir auch hierzu den univariaten Fall.

Korollar 4.65 *Für die Situation aus Satz 4.64 gilt*

$$\begin{aligned} P(G;y) &= \sum_{\pi\in\Pi_I(\bigcup_{i,j\in I \ mit \ i\neq j}(G[X_i]\cap G[X_j]))} \frac{1}{y^{|\pi|}} \\ & \prod_{i=1}^{|I|} P^{\bigcup\bigcap}(G[X_i];y)\ . \end{aligned}$$

Beweis:
Die Behauptung ergibt sich aus Satz 4.64.
q.e.d.

4.4 Ableitungsformeln

In Satz 3.22 haben wir bereits einen Zusammenhang zwischen der partiellen Ableitung des bivariaten chromatischen Polynoms nach x und bivariaten chromatischen Polynomen kleinerer Graphen kennengelernt. Nun untersuchen wir einige Graphentypen genauer daraufhin. Unsere Überlegungen beginnen wir mit dem bereits vorgestellten Sterngraph.

Satz 4.66 *Es sei für $N \geq 1$ der Stern $S_{N+1} = (V,E)$ gegeben. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x} P(S_{N+1};x,y) \quad = \quad NP(S_N;x,y) + x^N$$

beziehungsweise

$$P(S_N;x,y) \quad = \quad \frac{\frac{\partial}{\partial x}P(S_{N+1};x,y) - x^N}{N}\ .$$

Beweis:
Nach Satz 3.22 gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P(S_{N+1};x,y) &= \sum_{v\in V} P(S_{N+1}-v;x,y) \\ &= NP(S_N;x,y) + P(\overline{K_N};x,y) \\ &= NP(S_N;x,y) + x^N\ . \end{aligned}$$

q.e.d.

Neben den Sternen lohnt es sich auch, einen anderen bereits bekannten Graphentyp zu untersuchen. Hier zeigt sich erneut ein Zusammenhang zwischen der partiellen Ableitung nach x des bivariaten chromatischen Polynoms eines solchen Graphen und dem bivariaten chromatischen Polynom desselben Graphentyps mit weniger Ecken.

Satz 4.67 *Es sei $r \geq 1$ und $k \geq 2$. Dann gilt für den Graphen $K_{\underbrace{r,\ldots,r}_{k\text{-}mal}} = (V,E)$*

$$\frac{\partial}{\partial x} P(K_{\underbrace{r,\ldots,r}_{k\text{-}mal}}; x, y) = rk \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} (x-y)^i \sum_{j=0}^{r-1-i} S_{r-1-i,j}\, y^{\underline{j}} P(K_{\underbrace{r,\ldots,r}_{(k-1)\text{-}mal}}; x-j, y-j)\ .$$

Beweis:
Nach Satz 3.22 gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} P(K_{\underbrace{r,\ldots,r}_{k\text{-mal}}}; x, y) &= \sum_{v \in V} P(K_{\underbrace{r,\ldots,r}_{k\text{-mal}}} - v; x, y) \\
&= rkP(K_{\underbrace{r,\ldots,r}_{(k-1)\text{-mal}}} * \overline{K_{r-1}}; x, y) \\
&= rk \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} (x-y)^i \sum_{j=0}^{r-1-i} S_{r-1-i,j}\, y^{\underline{j}} \\
&\quad\; P(K_{\underbrace{r,\ldots,r}_{(k-1)\text{-mal}}}; x-j, y-j)\ .
\end{aligned}$$

q.e.d.

Im nächsten Abschnitt stellen wir einen Zusammenhang zwischen dem bivariaten chromatischen Polynom und einem weiteren Graphenpolynom, nämlich dem Matchingpolynom, bei bestimmten Graphen her.

4.5 Bivariates chromatisches Polynom und Matchingpolynom

Bei der Berechnung chromatischer Polynome von Graphen kommt es bekanntlich auf die unabhängigen Partitionen der Eckenmege an, sofern bei einer Eckenfärbung echte Farben dabei sind. Aufgrund ihrer Struktur besitzen einige Graphen die Eigenschaft, dass alle unabhängigen Partitionen ihrer Eckenmenge ausschließlich aus ein- und zweielementigen Blöcken bestehen. Das bedeutet, dass jeder von ihnen eine Kante oder eine Ecke im komplementären Graphen induziert. Daher entspricht jeder unabhängigen Partition eines solchen Graphen ein Matching im komplementären Graphen.
In der Literatur finden sich verschiedene Definitionen des Matchingspolynoms. Wenn wir im Folgenden vom Matchingpolynom sprechen, gehen wir von der folgenden Form aus, welche in ([16], S. 334) als Matching-Generating-Polynomial bezeichnet wird.

Definition 4.68 *([16], S. 334).*
Gegeben sei ein Graph G mit $|V(G)| =: n$. Weiterhin sei a_k für $k = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$ die Anzahl der k-Matchings in G. Das Matching-Generating-Polynomial ist definiert als

$$M(G; x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_k x^k\ .$$

Nun betrachten wir den Graphentypen aus Definition 2.29, dessen unabhängige Partitionen die eingangs genannte Eigenschaft besitzen.

Satz 4.69 *Es seien $t_1, \ldots, t_N$ natürliche Zahlen. Einen Graphen G nennen wir gemäß Definition 2.29 einen $K_n - \sum\limits_{m=1}^{N} t_m S_{m+1}$, wenn wir aus einem Graphen K_n die Kanten von jeweils t_m Sternen S_{m+1} löschen, so dass deren Ecken erhalten bleiben und insgesamt alle betrachteten Sterne paarweise eckendisjunkt sind. Weiterhin sei $H = \sum_{m=1}^{N} t_m S_{m+1}$, $|V(H)| =: \overline{n}$ und $M(H;x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \overline{n}/2 \rfloor} a_k x^k$. Dann gilt*

$$P(G;x,y) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\lfloor \overline{n}/2 \rfloor} a_k \sum_{i=0}^{n-2k} \binom{n-2k}{i} (x-y)^i \, y^{\underline{n-k-i}} \, .$$

Demnach ist k die Anzahl aller Blöcke $X \in \pi \in \Pi_I(G)$ mit $|X| > 1$ und a_k die Anzahl aller solcher π mit k solchen X. Man beachte, dass im Allgemeinen ab einem gewissen k die Beziehung $a_k = 0$ gilt.

Beweis:
In jeder unabhängigen Partition von $V(G)$ befinden sich ausschließlich Blöcke, welche jeweils aus einer Ecke oder einer gelöschten Kante bestehen, also einer Kante aus $E(H)$. Um dieses zu erreichen, dürfen keine zwei Kanten von H eine gemeinsame Ecke besitzen. Daher suchen wir nach allen möglichen Matchings von H. Die Anzahl a_k der k-Matchings in H entspricht also der Anzahl der Partitionen π von $V(G)$ mit genau k Blöcken X mit $|X| > 1$.
q.e.d.

Schließlich halten wir noch das folgende weitere Ergebnis fest.

Korollar 4.70 *Es sei $k \leq \sum_{i=1}^{N} t_i$. Satz 4.11 und Definition 4.68 liefern*

$$a_k \quad = \quad \sum_{b_N=0}^{k} \binom{t_N}{b_N} N^{b_N} \sum_{b_{N-1}=0}^{k-b_N} \binom{t_{N-1}}{b_{N-1}} (N-1)^{b_{N-1}} \cdots \sum_{b_2=0}^{k-b_N-\ldots-b_3} \binom{t_2}{b_2} 2^{b_2} \binom{t_1}{k-b_N-\ldots-b_2} \, .$$

Für jede speziell ausgewählte Folge $b_N, \ldots, b_1$ gilt zudem

$$k \quad = \quad \sum_{i=0}^{N-1} b_{N-i} \, .$$

q.e.d.

Des Weiteren besteht auch ein Zusammenhang zwischen dem bivariaten chromatischen Polynom einer sogenannten Biclique und dem Matchingpolynom des dazu komplementären Graphen. Dieser Zusammenhang wurde bereits in ([5], S. 288 f.) speziell für das univariate chromatische Polynom angegeben und soll hier nicht genauer vorgestellt werden, weil wir eine allgemeinere Form für den bivariaten Fall zeigen werden. Zunächst benötigen wir eine Definition.

Definition 4.71 *([5], S.287 f.).*
Eine (m,n)-Biclique ist ein Graph G, welcher das Komplement eines bipartiten Graphen mit den beiden Blöcken der Kardinalitäten m und n mit $n \geq m$ darstellt.

Nun verallgemeinern wir das oben angesprochene Resultat aus ([5], S. 288 f.) in folgendem Satz.

Satz 4.72 *Es sei G eine (m,n)-Biclique mit $n \geq m$ und*

$$M_{\overline{G}} = \left\{ F \subseteq E(G) | F \text{ ist ein Matching in } \overline{G} \right\} .$$

Weiterhin sei $a_{\overline{G}}^{i}$ die Anzahl aller i-Matchings in $\overline{G}$. Dann gilt analog zum univariaten Fall in ([5], S. 288 f.):

$$\begin{aligned} P(G;x,y) &= \sum_{X \in M_{\overline{G}}} \sum_{W \subseteq V(\overline{G})-V(X)} (x-y)^{|W|} \underline{y^{m+n-|W|-|E(X)|}} \\ &= \sum_{H \subseteq \overline{G}} (x-y)^{\overline{G}-H} \sum_{X \in M_{\overline{H}}} \underline{y^{m+n-|W|-|E(X)|}} \\ &= \sum_{i=0}^{m} a_{\overline{G}}^{i} \sum_{j=0}^{m+n-2i} (x-y)^{j} \binom{m+n-2i}{j} \underline{y^{m+n-j-i}} . \end{aligned}$$

Beweis:
Gleiche echte Farben dürfen ausschließlich zwischen nicht zueinander adjazenten Ecken vergeben werden. Wie bereits in ([5], S. 288) angemerkt wurde, sind die einzigen Fälle, in welchen dieses möglich ist, jedoch Ecken, welche in $\overline{G}$ zu einem Matching gehören. Unechte Farben vergeben wir nur für solche Ecken, welche nicht zum jeweils betrachteten Matching gehören. Hier haben wir $\binom{m+n-2i}{j}$ Möglichkeiten, aus diesen Ecken j Ecken auszuwählen. Alle verbleibenden $m+n-j$ Ecken färben wir paarweise verschieden echt, wobei wir die Ecken der i Kanten eines jeden i-Matchings jeweils mit derselben Farbe versehen.
q.e.d.

Im folgenden Kapitel werden wir uns einer weiteren Verallgemeinerung des chromatischen Polynoms zuwenden, nämlich dem trivariaten chromatischen Polynom, welches auch alle unzulässigen Färbungen mitzählt.

Kapitel 5

Formeln für das trivariate chromatische Polynom

5.1 Allgemeine Formeln

In Definition 3.23 haben wir bereits das trivariate chromatische Polynom eingeführt, welches alle beliebigen Eckenfärbungen eines Graphen G berücksichtigt. Dabei werden auch alle in G möglichen Färbungen mitgezählt, bei welchen mindestens eine Kante vorkommt, deren Ecken in derselben echten Farbe gefärbt sind. Für die Koeffizienten dieses Polynoms führen wir in diesem Abschnitt ergänzend zu den oben bereits vorgestellten Darstellungsweisen zum bivariaten chromatischen Polynom zwei Gleichungen ein, welche sich auf jeden beliebigen Graphentyp anwenden lassen. Wir wiederholen die Definition 3.23 des trivariaten chromatischen Polynoms an dieser Stelle noch einmal.

Definition 5.1 *Das trivariate chromatische Polynom für einen Graphen $G = (V, E)$ ist wie folgt definiert:*
Es seien die Farbenmengen X, Y und Z definiert wie in Definition 3.14, das heißt $y = |Y| \leq x = |X|$. Für alle beliebigen Eckenfärbungen $\Phi : V \to \{1, \ldots, y, y+1, \ldots, x\}$ von G besitzt das trivariate chromatische Polynom nach ([26], S. 51) die Form

$$\tilde{P}(G; x, y, z) = \sum_{\Phi:V\to\{1,\ldots,y,y+1,\ldots,x\}} \prod_{e\in E \text{ mit } \exists c\leq y \forall v\in e \Phi(v)=c} z$$

und lässt sich für Graphen nach Definition 2.2 auch darstellen als

$$\tilde{P}(G; x, y, z) = \sum_{\Phi:V\to\{1,\ldots,y,y+1,\ldots,x\}} z^{|\{\{v,w\}\in E \mid \Phi(v)=\Phi(w)\leq y\}|} .$$

Wie in Bemerkung 3.27 bereits erwähnt wurde, ist das trivariate chromatische Polynom äquivalent zum Edge-Elimination-Polynomial aus Definition 3.25 beziehungsweise Definition 3.28, welches nach Bemerkung 3.30 wiederum äquivalent zum Covered Components Polynomial aus Definition 3.29 ist.
In den beiden Sätzen 5.4 und 5.7 werden wir Darstellungsweisen der Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms einführen. Zunächst betrachten wir dieses Polynom in der folgenden Form, welche sich an den univariaten Fall mit $Z = \emptyset$ und damit an das Monochrome Polynomial in 3.11 anlehnt.

Bemerkung 5.2 *Zu einem Graphen $G = (V, E)$ sei $c_m(G; x, y)$ die Anzahl aller verallgemeinerten Eckenfärbungen mit genau m Kanten, deren Ecken jeweils gleichfarbig echt gefärbt sind. Dann lässt sich das trivariate chromatische Polynom alternativ zu Definition 3.23 und analog zu der Darstellung des Monochrome Polynomial in Definition 3.11 wie folgt darstellen:*

$$\tilde{P}(G; x, y, z) = \sum_{m=0}^{|E|} c_m(G; x, y) z^m .$$

Die Koeffizienten $c_m(G; x, y)$ des trivariaten chromatischen Polynoms sind also wiederum bivariate Polynome, wobei offenbar insbesondere der Koeffizient $c_0(G; x, y)$ identisch mit dem bivariaten chromatischen Polynom von G ist.
Aus Definition 5.2 ergibt sich nun der folgende Zusammenhang, welcher auch ohne Beweis unmittelbar einsehbar ist.

Bemerkung 5.3 *Falls G aus zwei Komponenten G_1 und G_2 besteht, so gilt selbstverständlich*

$$c_m(G; x, y) = \sum_{i=0}^{m} c_i(G_1; x, y) c_{m-i}(G_2; x, y) .$$

Allgemeiner gilt: Falls G aus den Komponenten $G_1, \ldots, G_k$ mit $k \geq 1$ besteht, dann erhalten wir

$$c_m(G; x, y) = \sum_{\left\{(j_1,\ldots,j_k)\in\{0,\ldots,m\}^k \mid j_1+\ldots+j_k=m\right\}} \prod_{l=1}^{k} c_{j_l}(G_l; x, y) .$$

Wir wenden uns nun einer dem bivariaten Fall aus Satz 4.1 ähnlichen Darstellungsweise für die Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms zu. Diese entspricht der Darstellungsweise der Anzahl bestimmter nicht zulässiger Färbungen nach ([9], S. 72). Mit dem Bezug auf die Koeffizienten betrachten wir dabei jedoch speziell die Anzahl aller nicht zulässigen Färbungen mit einer festen beliebigen Anzahl echt einfarbig gefärbter Kanten.

Satz 5.4 *Es sei zu einem Graphen $G = (V, E)$ für alle $W \subseteq V$ und für alle $\pi \in \Pi_C(G - W)$ die Menge aller Kanten von $G-W$, deren Ecken nicht zu verschiedenen Blöcken von π gehören, mit $E(\pi)$ bezeichnet. Weiterhin sei $A_m = \{W \subset V \| E(G - W)| \geq m\}$. Schließlich sei $\Pi_I(\pi)$ die Menge aller unabhängigen Partitionen von G_π, wobei G_π der Graph mit der Eckenmenge $V(G_\pi) = \left\{v_1, \ldots, v_{|\pi|}\right\}$ sei, so dass jedes v_k mit $k = 1, \ldots, |\pi|$ einem Block von π entspricht und $E(G_\pi) = \{\{v_k, v_l\} | k \neq l,\ v_k, v_l \in V(G_\pi)$ und $\exists w_1 \in v_k, \exists w_2 \in v_l$ mit $\{w_1, w_2\} \in E\}$ gelte. Dann gilt ähnlich den Überlegungen in ([9], S. 72)*

$$c_m(G; x, y) = \sum_{W \in A_m} (x - y)^{|W|} \sum_{\pi\in\Pi_C(G-W)\ mit\ |E(\pi)|=m} \ \sum_{\kappa\in\Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} .$$

Beweis:
Weil die unechten Farben stets beliebig verteilt werden dürfen, gehen wir wie in Bemerkung 3.15 vor, indem wir nacheinander zunächst jedes $W \subseteq V$ unecht färben und die verbleibenden

Ecken ausschließlich in echten Farben folgendermaßen färben: Aus den nicht unecht gefärbten Ecken bilden wir jede mögliche zusammenhängende Partition derart, dass innerhalb der Blöcke insgesamt genau m Kanten liegen. Nun soll jeder Block einfarbig sein, so dass stets beide Ecken jeder der genannten m Kanten jeweils echt gleichfarbig sind. Um keine weiteren echt einfarbigen Kanten zu erhalten, dürfen ausschließlich jene Blöcke aus $\pi \in \Pi_C(G-W)$ die gleiche echte Farbe erhalten, zwischen welchen keine Kante besteht. Daher bilden wir die dritte Summe über alle $\kappa \in \Pi_I(\pi)$.
q.e.d.

Zu Satz 5.4 berechnen wir folgendes Beispiel, welches wir zusätzlich im Anhang A.12 unter Verwendung von *Mathematica* nachvollziehen. Dort fügen wir außerdem noch ein weiteres Beispiel hinzu. Aufgrund der größeren Komplexität bestimmen wir allerdings exemplarisch nur einen der Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms.

Beispiel 5.5 *Es sei $K_4 = (V, E)$ mit $e \in E$. Wir betrachten den Graphen $K_4 - e$. Wie wir leicht feststellen können, ist $K_4 - e \cong K_3 \cup K_3$ mit $K_3 \cap K_3 = K_2$. Es sei also die Eckenmenge $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ derart, dass $G[v_1, v_2, v_4] \cong K_3$ und $G[v_2, v_3, v_4] \cong K_3$ gelte. Dann erhalten wir*

$$A_3 = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_3\}\}$$

und

$$\begin{aligned}
\{\pi \in \Pi_C(K_4 - e - \emptyset) \mid |E(\pi)| = 3\} &= \Big\{\Big\{\{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\}\Big\}, \Big\{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3\}\Big\}\Big\} \\
&= \Big\{\pi_1, \pi_2\Big\} \\
\{\pi \in \Pi_C(K_4 - e - \{v_1\}) \mid |E(\pi)| = 3\} &= \Big\{\Big\{\{v_1, v_2, v_4\}\Big\}\Big\} \\
&= \Big\{\pi_3\Big\} \\
\{\pi \in \Pi_C(K_4 - e - \{v_3\}) \mid |E(\pi)| = 3\} &= \Big\{\Big\{\{v_2, v_3, v_4\}\Big\}\Big\} \\
&= \Big\{\pi_4\Big\}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \Big\{\{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\}\Big\} \\
\pi_2 &= \Big\{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3\}\Big\} \\
\pi_3 &= \Big\{\{v_1, v_2, v_4\}\Big\} \\
\pi_4 &= \Big\{\{v_2, v_3, v_4\}\Big\}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\Pi_I(\pi_1) &= \Big\{\Big\{\{v_1\}\Big\}, \Big\{\{v_2, v_3, v_4\}\Big\}\Big\} \\
\Pi_I(\pi_2) &= \Big\{\Big\{\{v_1, v_2, v_4\}\Big\}, \Big\{\{v_3\}\Big\}\Big\} \\
\Pi_I(\pi_3) &= \Big\{\Big\{\{v_1, v_2, v_4\}\Big\}\Big\} \\
\Pi_I(\pi_4) &= \Big\{\Big\{\{v_2, v_3, v_4\}\Big\}\Big\}
\end{aligned}$$

und daher

$$
\begin{aligned}
c_3(K_4 - e; x, y) &= \sum_{W \in A_3} (x-y)^{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_4 - e - W) \ mit \ |E(\pi)|=3} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\
&= (x-y)^{|\emptyset|} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_4 - e - \emptyset) \ mit \ |E(\pi)|=3} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\
&+ (x-y)^{|\{v_1\}|} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_4 - e - \{v_1\}) \ mit \ |E(\pi)|=3} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\
&+ (x-y)^{|\{v_3\}|} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_4 - e - \{v_3\}) \ mit \ |E(\pi)|=3} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\
&= (x-y)^{0} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_4 - e - \emptyset) \ mit \ |E(\pi)|=3} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\
&+ (x-y)^{1} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_4 - e - \{v_1\}) \ mit \ |E(\pi)|=3} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\
&+ (x-y)^{1} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_4 - e - \{v_3\}) \ mit \ |E(\pi)|=3} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\
&= 2y^{\underline{2}} + 2\,(x-y)\,y^{\underline{1}} \\
&= 2y\,(y-1+x-y) \\
&= 2y\,(x-1) \ .
\end{aligned}
$$

Anhand eines einfacheren Graphen bestimmen wir nun im nächsten Beispiel das gesamte trivariate chromatische Polynom.

Beispiel 5.6 *Wir betrachten den Graphen* $K_2 = (V, E)$ *mit* $V = \{v_1, v_2\}$*. Weil hier* $|E| = 1$ *gilt, ist für alle* $s \geq 2$ *der Koeffizient* $c_s(K_2; x, y) = 0$*, so dass wir nur* $c_0(K_2; x, y)$ *und* $c_1(K_2; x, y)$ *bestimmen müssen. Wir erhalten*

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \{W \subseteq V \mid |E(K_2 - W)| \geq 0\} \\
&= \big\{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_1, v_2\}\big\}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\{\pi \in \Pi_C(K_2 - \emptyset) \mid |E(\pi)| = 0\} &= \Big\{\big\{\{v_1\}, \{v_2\}\big\}\Big\} \\
\Pi_I\Big(\big\{\{v_1\}, \{v_2\}\big\}\Big) &= \Big\{\Big\{\big\{\{v_1\}\big\}, \big\{\{v_2\}\big\}\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\pi \in \Pi_C(K_2 - \{v_1\}) \mid |E(\pi)| = 0\} &= \Big\{\big\{\{v_2\}\big\}\Big\} \\
\Pi_I\Big(\big\{\{v_2\}\big\}\Big) &= \Big\{\Big\{\big\{\{v_2\}\big\}\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\pi \in \Pi_C(K_2 - \{v_2\}) \mid |E(\pi)| = 0\} &= \Big\{\big\{\{v_1\}\big\}\Big\} \\
\Pi_I\Big(\big\{\{v_1\}\big\}\Big) &= \Big\{\Big\{\big\{\{v_1\}\big\}\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\{\pi \in \Pi_C(K_2 - \{v_1, v_2\}) \mid |E(\pi)| = 0\} &= \{\emptyset\} \\ \Pi_I(\emptyset) &= \{\emptyset\}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}A_1 &= \{W \subseteq V \mid |E(K_2 - W)| \geq 1\} \\ &= \{\emptyset\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\{\pi \in \Pi_C(K_2 - \emptyset) \mid |E(\pi)| = 1\} &= \Big\{\{\,\{v_1, v_2\}\,\}\Big\} \\ \Pi_I\Big(\{\,\{v_1, v_2\}\,\}\Big) &= \Big\{\Big\{\{\,\{v_1, v_2\}\,\}\Big\}\Big\}\,.\end{aligned}$$

Damit nimmt das trivariate chromatische Polynom von K_2 die folgende Form an:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(K_2; x, y, z) &= c_0(K_2; x, y, z) + c_1(K_2; x, y, z) z \\ &= \sum_{W \in A_0} (x-y)^{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_2 - W)\ mit\ |E(\pi)|=0} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\ &+ \left(\sum_{W \in A_1} (x-y)^{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_2 - W)\ mit\ |E(\pi)|=1} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \right) z \\ &= (x-y)^{|\emptyset|} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_2 - \emptyset)\ mit\ |E(\pi)|=0} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\ &+ (x-y)^{|\{v_1\}|} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_2 - \{v_1\})\ mit\ |E(\pi)|=0} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\ &+ (x-y)^{|\{v_2\}|} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_2 - \{v_2\})\ mit\ |E(\pi)|=0} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\ &+ (x-y)^{|\{v_1, v_1\}|} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_2 - \{v_1, v_2\})\ mit\ |E(\pi)|=0} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}} \\ &+ (x-y)^{|\emptyset|} \sum_{\pi \in \Pi_C(K_2 - \emptyset)\ mit\ |E(\pi)|=1} \ \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}}\,.\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{P}(K_2; x, y, z) &= y^{\underline{\left|\left\{\{\{v_1\},\{v_2\}\}\right\}\right|}} + (x-y)\, y^{\underline{\left|\left\{\{\{v_2\}\}\right\}\right|}} + (x-y)\, y^{\underline{\left|\left\{\{\{v_1\}\}\right\}\right|}} \\ &+ (x-y)^2\, y^{\underline{|\emptyset|}} + y^{\underline{\left|\left\{\{\{v_1, v_2\}\}\right\}\right|}}\, z\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}\tilde{P}(K_2; x, y, z) &= y^{\underline{2}} + 2\,(x-y)\,y + (x-y)^2 + yz \\ &= y^2 - y + 2xy - 2y^2 + x^2 - 2xy + y^2 + yz \\ &= x^2 - y + yz\end{aligned}$$

Wie im bivariaten Fall aus Satz 4.3 existiert auch hier ein Analogon zu Satz 5.4, welches an dieser Stelle folgt. Es entspricht wiederum der Darstellung der Anzahl bestimmter nicht zulässiger Färbungen eines Graphen nach ([9], S. 72) und bezieht sich hier wiederum auf jene unzulässigen Färbungen mit einer festen und beliebigen Anzahl echt einfarbiger Kanten.

Satz 5.7 *Für einen Graphen $G = (V, E)$ und $\pi \in \Pi_C(G)$ sei die Menge aller Kanten von G, deren Ecken nicht zu verschiedenen Blöcken von π gehören, mit $E(\pi)$ bezeichnet. $\Pi_I(\pi - M)$ sei für eine Menge $M \subseteq \{X \in \pi \mid |X| = 1\}$ analog zur Definition von $\Pi_I(\pi)$ in Satz 5.4 derart definiert, dass statt der Partition π die Teilmenge $\pi - M$ zugrunde gelegt wird. Dann gilt analog zu den Überlegungen in ([9], S. 72)*

$$c_m(G; x, y) \quad = \sum_{\pi \in \Pi_C(G) \text{ mit } |E(\pi)|=m} \quad \sum_{M \subseteq \{X \in \pi \mid |X|=1\}} (x-y)^{|M|} \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi - M)} y^{\underline{|\kappa|}} .$$

Beweis:
Wir betrachten jede zusammenhängende Partition, welche innerhalb aller Blöcke insgesamt m Kanten enthält. Jeder Block soll einfarbig gefärbt werden, wobei alle Blöcke X mit $|X| \geq 2$ echt gefärbt werden sollen. Daher erhalten wir auch genau m gleichfarbig echt gefärbte Kanten. Weil wir jeden Block bis auf einzelne Ecken verkleinern dürfen, da sich so bei jeder derartigen Verkleinerung wiederum ein Element aus $\Pi_C(G)$ ergibt, erhalten wir auch alle Möglichkeiten, unechte Farben zu verteilen, indem wir diese nur für einelementige Blöcke zulassen. Aus der Menge $\{X \in \pi \mid |X| = 1\}$ wählen wir also nacheinander alle Teilmengen aus, deren Elemente wir mit unechten Farben versehen. Alle verbleibenden Blöcke färben wir echt, so dass verschiedene Blöcke nur dann gleichfarbig gefärbt sein dürfen, wenn zwischen ihnen keine Kante besteht, da sich sonst mehr als genau m gleichfarbig und echt gefärbte Kanten ergäben.
q.e.d.

Wir wenden nun im folgenden Beispiel Satz 5.7 auf den Graphen aus Beispiel 5.5 an. Auch hierzu erfolgt im Anhang A.13 eine Berechnung mithilfe von *Mathematica*, wobei dieselben beiden Beispiele aus Anhang A.12 nochmals berechnet werden. Hier erkennt man, dass die Methode aus Satz 5.4 der Herangehensweise aus Satz 5.7 zeitlich überlegen ist. Wir werden Satz 5.7 jedoch später noch als Beweismittel einsetzen.

Beispiel 5.8 *Es sei die Situation aus Beispiel 5.5 gegeben. Diesbezüglich sei wiederum die Eckenmenge $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ derart, dass $G[v_1, v_2, v_4] \cong K_3$ und $G[v_2, v_3, v_4] \cong K_3$ gelte. Wegen*

$$\{\pi \in \Pi_C(K_4 - e) \mid |E(\pi)| = 3\} \quad = \quad \Big\{ \Big\{ \{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\} \Big\}, \Big\{ \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3\} \Big\} \Big\}$$

mit

$$\pi_1 \quad = \quad \Big\{ \{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\} \Big\}$$
$$\pi_2 \quad = \quad \Big\{ \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3\} \Big\}$$

erhalten wir

$$\{X \in \pi_1 \mid |X| = 1\} \quad = \quad \Big\{ \{v_1\} \Big\}$$
$$\{X \in \pi_2 \mid |X| = 1\} \quad = \quad \Big\{ \{v_3\} \Big\}$$

und daher mit Satz 5.7

$$
\begin{aligned}
c_3(K_4 - e; x, y) &= \sum_{\pi \in \Pi_C(K_4 - e) \; mit \; |E(\pi)|=3} \; \sum_{M \subseteq |\{X \in \pi \;|\; |X|=1\}|} (x-y)^{|M|} \sum_{\kappa \in \Pi_I(\pi - M)} y^{\underline{|\kappa|}} \\
&= (x-y)^0 \, y^{\underline{2}} + (x-y)^1 \, y^{\underline{1}} + (x-y)^0 \, y^{\underline{2}} + (x-y)^1 \, y^{\underline{1}} \\
&= 2y\,(y-1) + 2y\,(x-y) \\
&= 2y\,(y-1+x-1) \\
&= 2y\,(x-1) \; .
\end{aligned}
$$

5.2 Formeln für bestimmte Graphentypen

Wie bereits im Zusammenhang mit dem bivariaten chromatischen Polynom möchten wir auch hier einige spezielle Graphentypen betrachten und die in Satz 5.2 als $c_m(G; x, y)$ definierten Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms bestimmen.

5.2.1 Vollständige Graphen

Der vollständige Graph lässt sich aufgrund seiner einfachen Kantenstruktur besonders leicht untersuchen. Daher bestimmen wir zunächst eine Darstellung für die Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms dieses Graphentyps.

Satz 5.9 *Es sei $r \geq 2$, $2 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_M \leq r$ und $M \geq 1$ mit der Eigenschaft $\sum_{j=1}^{M} \frac{t_j(t_j-1)}{2} = m$. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
c_m(K_r; x, y) &= \sum_{\left\{\sum_{j=1}^{M} \frac{t_j\left(t_j-1\right)}{2} = m\right\}} \prod_{j=1}^{M} \binom{r - \sum_{l=1}^{j-1} t_l}{t_j} \prod_{2 \leq l \leq t_M} \frac{1}{|\{j \in \{1, \ldots, M\} \,|\, t_j = l\}|!} \\
&\quad \sum_{i=0}^{r - \sum_{j=1}^{M} t_j} \binom{r - \sum_{j=1}^{M} t_j}{i} (x-y)^i \, y^{\underline{r - i + M - \sum_{l=1}^{M} t_l}} \; ,
\end{aligned}
$$

wobei wir für $j = 1$ die Vereinbarung $\sum_{l=1}^{j-1} t_l = 0$ treffen. Weiterhin gilt für $m = 0$ trivialerweise

$$
c_0(K_r; x, y) \;=\; P(K_r; x, y) \; .
$$

Beweis:
Die Behauptung folgt aus Satz 5.7 folgendermaßen:
Alle Blöcke $B \in \pi \in \Pi_C(K_r)$ mit $|B| = b$ induzieren einen vollständigen Graphen K_b mit $1 \leq b \leq r$. Weil für einen vollständigen Graphen K_b bekanntlich $|E(K_b)| = \frac{b(b-1)}{2}$ gilt (siehe

hierzu etwa [31], S. 6 f.), erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\{\pi \in \Pi_C(K_r) \mid \ |E(\pi)| = m\} \\
= \ &\left\{ \left(\bigcup_{j=1}^{M} \{V(K_{t_j})\} \right) \cup \left(\Big\{ \{v_k\} \Big\} \right) \ \middle| \ K_{t_j} \subseteq K_r \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, M\} \wedge \sum_{j=1}^{M} \frac{t_j\,(t_j-1)}{2} = m \right. \\
&\left. \wedge K_{t_{j_1}} \cap K_{t_{j_2}} = \emptyset \text{ für alle } j_1, j_2 \in \{1, \ldots, M\} \text{ mit } j_1 \neq j_2 \wedge v_k \in V(K_r) - \bigcup_{j=1}^{M} V(K_{t_j}) \right\} .
\end{aligned}$$

Für $\pi \in \Pi_C(K_r)$ gilt

$$|\,\{X \in \pi \in \Pi_C(K_r) \mid \ |X| = 1\}\,| \quad = \quad r - \sum_{j=1}^{M} t_j \ ,$$

wobei $\sum_{j=1}^{M} \frac{t_j(t_j-1)}{2} = m$ für die jeweilige zusammenhängende Partition $\pi \in \Pi_C(K_r)$ stehe. Weil wir bei den Auswahlen der K_{j_1}, K_{j_2} mit $|V(K_{j_1})| = |V(K_{j_2})|$ nicht die Auswahlreihenfolge unterscheiden, fügen wir das Produkt $\prod_{2 \le l \le t_M} \frac{1}{|\{j \in \{1,\ldots,M\} | t_j = l\}|!}$ hinzu.
Anschließend wählen wir gemäß Bemerkung 3.15 zu jeder Partition π jeweils eine Menge $A \subseteq \{X \in \pi \in \Pi_C(K_r) \mid \ |X| = 1\}$ zur unechten Eckenfärbung der in den Blöcken X enthaltenen Ecken aus. Für $\kappa \in \Pi_C(\pi - A)$ ergibt sich schließlich $|\kappa| = r - i - \sum_{j=1}^{M} t_j + M$.
q.e.d.

Aus diesem Satz ergibt sich folgendes Korollar.

Korollar 5.10 *Gegeben sei die Situation aus Satz 5.9. Dann gilt für $m \ge 1$ mit Bemerkung 3.15*

$$\begin{aligned}
c_m(K_r; x, y) \quad = \quad & \sum_{\left\{\sum_{j=1}^{M} \frac{t_j\left(t_j-1\right)}{2} = m\right\}} \prod_{j=1}^{M} \binom{r - \sum_{l=1}^{j-1} t_l}{t_j} \prod_{2 \le l \le t_M} \frac{1}{|\,\{j \in \{1, \ldots, M\}\,|t_j = l\}\,|!} \\
& y^{\underline{M}} P(K_{r - \sum_{j=1}^{M} t_j}; x - M, y - M) \ .
\end{aligned}$$

Zu Satz 5.9 betrachten wir nun folgendes Beispiel.

Beispiel 5.11 *Es sei der Graph K_4 gegeben, das heißt, es sei $r = 4$ und weiterhin sei $m = 2$. Wie unschwer zu erkennen ist, finden wir für $\sum_{j=1}^{M} \frac{t_j(t_j-1)}{2} = m$ genau eine Zerlegung, nämlich* *mit* $M=2$ *und* $t_1=t_2=2$. *Wir erhalten somit* $\frac{2(2-1)}{2}+\frac{2(2-1)}{2}=2$. *Damit ergibt sich*

$$\begin{aligned} c_2(K_4;x,y) &= \sum_{\left\{\frac{2(2-1)}{2}+\frac{2(2-1)}{2}=2\right\}} \prod_{j=1}^{2} \binom{4-\sum_{l=1}^{j-1} t_l}{t_j} \prod_{2\le l\le t_2} \frac{1}{|\{j\in\{1,2\}\,|t_j=l\}|!} \\ &\quad \sum_{i=0}^{4-\sum_{j=1}^{2} t_j} \binom{4-\sum_{j=1}^{2} t_j}{i} (x-y)^i\, y^{\underline{4-i+2-\sum_{l=1}^{2} t_l}} \\ &= \binom{4-0}{t_1}\binom{4-t_1}{t_2}\frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{4-4}\binom{4-4}{i}(x-y)^i\, y^{\underline{4-i+2-4}} \\ &= \binom{4}{2}\binom{2}{2}\frac{1}{2}\binom{0}{0}(x-y)^0\, y^{\underline{2}} \\ &= 3y^{\underline{2}}\,. \end{aligned}$$

Anschaulich lässt sich dieses Ergebnis folgendermaßen begründen: Es gibt genau $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, aus den sechs Kanten des Graphen K_4 eine Kante und damit ein Eckenpaar auszuwählen, welches echt einfarbig gefärbt werden soll. Weil wir dabei jedoch auch die anderen beiden Ecken mit auswählen, obwohl wir diese Wahlmöglichkeit bereits bei den $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten mitgezählt haben, dividieren wir durch zwei, um keine Wahl doppelt zu zählen. Es bleibt nun von den ursprünglich vier Ecken noch genau ein weiteres Eckenpaar übrig, welches ebenfalls echt einfarbig gefärbt werden darf, ohne mehr als zwei Kanten einfarbig zu färben. Damit ergeben sich für das erste Eckenpaar y wählbare Farben, während für das zweite Paar nur noch $y-1$ mögliche Farben verbleiben.
Wir erhalten schließlich noch ein Ergebnis für Graphen, deren Komponenten ausschließlich vollständige Graphen sind.

Korollar 5.12 *Es sei ein Graph* $\bigcup_{i=1}^{s} K_{r_i}=(V,E)$ *mit* $K_{r_a}\cap K_{r_b}=\emptyset$ *für* $r_a,r_b\in\{r_1,\dots,r_s\}$, $r_a\neq r_b$, $r_i\ge 2$ *und* $s\ge 2$ *sowie* $0\le m=\sum_{i=1}^{s} m_i$ *gegeben. Weiterhin sei* $M_i\ge 1$ *und* $2\le t_{i_1}\le t_{i_2}\le\ldots\le t_{i_{M_i}}\le r_i$ *mit der Eigenschaft* $\sum_{j=1}^{M_i}\frac{t_{i_j}\left(t_{i_j}-1\right)}{2}=m_i$. *Dann gilt*

$$c_m\Big(\dot{\bigcup}_{i=1}^{s} K_{r_i};x,y\Big) = \sum_{\left\{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{M_i}\frac{t_{i_j}\left(t_{i_j}-1\right)}{2}=m_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{s} m_i=m\right\}} \prod_{i=1}^{s} c_{m_i}(K_{r_i};x,y)\,.$$

Beweis:
Die Behauptung folgt aus Satz 5.9.
q.e.d.
Dieses Resultat werden wir an späterer Stelle nochmals benötigen.

5.2.2 Vollständig bipartite Graphen

Ein häufig studierter Graph ist der vollständig bipartite Graph, welcher sich aufgrund seiner regelmäßigen Kantenstrukturen auch bezüglich des trivariaten chromatischen Polynoms untersuchen lässt. An dieser Stelle gehen wir wiederum näher auf dessen Koeffizienten ein.

Satz 5.13 *Es sei für $r \geq 1$ und $s \geq 1$ der zugehörige vollständig bipartite Graph $K_{r,s}$ gegeben. Für $1 \leq m \leq rs$ und ein passendes M mit $1 \leq M \leq m$ sei $\sum_{i=1}^{M} p_i q_i = m$ mit der Eigenschaft $0 < p_1 q_1 \leq p_2 q_2 \leq \ldots \leq p_M q_M \leq m$. Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
c_m(K_{r,s}; x, y) \quad = \quad & \sum_{\{\sum_{i=1}^{M} p_i q_i = m\}} \binom{r}{\sum_{i=1}^{M} p_i} \binom{s}{\sum_{i=1}^{M} q_i} \binom{\sum_{i=1}^{M} p_i}{p_1 \ldots p_M} \binom{\sum_{i=1}^{M} q_i}{q_1 \ldots q_M} \\
& \prod_{1 \leq l_1 \leq r \text{ und } 1 \leq l_2 \leq s} \frac{1}{|\{(p_i, q_i) \,|\, p_i = l_1 \wedge q_i = l_2 \wedge i \in \{1, \ldots, M\}\}|!} \\
& \sum_{k_1=0}^{r - \sum_{i=1}^{M} p_i} \binom{r - \sum_{i=1}^{M} p_i}{k_1} \sum_{k_2=0}^{s - \sum_{i=1}^{M} q_i} \binom{s - \sum_{i=1}^{M} q_i}{k_2} (x-y)^{k_1 + k_2} \\
& y^{\underline{M}} P(K_{r - k_1 - \sum_{i=1}^{M} p_i, s - k_2 - \sum_{i=1}^{M} q_i}; y - M) \,.
\end{aligned}
$$

Für $c_0(K_{r,s}; x, y)$ gilt trivialerweise und unter Einbezug von Bemerkung 3.15

$$
\begin{aligned}
c_0(K_{r,s}; x, y) &= P(K_{r,s}; x, y) \\
&= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} (x-y)^{i+j} P(K_{r-i, s-j}; y) \,.
\end{aligned}
$$

Beweis:
Zum Beweis orientieren wir uns an Satz 5.7.
Alle Blöcke $B \in \pi \in \Pi_C(K_{r,s})$ mit $|B| = p_i + q_i$ für $i \in \{1, \ldots, M\}$ sowie $0 \leq p_i \leq r$ und $0 \leq q_i \leq s$ induzieren einen Graphen K_{p_i, q_i}. Da bekanntlich $|E(K_{p_i, q_i})| = p_i q_i$ gilt, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& \{\pi \in \Pi_C(K_{r,s}) \mid \ |E(\pi)| = m\} \\
= \ & \left\{ \left(\bigcup_{i=1}^{M} \{V(K_{p_i, q_i})\} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{r+s-\sum_{i=1}^{M}(p_i+q_i)} \Big\{ \{v_j\} \Big\} \right) \ \middle| \ K_{p_i, q_i} \subseteq K_{r,s} \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, M\} \right. \\
& \wedge K_{p_{i_1}, q_{i_1}} \cap K_{p_{i_2}, q_{i_2}} = \emptyset \text{ für alle } i_1, i_2 \in \{1, \ldots, M\} \text{ mit } i_1 \neq i_2 \wedge \sum_{i=1}^{M} p_i q_i = m \\
& \left. \wedge v_j \in \left(V(K_{r,s}) - \bigcup_{i=1}^{M} V(K_{p_i, q_i}) \right) \right\} \,.
\end{aligned}
$$

Um alle Vereinigungen $\bigcup_{i=1}^{M} K_{p_i, q_i} \subseteq K_{r,s}$ zu bilden, wählen wir aus den $r + s$ Ecken zunächst die erforderlichen $\sum_{i=1}^{M} p_i + \sum_{i=1}^{M} q_i$ Ecken aus und aus letzteren alle Einteilungen $\{p_1, \ldots, p_M\}$ und $\{q_1, \ldots, q_M\}$. Aus jeder solchen Einteilung bilden wir die Blöcke der Kardinalitäten $p_i + q_i$. Alle nicht gewählten Ecken werden jeweils als einelementige Blöcke aufgefasst. Da wir pro Einteilung keine Block-Tupel (p_{i_1}, q_{i_1}) und (p_{i_2}, q_{i_2}) mit $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, M\}$, $i_1 \neq i_2$ sowie $p_{i_1} = p_{i_2}$ und $q_{i_1} = q_{i_2}$ nach ihrer Auswahlreihenfolge unterscheiden dürfen, ist die Anzahl aller solcher Auswahlen aus kombinatorischen Gründen also

$$\sum_{\{\sum_{i=1}^M p_i q_i = m\}} \binom{r}{\sum_{i=1}^M p_i} \binom{s}{\sum_{i=1}^M q_i} \binom{\sum_{i=1}^M p_i}{p_1 \dots p_M} \binom{\sum_{i=1}^M q_i}{q_1 \dots q_M}$$
$$\prod_{1 \le l_1 \le r \text{ und } 1 \le l_2 \le s} \frac{1}{|\{(p_i, q_i)\,|p_i = l_1 \wedge q_i = l_2 \wedge i \in \{1, \dots, M\}\}\,|!} .$$

Weiterhin gilt

$$|\{X \in \pi \in \Pi_C(K_{r,s}) \mid |X| = 1\}| \quad = \quad r + s - \sum_{i=1}^M p_i - \sum_{i=1}^M q_i$$

für die Anzahl aller nicht gewählten Ecken aus $V(K_{r,s})$.
Außerdem gilt für

$$\pi \quad = \quad \left(\{V(K_{p_1,q_1}), \dots, V(K_{p_M,q_M})\} \cup \left\{\{v\} \mid v \in V(K_{r-\sum_{i=1}^M p_i, s-\sum_{i=1}^M q_i})\right\}\right) \in \Pi_C(K_{r,s})$$

und jede gewählte Menge A unecht gefärbter einelementiger Blöcke aus π mit

$$|A| \quad = \quad k_1 + k_2 \ \text{ für alle } \kappa \in \Pi_I(\pi - A)$$

immer $\{V(K_{p_1,q_1})\}, \dots, \{V(K_{p_M,q_M})\} \in \kappa$. Damit werden für diese Blöcke genau $y^{\underline{M}}$ echte Farben benötigt. Die jeweilige Vorabauswahl der jeweiligen Menge A zur unechten Färbung wurde durch Bemerkung 3.15 gestattet.
q.e.d.

Hieraus lässt sich folgendes Ergebnis ableiten.

Korollar 5.14 *Gegeben sei die Situation aus dem obigen Satz. Dann ergibt sich mit Bemerkung 3.15 für $m \ge 1$*

$$c_m(K_{r,s}; x, y) \quad = \quad \sum_{\{\sum_{i=1}^M p_i q_i = m\}} \binom{r}{\sum_{i=1}^M p_i} \binom{s}{\sum_{i=1}^M q_i} \binom{\sum_{i=1}^M p_i}{p_1 \dots p_M} \binom{\sum_{i=1}^M q_i}{q_1 \dots q_M}$$
$$\prod_{1 \le l_1 \le r \textit{ und } 1 \le l_2 \le s} \frac{1}{|\{(p_i, q_i)\,|p_i = l_1 \wedge q_i = l_2 \wedge i \in \{1, \dots, M\}\}\,|!}$$
$$y^{\underline{M}} P(K_{r-\sum_{i=1}^M p_i, s-\sum_{i=1}^M q_i}; x - M, y - M) .$$

Zu Satz 5.13 beschäftigen wir uns nun mit dem folgenden Beispiel.

Beispiel 5.15 *Wir betrachten für $r = 3$ und $s = 2$ den Graphen $K_{3,2}$ und bestimmen $c_2(K_{3,2}; x, y)$. Offenbar gilt hier*

$$\left\{\sum_{i=1}^M p_i q_i = 2\right\} \quad = \quad \{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2, 1 \cdot 2 = 2, 2 \cdot 1 = 2\} .$$

Somit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
c_2(K_{3,2};x,y) \;=\;& \binom{3}{1+1}\binom{2}{1+1}\binom{1+1}{1\;1}\binom{1+1}{1\;1} \\
& \frac{1}{|\{(1,1)\,,(1,1)\}|!\,|\emptyset|!\,|\emptyset|!\,|\emptyset|!\,|\emptyset|!\,|\emptyset|!} \\
& \sum_{k_1=0}^{3-(1+1)} \binom{3-(1+1)}{k_1} \sum_{k_2=0}^{2-(1+1)} \binom{2-(1+1)}{k_2} (x-y)^{k_1+k_2} \\
& y^{\underline{2}} P(K_{3-k_1-(1+1),2-k_2-(1+1)};y-2) \\
+\;& \binom{3}{1}\binom{2}{2}\binom{1}{1}\binom{2}{2} \\
& \frac{1}{|\emptyset|!\,|\{(1,2)\}|!\,|\emptyset|!\,|\emptyset|!\,|\emptyset|!\,|\emptyset|!} \\
& \sum_{k_1=0}^{3-1} \binom{3-1}{k_1} \sum_{k_2=0}^{2-2} \binom{2-2}{k_2} (x-y)^{k_1+k_2} \\
& y^{\underline{1}} P(K_{3-k_1-1,2-k_2-2};y-1) \\
+\;& \binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{2}\binom{1}{1} \\
& \frac{1}{|\emptyset|!\,|\emptyset|!\,|\{(2,1)\}|!\,|\emptyset|!\,|\emptyset|!\,|\emptyset|!} \\
& \sum_{k_1=0}^{3-2} \binom{3-2}{k_1} \sum_{k_2=0}^{2-1} \binom{2-1}{k_2} (x-y)^{k_1+k_2} \\
& y^{\underline{1}} P(K_{3-k_1-2,2-k_2-1};y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2(K_{3,2};x,y) \;=\;& 6y^{\underline{2}}P(K_{1,0};y-2) + 6\,(x-y)\,y^{\underline{2}}P(K_{0,0};y-2) \\
+\;& 3yP(K_{2,0};y-1) + 6\,(x-y)\,yP(K_{1,0};y-1) \\
+\;& 3\,(x-y)^2\,yP(K_{0,0};y-1) \\
+\;& 6yP(K_{1,1};y-1) + 6\,(x-y)\,yP(K_{1,0};y-1) \\
+\;& 6\,(x-y)\,yP(K_{0,1};y-1) + 6\,(x-y)^2\,yP(K_{0,0};y-1)\;.
\end{aligned}
$$

Unter Beachtung, dass $K_{1,0} \cong K_{0,1} \cong K_1$, $K_{0,0} \cong \emptyset$, $K_{2,0} \cong \overline{K_2}$ *und* $K_{1,1} \cong K_2$ *gilt, erhalten wir*

$$
\begin{aligned}
c_2(K_{3,2};x,y) \;=\;& 6y^{\underline{2}}P(K_1;y-2) + 6\,(x-y)\,y^{\underline{2}}P(\emptyset;y-2) \\
+\;& 3yP(\overline{K_2};y-1) + 18\,(x-y)\,yP(K_1;y-1) \\
+\;& 9\,(x-y)^2\,yP(\emptyset;y-1) + 6yP(K_2;y-1)\;,
\end{aligned}
$$

und zusammen mit Beispiel 3.3 sowie der Anfangsbedingung aus Satz 3.19 folgt

$$
\begin{aligned}
c_2(K_{3,2};x,y) \;=\;& 6y^{\underline{2}}\,(y-2) + 6\,(x-y)\,y^{\underline{2}} \\
+\;& 3y\,(y-1)^2 + 18\,(x-y)\,y\,(y-1) \\
+\;& 9\,(x-y)^2\,y + 6y\,(y-1)^{\underline{2}}\;.
\end{aligned}
$$

Ausmultiplizieren liefert

$$c_2(K_{3,2};x,y) \quad = \quad 3y(9-8x+3x^2-6y+2xy)\ .$$

5.2.3 Spezielle Splitgraphen

Wir kommen in diesem Abschnitt nochmals auf spezielle Splitgraphen zurück. Wie wir sehen werden, gestaltet sich die Darstellung der Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms hier im Gegensatz zum Fall eines vollständig bipartiten Graphen aufgrund der nun zusätzlich auftretenden Kanten und der damit einhergehenden größeren Auswahlmöglichkeiten von m Kanten ein wenig aufwendiger.

Satz 5.16 *Es sei für $r \geq 1$ und $s \geq 1$ der zugehörige Splitgraph $\overline{K_r} * K_s$ gegeben. Für $1 \leq m \leq rs + \frac{s(s-1)}{2}$, $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_M \leq min\,\{r,s\}$, $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_M \leq s$ und ein passendes M mit $1 \leq M \leq m$ sei*

$$\sum_{i=1}^{M} q_i \left(p_i + \frac{q_i-1}{2}\right) \quad = \quad m\ .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} c_m(\overline{K_r} * K_s;x,y) \quad = \quad & \sum_{\left\{\sum_{i=1}^{M} q_i\left(p_i+\frac{q_i-1}{2}\right)=m\right\}} \binom{r}{\sum_{i=1}^{M} p_i}\binom{s}{\sum_{i=1}^{M} q_i} \\ & \binom{\sum_{i=1}^{M} p_i}{p_1\ldots p_M}\binom{\sum_{i=1}^{M} q_i}{q_1\ldots q_M} \\ & \prod_{0\leq l_1\leq r \textit{ und } 1\leq l_2\leq s} \frac{1}{|\left\{(p_i,q_i)\,|p_i=l_1 \wedge q_i=l_2 \wedge i\in\{1,\ldots,M\}\right\}|!} \\ & \sum_{k_1=0}^{r-\sum_{i=1}^{M} p_i} \binom{r-\sum_{i=1}^{M} p_i}{k_1} \sum_{k_2=0}^{s-\sum_{i=1}^{M} q_i} \binom{s-\sum_{i=1}^{M} q_i}{k_2} (x-y)^{k_1+k_2} \\ & y^{\underline{M}} P(\overline{K_{r-k_1-\sum_{i=1}^{M} p_i}} * K_{s-k_2-\sum_{i=1}^{M} q_i};y-M)\ . \end{aligned}$$

Für $c_0(K_{r,s};x,y)$ gilt trivialerweise

$$c_0(\overline{K_r} * K_s;x,y) \quad = \quad P(\overline{K_r} * K_s;x,y)\ .$$

Beweis:
Wir orientieren uns auch hier wieder an Satz 5.7, legen aber nun die Summe

$$\sum_{i=1}^{M} p_i q_i + \frac{q_i\,(q_i-1)}{2} \quad = \quad m$$

als Kombination der Summen

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{q_i\left(q_i-1\right)}{2}$$

aus Satz 5.9 und

$$\sum_{i=1}^{M} p_i q_i$$

aus Satz 5.13 zugrunde, weil die m echt einfarbigen Kanten nun sowohl innerhalb des vollständigen Teilgraphen K_s als auch zwischen beiden Teilgraphen $\overline{K_r}$ und K_s liegen können. Der Beweis erfolgt nun analog zum Beweis von Satz 5.13.
q.e.d.

Auch hieraus erhalten wir eine Folgerung.

Korollar 5.17 *Gegeben sei die Situation aus Satz 5.16. Dann ergibt sich mit Bemerkung 3.15*

$$\begin{aligned} c_m(\overline{K_r} * K_s; x, y) \quad = \quad & \sum_{\left\{\sum_{i=1}^{M} q_i\left(p_i+\frac{q_i-1}{2}\right)=m\right\}} \binom{r}{\sum_{i=1}^{M} p_i}\binom{s}{\sum_{i=1}^{M} q_i} \\ & \binom{\sum_{i=1}^{M} p_i}{p_1 \ldots p_M}\binom{\sum_{i=1}^{M} q_i}{q_1 \ldots q_M} \\ & \prod_{0\leq l_1\leq r \text{ und } 1\leq l_2\leq s} \frac{1}{\left|\left\{\left(p_i,q_i\right)\left|p_i=l_1 \wedge q_i=l_2 \wedge i \in \{1,\ldots,M\}\right\}\right|!} \\ & y^{\underline{M}} P(\overline{K_{r-\sum_{i=1}^{M} p_i}} * K_{s-\sum_{i=1}^{M} q_i}; x-M_2, y-M)\ . \end{aligned}$$

Zu Satz 5.16 berechnen wir folgendes Beispiel und wählen dafür wie in den vorausgehenden Beispielen wieder $m=2$.

Beispiel 5.18 *Es sei $r=3$ und $s=4$ und somit der Graph $\overline{K_3} * K_4$ gegeben. Wir wählen $m=2$. Zunächst bestimmen wir alle möglichen Summenzerlegungen gemäß Satz 5.16:*

$$\begin{aligned} & \left\{\sum_{i=1}^{M} q_i\left(p_i+\frac{q_i-1}{2}\right)=2\right\} \\ = \quad & \left\{1\left(1+\frac{1-1}{2}\right)+1\left(1+\frac{1-1}{2}\right)=2, 1\left(2+\frac{1-1}{2}\right)=2,\right. \\ & \left. 1\left(1+\frac{1-1}{2}\right)+2\left(0+\frac{2-1}{2}\right)=2, 2\left(0+\frac{2-1}{2}\right)+2\left(0+\frac{2-1}{2}\right)=2\right\}\ . \end{aligned}$$

Wir setzen in die Gleichung aus Satz 5.16 ein und erhalten

$$\begin{aligned}
c_2(\overline{K_3} * K_4; x, y) &= \binom{3}{1+1}\binom{4}{1+1}\binom{1+1}{1\ 1}\binom{1+1}{1\ 1}\frac{1}{\mid\{(1,1)\,,(1,1)\}\mid!|\emptyset|!^{15}} \\
&\ \sum_{k_1=0}^{3-(1+1)}\binom{3-(1+1)}{k_1}\sum_{k_2=0}^{4-(1+1)}\binom{4-(1+1)}{k_2}(x-y)^{k_1+k_2} \\
&\ y^{\underline{2}}P(\overline{K_{3-k_1-(1+1)}} * K_{4-k_2-(1+1)}; y-2) \\
&+ \binom{3}{2}\binom{4}{1}\binom{2}{2}\binom{1}{1}\frac{1}{\mid\{(2,1)\}\mid!|\emptyset|!^{15}} \\
&\ \sum_{k_1=0}^{3-2}\binom{3-2}{k_1}\sum_{k_2=0}^{4-1}\binom{4-1}{k_2}(x-y)^{k_1+k_2} \\
&\ y^{\underline{1}}P(\overline{K_{3-k_1-2}} * K_{4-k_2-1}; y-1) \\
&+ \binom{3}{1}\binom{4}{1+2}\binom{1}{1}\binom{1+2}{1\ 2}\frac{1}{\mid\{(1,1)\}\mid!\mid\{(0,2)\}\mid!|\emptyset|!^{14}} \\
&\ \sum_{k_1=0}^{3-1}\binom{3-1}{k_1}\sum_{k_2=0}^{4-(1+2)}\binom{4-(1+2)}{k_2}(x-y)^{k_1+k_2} \\
&\ y^{\underline{2}}P(\overline{K_{3-k_1-1}} * K_{4-k_2-(1+2)}; y-2) \\
&+ \binom{3}{0+0}\binom{4}{2+2}\binom{0+0}{0\ 0}\binom{2+2}{2\ 2}\frac{1}{\mid\{(0,2)\,,(0,2)\}\mid!|\emptyset|!^{15}} \\
&\ \sum_{k_1=0}^{3-(0+0)}\binom{3-(0+0)}{k_1}\sum_{k_2=0}^{4-(2+2)}\binom{4-(2+2)}{k_2}(x-y)^{k_1+k_2} \\
&\ y^{\underline{2}}P(\overline{K_{3-k_1-(0+0)}} * K_{4-k_2-(2+2)}; y-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2(\overline{K_3} * K_4; x, y) &= 36\Big(y^{\underline{2}}P(K_3; y-2) + 3\,(x-y)\,y^{\underline{2}}P(K_2; y-2) \\
&+ 3\,(x-y)^2\,y^{\underline{2}}P(K_1; y-2) + (x-y)^3\,y^{\underline{2}}P(K_0; y-2)\Big) \\
&+ 12\Big(y^{\underline{1}}P(K_4; y-1) + 4\,(x-y)\,y^{\underline{1}}P(K_3; y-1) \\
&+ 6\,(x-y)^2\,y^{\underline{1}}P(K_2; y-1) + 4\,(x-y)^3\,y^{\underline{1}}P(K_1; y-1) \\
&+ (x-y)^4\,y^{\underline{1}}P(K_0; y-1)\Big) \\
&+ 36\Big(y^{\underline{2}}P(\overline{K_2} * K_1; y-2) + (x-y)\,y^{\underline{2}}P(\overline{K_2}; y-2) \\
&+ 2\,(x-y)\,y^{\underline{2}}P(K_2; y-2) + 3\,(x-y)^2\,y^{\underline{2}}P(K_1; y-2) \\
&+ (x-y)^3\,y^{\underline{2}}P(K_0; y-2)\Big) \\
&+ 3\Big(y^{\underline{2}}P(\overline{K_3}; y-2) + 3\,(x-y)\,y^{\underline{2}}P(\overline{K_2}; y-2) \\
&+ 3\,(x-y)^2\,y^{\underline{2}}P(K_1; y-2) + (x-y)^3\,y^{\underline{2}}P(K_0; y-2)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung, dass $\overline{K_2} * K_1 \cong P_3$ gilt (wobei P_3 selbstverständlich ein Baum T_3 ist) und *zusammen mit Beispiel 3.3 sowie Satz 3.19 folgt weiter*

$$\begin{aligned} c_2(\overline{K_3} * K_4; x, y) &= 36y^{\underline{2}}\,(y-2)^{\underline{3}} + 180\,(x-y)\,y^{\underline{2}}\,(y-2)^{\underline{2}} \\ &+ 225\,(x-y)^2\,y^{\underline{2}}\,(y-2) + 75\,(x-y)^3\,y^{\underline{2}} \\ &+ 12y\,(y-1)^{\underline{4}} + 48\,(x-y)\,y\,(y-1)^{\underline{3}} \\ &+ 72\,(x-y)^2\,y\,(y-1)^{\underline{2}} + 48\,(x-y)^3\,y\,(y-1) \\ &+ 12\,(x-y)^4\,y + 36y^{\underline{2}}\,(y-2)\,(y-3)^2 \\ &+ 45\,(x-y)\,y^{\underline{2}}\,(y-2)^2 + 3y^{\underline{2}}\,(y-2)^3 \ . \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} c_2(\overline{K_3} * K_4; x, y) &= 3y\left(608 - 516x + 198x^2 - 41x^3 + 4x^4 - 772y + 560xy\right. \\ &\left. -174x^2y + 25x^3y + 168y^2 - 60xy^2\right) \ . \end{aligned}$$

5.3 Möglichkeiten der Reduktion

Für bestimmte Graphentypen lassen sich die in Satz 5.2 definierten Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms mittels Reduktion auf Graphen von geringerer Ecken- oder Kantenanzahl darstellen. Wir wenden uns nun solchen Möglichkeiten zu.

5.3.1 Graphen mit mindestens einer Kante außerhalb von Teilgraphen C_3

Die Kontraktion einer Kante $e = \{u, v\}$ außerhalb von allen Teilgraphen C_3, genauer mit $N(u) \cap N(v) = \emptyset$, stellt gegenüber der Kontraktion einer anderen Kante ohne diese Eigenschaft einen gewissen Vorteil dar, denn offensichtlich können bei der Kontraktion von e keine Mehrfachkanten (und daher auch nie Schlingen) entstehen. Daher entfällt in diesem Fall der Prozess des anschließenden Ersetzens von Mehrfachkanten durch Einfachkanten (sowie des Entfernens von Schlingen), was im folgenden Satz von großer Bedeutung ist. Schließlich ist es wichtig, bei der Auswahl von echt einfarbig gefärbten Kanten keine Wahlmöglichkeiten zu unterschlagen.

Satz 5.19 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit einer Kante $e = \{u, v\} \in E$, welche die Eigenschaft $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ besitzt. Für jeden beliebigen Graphen H und $r > |E(H)|$ setzen wir*

$$c_r(H; x, y) = 0 \ .$$

Dann gilt nach Satz 3.26

$$\begin{aligned} c_m(G; x, y) &= c_{m-1}(G/e; x, y) - (x-y)\,c_{m-1}(G-u-v; x, y) \\ &+ c_m(G-e; x, y) - c_m(G/e; x, y) + (x-y)\,c_m(G-u-v; x, y) \ . \end{aligned}$$

Beweis:
Der Beweis ist ähnlich aufgebaut wie der Beweis von Satz 3.26 in ([27], S. 7 f.). Bei der Auswahl der m Kanten zur Bestimmung von $c_m(G; x, y)$ können folgende zwei Fälle eintreten:

Fall 1: e ist unter den gewählten m Kanten.
Dann bleiben noch $m - 1$ Kanten zu wählen, ohne jedoch hierbei die Kante e ein weiteres Mal berücksichtigen zu dürfen. Daher gehen wir nun ersatzweise vom Graphen G/e aus, dürfen jedoch nicht genau die Fälle berücksichtigen, in welchen die durch die Kontraktion entstandene Ecke unecht gefärbt ist. Daher erhalten wir für diesen Fall insgesamt
$c_{m-1}(G/e; x, y) - (x - y)\, c_{m-1}(G - u - v; x, y)$ Möglichkeiten.

Fall 2: e ist nicht unter den gewählten m Kanten.
Dann müssen wir aus $E(G/e)$ noch genau m Kanten wählen. Dabei dürfen jedoch u und v nicht dieselbe echte Farbe tragen, da ansonsten $m+1$ Kanten in G echt einfarbig gefärbt wären. Daher betrachten wir zunächst alle $c_m(G-e; x, y)$ Möglichkeiten, in G genau m Kanten aus $G-e$ echt einfarbig zu färben. Weil hierbei jedoch auch alle Fälle mitgezählt werden, in welchen u und v dieselbe echte Farbe erhalten, subtrahieren wir zunächst alle $c_m(G/e; x, y)$ Fälle, in welchen u und v einfarbig sind. Weil dabei jedoch auch alle gestatteten $(x - y)\, c_m(G-u-v; x, y)$ Fälle verloren gehen, in welchen diese Farbe unecht ist, addieren wir diese schließlich wieder.
q.e.d.

Satz 5.19 lässt sich insbesondere für Wälder sowie für Graphen, deren Kreise alle mindestens die Länge 4 besitzen, anwenden. Weil bei einer Löschung, einer Kontraktion oder einer Extraktion einer Kante in einem Wald wieder jeweils ein Wald entsteht, lässt sich die Vorgehensweise aus Satz 5.19 bei einem Wald algorithmisch wiederholen. Bei Kreisen der Länge größer als 3 entsteht durch eine Kantenkontraktion ein neuer Kreis, während bei den anderen beiden Operationen jeweils ein Weg P (und damit ein Wald) entsteht. Somit ist eine algorithmische Wiederholung auch bei Kreisen möglich.

Korollar 5.20 *Es sei $W = (V, E)$ ein Wald oder $C_n = (V, E)$ ein Kreis mit $n \geq 3$ und $e = \{u, v\} \in E$ eine beliebige Kante. Im Falle des Waldes sei $|N(u)| = 1$.*
Dann gilt gemäß Satz 5.19

$$\begin{aligned} c_m(W; x, y) &= c_{m-1}(W/e; x, y) - (x - y)\, c_{m-1}(W - u - v; x, y) \\ &+ (x - 1)\, c_m(W/e; x, y) + (x - y)\, c_m(W - u - v; x, y) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} c_m(C_n; x, y) &= c_{m-1}(C_{n-1}; x, y) - (x - y)\, c_{m-1}(P_{n-2}; x, y) \\ &+ c_m(P_n; x, y) - c_m(C_{n-1}; x, y) + (x - y)\, c_m(P_{n-2}; x, y)\ . \end{aligned}$$

Hierbei wenden wir auf die Wege P_n und P_{n-2} im nächsten Schritt jeweils die Rekursion für Wälder an.
Für beide Rekursionen zusammen gelten die Anfangsbedingungen

$$c_r(H; x, y) = 0$$

für jeden beliebigen Graphen H mit $r > |E(H)|$,

$$c_0(W; x, y) = P(W; x, y)\ ,$$

$$c_0(C_3;x,y) \;=\; P(K_3;x,y)\ ,$$

$$c_1(C_3;x,y) \;=\; 3y\,(x-y)\ ,$$

$$c_2(C_3;x,y) \;=\; 0\ ,$$

und

$$c_3(C_3;x,y) \;=\; y\ .$$

Wir betrachten nun ein Beispiel zu Korollar 5.20 und damit selbstverständlich einen Spezialfall von Satz 5.19.

Beispiel 5.21 *Es sei der Kreis C_5 sowie $m = 3$ gegeben. Damit erhalten wir*

$$\begin{aligned} c_3(C_5;x,y) &= c_2(C_4;x,y) - (x-y)\,c_2(P_3;x,y) \\ &+ c_3(P_5;x,y) - c_3(C_4;x,y) + (x-y)\,c_3(P_3;x,y)\ . \end{aligned}$$

Aufgrund kombinatorischer Überlegungen wissen wir, dass für einen Graphen C_4 zwei echt gleichfarbige Kanten eine gemeinsame Ecke besitzen können oder nicht. Im ersten Fall erhalten beide Kanten dieselbe Farbe und die verbleibende Ecke eine andere Farbe, während im zweiten Fall genau zwei voneinander verschiedene echte Farben vergeben werden. Damit ergibt sich

$$c_2(C_4;x,y) \;=\; 4y\,(x-1) + 2y\,(y-1)\ .$$

Da ein Weg P_3 genau zwei Kanten besitzt, folgt außerdem

$$c_2(P_3;x,y) \;=\; y\ .$$

Im Falle eines Weges P_5 gibt es genau zwei Möglichkeiten, drei Kanten so zu wählen, dass sie alle einen Teilgraphen P_4 bilden und eine Ecke verbleibt. Die Kanten sind dann alle in derselben echten Farbe gefärbt. Weiterhin gibt es genau zwei Möglichkeiten, drei Kanten so zu wählen, dass zwei Teilgraphen P_3 und P_2 entstehen, so dass wir genau zwei voneinander verschiedene echte Farben vergeben und keine Ecke übrig bleibt. Daraus folgt

$$c_3(P_5;x,y) \;=\; 2y\,(x-1) + 2y\,(y-1)\ .$$

Weil in einem Kreis C_4 nicht genau drei einfarbige Kanten gewählt werden können, folgt trivialerweise

$$c_3(C_4;x,y) \;=\; 0$$

und wegen $|E(P_3)| = 2 < 3$

$$c_3(P_3;x,y) \;=\; 0\ .$$

Hieraus folgt schließlich insgesamt

$$\begin{aligned} c_3(C_5;x,y) &= 4y\,(x-1) + 2y\,(y-1) - (x-y)\,y + 2y\,(x-1) + 2y\,(y-1) \\ &= 6y\,(x-1) + 4y\,(y-1) - y\,(x-y) \\ &= 5y\,(y+x-2)\ . \end{aligned}$$

Im Anhang A.14 wenden wir nun Satz 5.19 und Korollar 5.20 im Vergleich zu den Sätzen 5.4 und 5.7 für einige Wälder an. Dabei zeigt sich, dass Korollar 5.20 hiervon die schnellste Methode zur Bestimmung des trivariaten chromatischen Polynoms darstellt, gefolgt von Satz 5.19.

5.3.2 Vollständige Graphen

Vollständige Graphen verfügen nicht über Ecken mit der in Satz 5.19 genannten Eigenschaft. Daher stellen wir an dieser Stelle eine andere Herangehensweise an diesen Graphentyp vor.

Satz 5.22 *Es sei $K_l = (V, E)$ ein vollständiger Graph mit $l \geq 2$ und $0 \leq m \leq \frac{l(l-1)}{2}$. Weiterhin sei t maximal mit der Eigenschaft $\frac{t(t-1)}{2} \leq m$. Für jeden beliebigen Graphen H und $r > |E(H)|$ setzen wir wieder gemäß Satz 5.19*

$$c_r(H; x, y) \quad = \quad 0 \; .$$

Außerdem gilt selbstverständlich $c_0(K_r; x, y) = P(K_r; x, y)$ für jedes beliebige r. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} c_m(K_l; x, y) \quad &= \quad y \sum_{i=1}^{t} \binom{l-1}{i-1} c_{m-\frac{i(i-1)}{2}}(K_{l-i}; x-1; y-1) \\ &+ \quad (x-y)\, c_m(K_{l-1}; x, y) \; . \end{aligned}$$

Beweis:
Wir wählen eine beliebige Ecke v aus $V(K_l)$ aus. Diese dürfen wir unecht oder echt färben. Falls wir sie unecht färben, müssen wir die m Kanten aus dem Restgraphen K_{l-1} wählen. Dies ergibt den Summanden $(x-y)\, c_m(K_{l-1}; x, y)$.
Falls wir v echt färben, haben wir dafür zunächst y Möglichkeiten. Für die Auswahl der m Kanten dürfen wir auch auf $N(v)$ zugreifen, um Kanten $\{v, w\}$ mit $w \in N(v)$ zu erhalten. Hier lassen sich i Kanten mit $i \in \{0, \ldots, t\}$ wählen, welche ebenfalls die bereits gewählte echte Farbe tragen. Hierfür haben wir jeweils $\binom{l-1}{i}$ Möglichkeiten, da v zu allen übrigen $l-1$ Ecken adjazent ist. Für die restlichen Ecken und Kanten dürfen wir aufgrund der Vollständigkeit von K_l jedoch nur noch $x-1$ Farben wählen. Es sind noch $m - \frac{i(i-1)}{2}$ Kanten aus dem Restgraphen K_{l-i} zu wählen.
q.e.d.

Wir betrachten auch zu Satz 5.22 ein Beispiel.

Beispiel 5.23 *Es seien $l = 4$ und $m = 3$ und somit der Graph K_4 gegeben. Gemäß Satz 5.22* *folgt dann $t = 3$. Damit ergibt sich*

$$\begin{aligned}
c_3(K_4; x, y) &= y \sum_{i=1}^{3} \binom{4-1}{i-1} c_{3-\frac{i(i-1)}{2}}(K_{4-i}; x-1; y-1) + (x-y)\, c_3(K_{4-1}; x, y) \\
&= y\Big(\binom{3}{0} c_3(K_3; x-1, y-1) + \binom{3}{1} c_2(K_2; x-1, y-1) \\
&+ \binom{3}{2} c_0(K_1; x-1, y-1)\Big) + (x-y)\, c_3(K_3; x, y) \\
&= y\Big((y-1) + 3 \cdot 0 + 3\,(x-1) \Big) + (x-y)\, y \\
&= y\,(y-1) + 3y \cdot 0 + 3y\,(x-1) + (x-y)\, y \\
&= 4y\,(x-1)\ .
\end{aligned}$$

5.3.3 Disjunkte Vereinigungen von Sternen

Einen leicht zu untersuchenden Graphentyp stellt die disjunkte Vereinigung von Sternen dar. Dementsprechend lässt sich auch eine einfache Rekursionsgleichung angeben.

Satz 5.24 *Wir betrachten den Graphen $G = (V, E) = \sum_{l=1}^{N} t_l S_{l+1}$ aus Korollar 4.9, wobei offenbar $|E| = \sum_{l=1}^{N} l t_l$ gilt. Weiterhin seien die Werte $k = \min\{l \in \{1, \ldots, N\}\, |t_l > 0\}$ und $\alpha = \min\{k, m\}$ für ein beliebiges m mit $0 \leq m \leq \sum_{l=1}^{N} l t_l$ gegeben. Ferner definieren wir den Graphen $G - S_{k+1} = (t_k - 1)\, S_{k+1} + \sum_{l=k+1}^{N} t_l S_{l+1}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
c_m(G; x, y) &= (x-y)\, x^k c_m(G - S_{k+1}; x, y) \\
&+ y \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{k}{i} (x-1)^{k-i}\, c_{m-i}(G - S_{k+1}; x; y)
\end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung

$$c_0(\sum_{l=1}^{M} u_l S_{l+1}; x, y) = P(\sum_{l=1}^{M} u_l S_{l+1}; x, y)$$

für jeden Graphen $\sum_{l=1}^{M} u_l S_{l+1}$ der oben genannten Form.

Beweis:
In einem Stern S_{k+1} lässt sich die Ecke v mit $|N(v)| = k$ unecht oder echt färben. Im ersten Fall dürfen wir alle anderen k Ecken beliebig einfärben, woraus sich für diesen Stern $(x-y)\, x^k$ Möglichkeiten einer derartigen Färbung ergeben. Weil aber die unecht gefärbte Ecke zu jeder Kante des Sterns gehört, haben wir in diesem Stern keine echt einfarbig gefärbte Kante und müssen die geforderten m echt einfarbigen Kanten aus den anderen Sternen wählen, womit wir $(x-y)\, x^k c_m(G - S_{k+1}; x, y)$ Möglichkeiten erhalten.
Ist die Ecke v mit $|N(v)| = k$ jedoch echt gefärbt, können wir bis zu α weitere Ecken des Sterns auswählen, welche mit der echt gefärbten Ecke jeweils eine Kante bilden, und diese Ecken in derselben echten Farbe einfärben. Um keine weiteren Kanten aus diesem Stern zu wählen,

dürfen wir die verbleibenden Ecken nur noch jeweils in einer der übrigen $x-1$ Farben färben, womit sich also $y\sum_{i=0}^{\alpha}\binom{k}{i}(x-1)^{k-i}$ Möglichkeiten ergeben. Die restlichen $m-i$ Kanten müssen wir aus den übrigen Sternen wählen, was zu $y\sum_{i=0}^{\alpha}\binom{k}{i}(x-1)^{k-i}\,c_{m-i}(G-S_{k+1};x;y)$ Möglichkeiten führt.
q.e.d.

5.3.4 Spezielle Splitgraphen

Zur Bestimmung des trivariaten chromatischen Polynoms gewisser Splitgraphen wurde bereits eine Methode vorgestellt. Wir kommen an dieser Stelle jedoch nochmals auf diesen Graphentypen zurück, da wir alternativ eine rekursive Methode finden können.

Satz 5.25 *Es seien $r \geq 1$ und $s \geq 1$. Weiterhin sei für alle $i \in \{0,\dots,s-1\}$*

$$\beta_i \;=\; \max\left\{k \in \{0,\dots,r\} \,\middle|\, \frac{k\,(k-1)}{2} + (i+1)\,k \leq m\right\} .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} c_m(K_r * \overline{K_s};x,y) \;&=\; (x-y)\,c_m(K_r * \overline{K_{s-1}};x,y) \\ &+\; \sum_{i=0}^{s-1}\binom{s-1}{i}y\sum_{j=0}^{\beta_i}\binom{r}{j}c_{m-\frac{j(j-1)}{2}-(i+1)j}(K_{r-j} * \overline{K_{s-1-i}};x-1;y-1) \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} c_0(K_a * \overline{K_b};x,y) &= P(K_a * \overline{K_b};x,y) \\ c_m(K_a * \overline{K_0};x,y) &= c_m(K_a;x,y) \\ c_m(K_0 * \overline{K_b};x,y) &= c_m(\overline{K_b};x,y) \end{aligned}$$

für $a,b \geq 1$.

Beweis:
Wir wählen eine beliebige Ecke $v \in V(\overline{K_s})$. Diese dürfen wir unecht oder echt färben. Im ersten Fall müssen wir die m echt einfarbig gefärbten Kanten noch aus dem verbliebenen Graphen $K_r * \overline{K_{s-1}}$ wählen, und daher ergibt sich direkt der erste Summand der Gleichung.
Im zweiten Fall färben wir v echt und haben nun die Möglichkeit, von 0 bis zu $s-1$ weiteren Ecken aus $V(\overline{K_s})$ und von 0 bis zu β_i weiteren Ecken aus $V(K_r)$ derart auszuwählen, dass wir zusammen mit der Ecke v insgesamt genau $\frac{j(j-1)}{2}-(i+1)\,j$ Kanten erhalten, welche wir in derselben echten Farbe färben. Aufgrund der Nachbarschaftsverhältnisse dürfen wir keine weiteren Ecken mehr in dieser echten Farbe färben, da wir ansonsten mehr einfarbige Kanten in dieser Farbe erhalten würden, woraus schließlich der zweite Summand folgt.
q.e.d.

Wir betrachten hierzu nun ein einfaches Beispiel.

Beispiel 5.26 *Es sei der Graph K_5 gegeben, welchen wir auch als den Join $K_4 * \overline{K_1}$ auffassen können. Dann erhalten wir nach Satz 5.25 mit $m = 3$ und $\beta_0 = 2$*

$$\begin{aligned}
c_3(K_4 * \overline{K_1}; x, y) &= (x-y)\, c_3(K_4; x, y) \\
&+ \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} y \sum_{j=0}^{2} \binom{4}{j} c_{3-\frac{j(j-1)}{2}-(i+1)j}(K_{4-j} * \overline{K_{0-i}}; x-1, y-1) \\
&= (x-y)\, c_3(K_4; x, y) + y \sum_{j=0}^{2} \binom{4}{j} c_{3-\frac{j(j-1)}{2}-j}(K_{4-j}; x-1, y-1) \\
&= 4\,(x-y)\,(x-1)\,y \\
&+ y\big(c_3(K_4; x-1, y-1) + 4c_2(K_3; x-1, y-1) + 6c_0(K_2; x-1, y-1)\big)\ .
\end{aligned}$$

Aus den Beispielen 3.21 und 5.23 kennen wir

$$c_3(K_4; x, y) = 4\,(x-1)\,y$$

und

$$c_0(K_2; x, y) = x^2 - y\ .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_3(K_4 * \overline{K_1}; x, y) &= 4\,(x-y)\,(x-1)\,y + 4y\,(x-2)\,(y-1) \\
&+ 6y\,(x-1)^2 - 6y\,(y-1) \\
&= 4x^2y - 4xy - 4xy^2 + 4y^2 + 4xy^2 - 4xy - 8y^2 + 8y \\
&+ 6x^2y - 12xy + 6y - 6y^2 + 6y \\
&= 10y\left(x^2 - 2x - y + 2\right)\ .
\end{aligned}$$

Im Folgenden befassen wir uns nun mit einer einfachen Trenner-Eigenschaft.

5.3.5 Artikulationen zwischen vollständigen Graphen

In diesem Abschnitt wenden wir uns Trennern in Graphen zu. Weil sich dieses beim trivariaten chromatischen Polynom jedoch als sehr aufwendig erweist, beschränken wir uns hier auf den Fall, dass eine Artikulation mehrere vollständige Teilgraphen miteinander verbindet.

Satz 5.27 *Es sei für ein $s \geq 2$ der Graph $G = (V, E) = \bigcup_{i=1}^{s} K_{r_i}$ mit $\bigcap_{i=1}^{s} K_{r_i} = \{v\}$ für $v \in V$ und $r_i \geq 2$ gegeben. Weiterhin sei $N_{K_{r_i}}(v) = N(v) \cap K_{r_i}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
c_m(G; x, y) &= (x-y)\, c_m\,\Big(\dot{\bigcup}_{i=1}^{s} K_{r_i - 1}; x, y\Big) \\
&+ y \cdot \sum_{\left\{(I_1 \ldots, I_s) \in \mathcal{P}(N_{K_{r_1}}(v)) \times \ldots \times \mathcal{P} N_{K_{r_s}}(v)) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{s} \frac{(|I_i|+1)|I_i|}{2} \leq m\right\}} \\
&\quad c_{m - \sum_{i=1}^{s} \frac{(|I_i|+1)|I_i|}{2}}\,\Big(\dot{\bigcup}_{i=1}^{s} K_{r_i - |I_i| - 1}; x-1, y-1\Big)\ .
\end{aligned}$$

Eine Methode zur Berechnung der Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms von Graphen der Form $\dot{\bigcup}_{i=1}^{s} K_{r_i - 1}$ beziehungsweise $\dot{\bigcup}_{i=1}^{s} K_{r_i - |I_i| - 1}$ haben wir bereits in Korollar 5.12 vorgestellt.

Beweis:
Wir dürfen die Ecke v sowohl unecht als auch echt färben. Im ersten Fall gibt es hierfür $(x-y)$ Möglichkeiten. Für den verbleibenden Graphen $G-v$ bleiben daher noch m echt einfarbige Kanten zu wählen, so dass wir

$$(x-y)\, c_m\,(\dot{\bigcup}_{i=1}^{s} K_{r_i-1}; x, y)$$

Möglichkeiten erhalten.
Im zweiten Fall existieren y Möglichkeiten, die Ecke v echt zu färben. Wir dürfen bis zu $\sum_{i=1}^{s} |I_i|$ Ecken aus $N(v)$ mit $I_i \subseteq N_{K_{r_i}}(v)$ wählen, so dass $\sum_{i=1}^{s} \frac{(|I_i|+1)|I_i|}{2} \leq m$ erfüllt ist. Damit bleiben also noch $m - \sum_{i=1}^{s} \frac{(|I_i|+1)|I_i|}{2}$ Kanten aus dem Graphen $G - \sum_{i=1}^{s} I_i$ zu wählen. Wegen $N(v) = V(G-v)$ dürfen wir die für v gewählte echte Farbe nicht weiter verwenden. Damit ergeben sich hier

$$y \cdot \sum_{\left\{(I_1 \ldots, I_s) \in \mathcal{P}(N_{K_{r_1}}(v)) \times \ldots \times \mathcal{P}(N_{K_{r_s}}(v)) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{s} \frac{(|I_i|+1)|I_i|}{2} \leq m\right\}} c_{m - \sum_{i=1}^{s} \frac{(|I_i|+1)|I_i|}{2}}\,(\dot{\bigcup}_{i=1}^{s} K_{r_i - |I_i| - 1}; x-1, y-1)$$

Möglichkeiten.
q.e.d.

Wir führen zu dem in Abbildung 5.1 gezeigten Graphen eine Beispielberechnung durch.

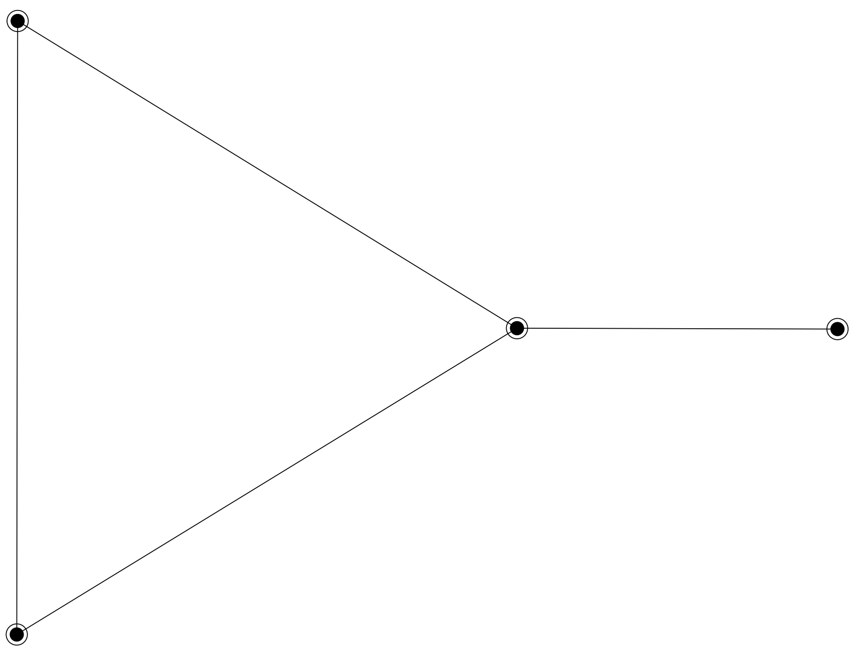


Abbildung 5.1: Graph aus Beispiel 5.28

Beispiel 5.28 *Es sei der Graph $G = (V, E) = K_3 \cup K_2$ mit $V(K_3) = \{1, 2, v\}$ und $V(K_2) = \{3, v\}$ aus Abbildung 5.1 gegeben, das heißt, v ist eine Artikulation in G. Weiter sei $m = 2$. Dann erhalten wir*

$$\begin{aligned} N_{K_3}(v) &= \{1, 2\} \\ N_{K_2}(v) &= \{3\} \end{aligned}$$

sowie weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(N_{K_3}(v)) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \\ \mathcal{P}(N_{K_2}(v)) &= \{\emptyset, \{3\}\} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(N_{K_3}(v)) \times \mathcal{P}(N_{K_2}(v)) &= \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{3\}), (\{1\}, \emptyset), (\{1\}, \{3\}), \\ &\quad (\{2\}, \emptyset), (\{2\}, \{3\}), (\{1, 2\}, \emptyset), (\{1, 2\}, \{3\})\} \ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &\left\{(I_1, \ldots, I_s) \in \mathcal{P}(N_{K_{r_1}}(v)) \times, \ldots, \times \mathcal{P}(N_{K_{r_s}}(v)) \middle| \sum_{i=1}^{s} \frac{(|I_i| + 1)\,|I_i|}{2} \leq 2 \right\} \\ &= \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{3\}), (\{1\}, \emptyset), (\{1\}, \{3\}), (\{2\}, \emptyset), (\{2\}, \{3\})\} \ . \end{aligned}$$

Damit bestimmen wir nun den Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_2(G; x, y) &= (x - y)\, c_2(K_2 \dot{\cup} K_1; x, y) \\ &+ y\big(c_2(K_2 \dot{\cup} K_1; x - 1, y - 1) + c_1(K_2; x - 1, y - 1) \\ &+ 2c_1(\overline{K_2}; x - 1, y - 1) + 2c_0(K_1; x - 1, y - 1)\big) \ . \end{aligned}$$

Es gilt offenbar

$$\begin{aligned} c_2(K_2 \dot{\cup} K_1; x, y) &= 0 \\ c_2(K_2 \dot{\cup} K_1; x - 1, y - 1) &= 0 \\ c_1(K_2; x - 1, y - 1) &= y - 1 \\ c_1(\overline{K_2}; x - 1, y - 1) &= 0 \ , \end{aligned}$$

und wie wir bereits in Satz 3.19 gesehen haben,

$$c_0(K_1; x - 1, y - 1) = x - 1 \ .$$

Hieraus erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} c_2(G; x, y) &= y c_1(K_2; x - 1, y - 1) + y 2 c_0(K_1; x - 1, y - 1) \\ &= y^2 + 2\,(x - 1)\, y \\ &= y\,(-3 + 2x + y) \ . \end{aligned}$$

Kapitel 6

Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir sowohl für das bivariate chromatische Polynom als auch für die Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms jeweils zwei allgemeine und rekursionsfreie Darstellungen bereitgestellt. Von den beiden Formeln für das bivariate chromatische Polynom und einer der beiden Gleichungen für die Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms haben wir bereits als recht nützliche Beweismittel Gebrauch gemacht. Sowohl diese drei Beziehungen als auch die weitere Darstellung für die Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms könnten möglicherweise auch für spätere Arbeiten als Beweismittel dienen. Wie wir exemplarisch gezeigt haben, eignen sich diese Formeln für konkrete Graphen jedoch weniger als eine effektive Berechnungsmethode, weshalb wir für bestimmte Graphentypen deutlich schnellere Alternativen eingeführt haben. Unter diesen Typen von Graphen befinden sich einerseits recht spezielle Graphenfamilien, welche allerdings einen guten Zugang für Studien zu chromatischen Polynomen liefern, andererseits jedoch auch bedeutsamere Familien wie vollständig partite Graphen oder Splitgraphen. Hier ist es in vielen Fällen sogar möglich, rekursionsfrei zu arbeiten. Ein weiteres wesentliches und in dieser Arbeit behandeltes Thema stellt die Nutzung der Eigenschaften von Trennern in Graphen zur Berechnung chromatischer Polynome dar, bietet sich doch gerade hierbei ein eventueller Ansatz für weiterführende Algorithmen auf diesem Gebiet. Schließlich haben wir für zwei spezielle Graphentypen jeweils einen Zusammenhang zwischen dem bivariaten chromatischen Polynom des Ausgangsgraphen und dem Matchingpolynom des dazugehörigen Komplements herausgestellt. Hier eröffnet sich nun nicht zuletzt die Frage, für welche weiteren Graphenfamilien ein ähnlicher Zusammenhang bestehen könnte.

Insgesamt stellt die weitere Suche nach Verallgemeinerungen vieler unserer Ergebnisse zum bivariaten chromatischen Polynom auf das trivariate chromatische Polynom und damit auf das Edge-Elimination-Polynomial eine mögliche Basis für einige weitere Nachforschungen dar.

Anhang A

Beispiele mit *Mathematica*

Im Folgenden führen wir zu mehreren Sätzen in dieser Schrift Beispiele an, welche wir mithilfe des Programms *Mathematica* ([37]) berechnen. Für die Berechnung verwenden wir die in den *Mathematica* Packages `Combinatorica` ([20]) und `GraphUtilities` ([17]) enthaltenen Implementierungen. Wir werden in jedem der nachfolgend aufgeführten Beispiele für jeweils mindestens einen Graphen G und eine Kante $e = \{v_1, v_2\} \in E(G)$ die Rekursion

$$P(G; x, y) = P(G - e; x, y) - P(G/e; x, y) + (x - y)\, P(G, v_1, v_2; x, y)$$

aus Satz 3.19 oder für eine in G fehlende Kante $f = \{w_1, w_2\} \notin E(G)$ deren Umstellung

$$P(G; x, y) = P(G + f; x, y) + P(G/f; x, y) - (x - y)\, P(G - w_1 - w_2; x, y)$$

aus Bemerkung 3.20 verwenden. Die erste dieser beiden Formeln wurde durch [21] unter dem Namen `BivariatesPolynom1` implementiert, die zweite haben wir daraus unter der Bezeichnung `BivariatesPolynom2` durch eine leichte Veränderung übernommen. Beide Funktionen verwenden die Implementierungen `EdgesWithVertices` und `Subgraph` nach [21], um zu einer beliebigen Eckenmenge eines Graphen den dazugehörigen induzierten Teilgraphen darzustellen. In einigen der folgenden Beispiele werden wir auch den univariaten Fall betrachten. Weil wir entgegen der nicht vorhandenen Definition von 0^0 in *Mathematica* von nun an stattdessen $0^0 = 1$ setzen, wie es etwa gemäß ([14], S. 1 ff.) sinnvoll ist, haben wir für den Fall $x = y$ die Implementierung des univariaten Falles gegebenenfalls entsprechend angepasst. Wir vergleichen diese dann stets mit der Implementierung des univariaten chromatischen Polynoms `ChromaticPolynomial` nach ([20], S.210 f.) aus dem Package `Combinatorica` ([20]), welche Satz 3.6, Bemerkung 3.8 sowie Beispiel 3.3 verwendet.

Beispiel A.1 *In diesem Beispiel verwenden wir neben den Rekursionen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2`*, angewandt auf einen Beispielgraphen, für $n = |V(G)|$ die Implementierung* `BivariatesPolynom3` *des bivariaten chromatischen Polynoms*

$$P(G; x, y) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} (x - y)^{n-i} \sum_{X \subseteq V(G) \ mit \ |X| = i} \ \sum_{\pi \in \Pi_I(G[X])} y^{|\pi|}$$

für einen beliebigen Graphen G nach Satz 4.1. Hierzu benötigen wir die Implementierung `IndependentSetPartitions` *nach [22], um die Menge aller unabhängigen Partitionen der Eckenmenge eines Graphen zu bestimmen. Auf den univariaten Fall verzichten wir hier. Wie die Berechnungen zeigen, ist die Methode aus Satz 4.1 zwar allen anderen unterlegen, jedoch benötigen wir sie in dieser Arbeit als effektives Beweismittel.*

```
<< Combinatorica`

<< GraphUtilities`

Clear[EdgesWithVertices];
EdgesWithVertices[v_, e_] :=
 Module[{i, j, n = Length[e], m = Length[v], edges = {}},
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
   For[j = 1, j ≤ m, j++,
     If[MemberQ[e[[i]], v[[j]]], AppendTo[edges, e[[i]]]; Break[];];]; edges]

Clear[SubGraph];
SubGraph[graph_, v_] := Combinatorica`Graph[EdgesWithVertices[v, Edges[graph]], v]

Clear[BivariatesPolynom1];
BivariatesPolynom1[graph_, x_, y_] :=
 x^Length[Vertices[graph]] /; Length[Edges[graph]] == 0
BivariatesPolynom1[graph_, x_, y_] :=
 Apply[Times, Map[BivariatesPolynom1[SubGraph[graph, #], x, y] &,
    Combinatorica`ConnectedComponents[graph]]] /;
  Not[Combinatorica`ConnectedGraphQ[graph]]
BivariatesPolynom1[graph_, x_, y_] := Module[{e, e1, e2, g1, g2, g3},
   e = Edges[graph][[1]];
   g1 = DeleteEdge[graph, e];
   g2 = MakeSimple[Contract[graph, e]];
   e1 = Min[e];
   e2 = Max[e];
   g3 = DeleteVertices[graph, {e1, e2}];
   Return[Expand[BivariatesPolynom1[g1, x, y] - BivariatesPolynom1[g2, x, y] +
      (x - y) BivariatesPolynom1[g3, x, y]]];] /; Length[Edges[graph]] > 0
$RecursionLimit = Infinity

∞

Clear[BivariatesPolynom2];
BivariatesPolynom2[graph_, x_, y_] :=
 Sum[Binomial[Length[Vertices[graph]], k] * (x - y) ^k *
    FunctionExpand[FactorialPower[y, Length[Vertices[graph]] - k]],
   {k, 0, Length[Vertices[graph]]}] /; Length[Edges[graph]] ==
   Length[Vertices[graph]] * (Length[Vertices[graph]] - 1) / 2
BivariatesPolynom2[graph_, x_, y_] :=
 Apply[Times, Map[BivariatesPolynom2[SubGraph[graph, #], x, y] &,
    Combinatorica`ConnectedComponents[graph]]] /;
  Not[Combinatorica`ConnectedGraphQ[graph]]
BivariatesPolynom2[graph_, x_, y_] := Module[{e, e1, e2, g1, g2, g3},
   e = Complement[Subsets[VertexList[graph], {2}], EdgeList[graph]][[1]];
   g1 = AddEdge[graph, e];
   g2 = MakeSimple[Contract[AddEdge[graph, e], e]];
   e1 = Min[e];
   e2 = Max[e];
   g3 = DeleteVertices[AddEdge[graph, e], {e1, e2}];
   Return[Expand[BivariatesPolynom2[g1, x, y] +
```

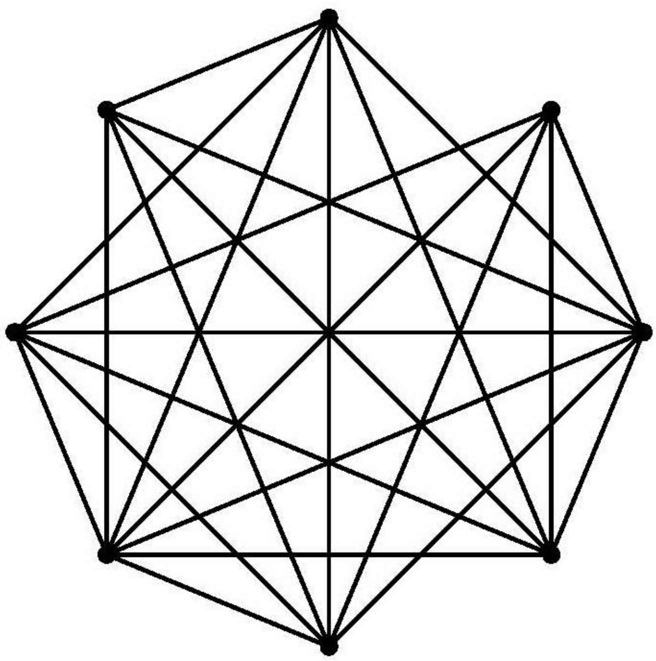
```
      BivariatesPolynom2[g2, x, y] - (x - y) * BivariatesPolynom2[g3, x, y]]];] /;
  Length[Edges[graph]] < Length[Vertices[graph]] * (Length[Vertices[graph]] - 1) / 2
$RecursionLimit = Infinity
```

∞

```
Clear[IndependentSetPartitions]
IndependentSetPartitions[graph_] :=
 Module[{i, j, n = Length[SetPartitions[VertexList[graph]]],
   sepa = SetPartitions[VertexList[graph]], IndependentPartitions = {}},
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
   append = True;
   For[j = 1, j ≤ Length[sepa[[i]]], j++,
    If[Not[IndependentSetQ[graph, sepa[[i]][[j]]]], append = False; Break[]];];
   If[append, AppendTo[IndependentPartitions, sepa[[i]]];]; IndependentPartitions]
```

```
Clear[BivariatesPolynom3]
BivariatesPolynom3[graph_, x_, y_] :=
 Sum[(x - y) ^ (Length[VertexList[graph]] - i) *
   Sum[Sum[FunctionExpand[FactorialPower[y, Length[IndependentSetPartitions[
          InduceSubgraph[graph, Subsets[VertexList[graph], {i}][[j]]]][[k]]]]],
     {k, 1, Length [IndependentSetPartitions[InduceSubgraph[graph,
          Subsets[VertexList[graph], {i}][[j]]]]]}],
    {j, 1, Length[Subsets[VertexList[graph], {i}]]}], {i, 0, Length[
    VertexList[graph]]}]
```

```
ShowGraph[
 G = DeleteEdges[Combinatorica`CompleteGraph[8], {{1, 2}, {1, 3}, {3, 4}, {6, 7}}]]
```



```
Timing[BivariatesPolynom1[G, x, y]]
```

```
{16.068, x^8 - 2616 y + 3252 x y - 2062 x^2 y + 896 x^3 y - 304 x^4 y + 88 x^5 y - 24 x^6 y + 3806 y^2 -
  4190 x y^2 + 2245 x^2 y^2 - 752 x^3 y^2 + 154 x^4 y^2 - 1249 y^3 + 962 x y^3 - 263 x^2 y^3 + 56 y^4}
Timing[BivariatesPolynom2[G, x, y]]
{0.219, x^8 - 2616 y + 3252 x y - 2062 x^2 y + 896 x^3 y - 304 x^4 y + 88 x^5 y - 24 x^6 y + 3806 y^2 -
  4190 x y^2 + 2245 x^2 y^2 - 752 x^3 y^2 + 154 x^4 y^2 - 1249 y^3 + 962 x y^3 - 263 x^2 y^3 + 56 y^4}
Timing[Expand[BivariatesPolynom3[G, x, y]]]
{155.05, x^8 - 2616 y + 3252 x y - 2062 x^2 y + 896 x^3 y - 304 x^4 y + 88 x^5 y - 24 x^6 y + 3806 y^2 -
  4190 x y^2 + 2245 x^2 y^2 - 752 x^3 y^2 + 154 x^4 y^2 - 1249 y^3 + 962 x y^3 - 263 x^2 y^3 + 56 y^4}
```

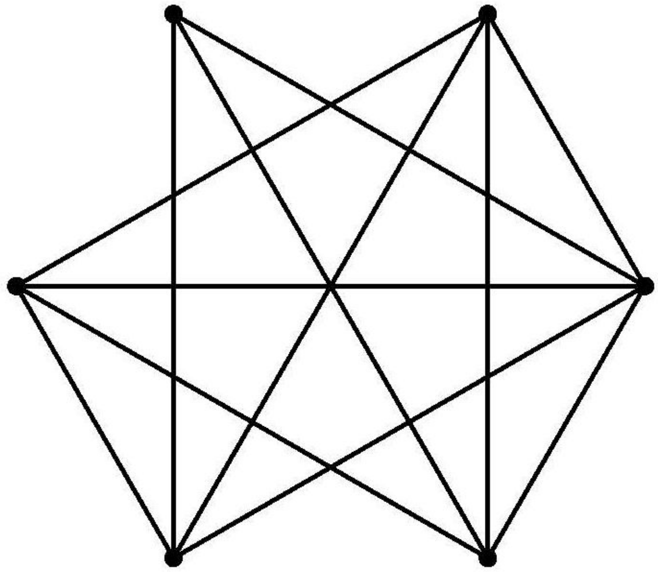
Beispiel A.2 *An dieser Stelle bestimmen wir das bivariate chromatische Polynom mithilfe der oben genannten Implementierungen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *sowie unter Verwendung von Satz 4.3 für einen Beispielgraphen. Für die in Satz 4.3 eingeführte Darstellung*

$$P(G;x,y) \;=\; \sum_{\pi\in\Pi_I(G)} \sum_{i=0}^{|\{X\in\pi||X|=1\}|} \binom{|\{X\in\pi|\,|X|=1\}|}{i} (x-y)^i\, y^{\underline{|\pi|-i}}$$

für einen beliebigen Graphen G benötigen wir neben der Menge aller unabhängigen Partitionen, welche wir bereits beim ersten Beispiel verwendet haben, zusätzlich für jede dieser Partitionen die Kardinalität der Menge aller einelementigen Blöcke. Daher fügen wir zusätzlich die Implementierung der Kardinalität der Menge aller einelementigen Blöcke einer unabhängigen Partition `IndependentSetPartitionNumberSingletons1` *sowie die Implementierung des bivariaten chromatischen Polynoms* `BivariatesPolynom4` *nach Satz 4.3 hinzu. Auch hier verzichten wir auf den univariaten Fall.*
Ähnlich wie beim ersten Beispiel zeigt sich auch bei der Gleichung aus Satz 4.3 ein deutlicher zeitlicher Nachteil, jedoch ist auch sie vorrangig als Beweismittel vorgesehen.

```
Clear[IndependentSetPartitionNumberSingletons]
IndependentSetPartitionNumberSingletons[graph_, a_] :=
 Module[{j, n = Length[IndependentSetPartitions[graph][[a]]],
    isep = IndependentSetPartitions[graph][[a]],
    SingletonNumberIndependentPartition = {}},
   For[j = 1, j ≤ n, j++,
    If[Length[isep[[j]]] == 1,
      AppendTo[SingletonNumberIndependentPartition, isep[[j]]]];
   ];
   Length[SingletonNumberIndependentPartition]
  ]
Clear[BivariatesPolynom4]
BivariatesPolynom4[graph_, x_, y_] := Expand[
   Sum[Sum[Binomial[IndependentSetPartitionNumberSingletons[graph, k], l] *
       (x - y) ^l * FunctionExpand[
        FactorialPower[y, Length [IndependentSetPartitions[graph][[k]]] - l]],
      {l, 0, IndependentSetPartitionNumberSingletons[graph, k]}],
     {k, 1, Length[IndependentSetPartitions[graph]]}]
  ]
```

```
ShowGraph[G = DeleteEdges[Combinatorica`CompleteGraph[6], {{1, 2}, {2, 3}, {4, 5}}]]
```



```
Timing[BivariatesPolynom1[G, x, y]]
```

$\{0.266,\ x^6 - 60\,y + 80\,x\,y - 56\,x^2\,y + 28\,x^3\,y - 12\,x^4\,y + 66\,y^2 - 68\,x\,y^2 + 29\,x^2\,y^2 - 8\,y^3\}$

```
Timing[BivariatesPolynom2[G, x, y]]
```

$\{0.093,\ x^6 - 60\,y + 80\,x\,y - 56\,x^2\,y + 28\,x^3\,y - 12\,x^4\,y + 66\,y^2 - 68\,x\,y^2 + 29\,x^2\,y^2 - 8\,y^3\}$

```
Timing[BivariatesPolynom4[G, x, y]]
```

$\{18.626,\ x^6 - 60\,y + 80\,x\,y - 56\,x^2\,y + 28\,x^3\,y - 12\,x^4\,y + 66\,y^2 - 68\,x\,y^2 + 29\,x^2\,y^2 - 8\,y^3\}$

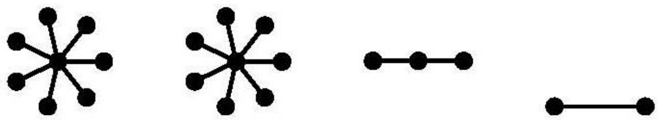
Beispiel A.3 *Hier betrachten wir zwei Beispielgraphen der Form $H = \sum_{m=1}^{N} t_m S_{m+1}$ mit $t_m \geq 0$ für alle $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$ und $N \geq 1$, wobei der zweite Graph aufgrund seines Umfanges allerdings nicht mit abgebildet wird. Für den ersten Graphen berechnen wir das bivariate chromatische Polynom sowohl mithilfe der Rekursion `BivariatesPolynom1` als auch durch die Verwendung von Korollar 4.9. Hier haben wir die dort vorgestellte Formel*

$$P(H; x, y) \;=\; \prod_{m=1}^{N} \left(P(S_{m+1}; x, y)\right)^{t_m}$$

zur Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms eines Graphen des oben genannten Typs auf den Beispielgraphen angewandt direkt eingegeben. Es zeigt sich ein deutlicher zeitlicher Vorteil der Methode aus Korollar 4.9 gegenüber der Rekursion `BivariatesPolynom1`.
Auf die Verwendung der Rekursion `BivariatesPolynom2` verzichten wir, weil für jeden Graphen des untersuchten Typs die Anzahl der tatsächlich vorhandenen Kanten im Vergeich zur Anzahl aller möglichen Kanten stets sehr gering ausfällt und sich die Methode mittels Kantenlöschung daher besser eignet als die der Kantenaddition. Ferner verzichten wir auf die Eingabe des univariaten Falles, weil die Komponenten des betrachteten Graphentyps selbstverständlich Bäume sind und sich daher die bereits bekannte Beziehung aus Beispiel 3.3 für jede einzelne Komponente ergäbe.
Beim zweiten Graphen, welcher 350 *Ecken besitzt, zeigt sich, dass die Methode aus Korollar*

4.9 zur Berechnung des Ergebnisses weniger als eine Sekunde benötigt, während die Eingabe der Rekursion `BivariatesPolynom1` *nach einer Stunde noch erfolglos bleibt. Das Polynom geben wir aufgrund seiner Länge allerdings nicht mit aus.*

```
ShowGraph[G1 = Combinatorica`GraphUnion[Combinatorica`Star[8],
   Combinatorica`Star[8], Combinatorica`Star[3], Combinatorica`Star[2]]]
```



```
Timing[BivariatesPolynom1[G1, x, y]]
```

$$\begin{aligned}\{&306.713,\ x^{21} - 2x^{13}y + 14x^{14}y - 42x^{15}y + 70x^{16}y - 70x^{17}y + 43x^{18}y - 17x^{19}y + x^5y^2 - 14x^6y^2 +\\ &91x^7y^2 - 364x^8y^2 + 1001x^9y^2 - 2004x^{10}y^2 + 3023x^{11}y^2 - 3514x^{12}y^2 + 3185x^{13}y^2 -\\ &2240x^{14}y^2 + 1183x^{15}y^2 - 435x^{16}y^2 + 93x^{17}y^2 + x^2y^3 - 17x^3y^3 + 133x^4y^3 - 637x^5y^3 +\\ &2093x^6y^3 - 5005x^7y^3 + 9011x^8y^3 - 12457x^9y^3 + 13349x^{10}y^3 - 11081x^{11}y^3 + 7021x^{12}y^3 -\\ &3269x^{13}y^3 + 1029x^{14}y^3 - 175x^{15}y^3 - y^4 + 16xy^4 - 119x^2y^4 + 546x^3y^4 - 1729x^4y^4 + 4004x^5y^4 -\\ &7007x^6y^4 + 9436x^7y^4 - 9849x^8y^4 + 7938x^9y^4 - 4851x^{10}y^4 + 2156x^{11}y^4 - 637x^{12}y^4 + 98x^{13}y^4\}\end{aligned}$$

```
Timing[Expand[
  ((x - y) * x^7 + y * (x - 1) ^7) ^2 * ((x - y) * x^2 + y * (x - 1) ^2) * ((x - y) * x + y * (x - 1))]]
```

$$\begin{aligned}\{&0.,\ x^{21} - 2x^{13}y + 14x^{14}y - 42x^{15}y + 70x^{16}y - 70x^{17}y + 43x^{18}y - 17x^{19}y + x^5y^2 - 14x^6y^2 +\\ &91x^7y^2 - 364x^8y^2 + 1001x^9y^2 - 2004x^{10}y^2 + 3023x^{11}y^2 - 3514x^{12}y^2 + 3185x^{13}y^2 -\\ &2240x^{14}y^2 + 1183x^{15}y^2 - 435x^{16}y^2 + 93x^{17}y^2 + x^2y^3 - 17x^3y^3 + 133x^4y^3 - 637x^5y^3 +\\ &2093x^6y^3 - 5005x^7y^3 + 9011x^8y^3 - 12457x^9y^3 + 13349x^{10}y^3 - 11081x^{11}y^3 + 7021x^{12}y^3 -\\ &3269x^{13}y^3 + 1029x^{14}y^3 - 175x^{15}y^3 - y^4 + 16xy^4 - 119x^2y^4 + 546x^3y^4 - 1729x^4y^4 + 4004x^5y^4 -\\ &7007x^6y^4 + 9436x^7y^4 - 9849x^8y^4 + 7938x^9y^4 - 4851x^{10}y^4 + 2156x^{11}y^4 - 637x^{12}y^4 + 98x^{13}y^4\}\end{aligned}$$

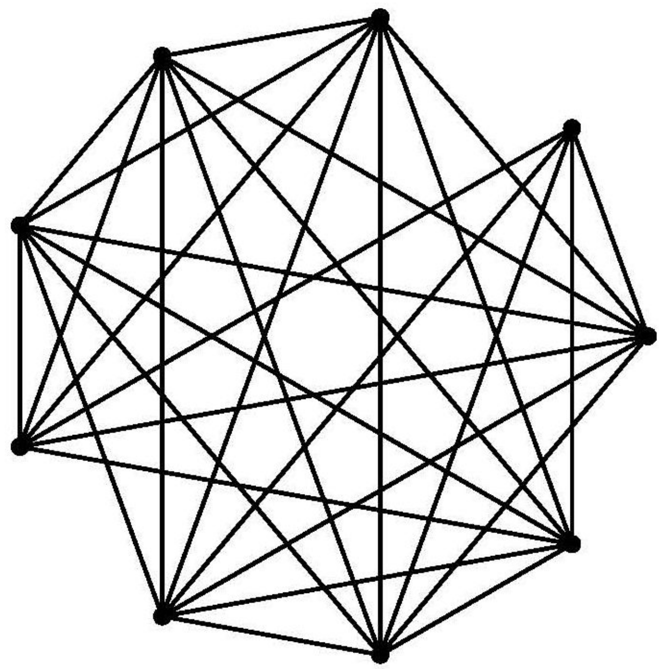
```
ShowGraph[
  G2 = Combinatorica`GraphUnion[Combinatorica`Star[100], Combinatorica`Star[100],
    Combinatorica`Star[99], Combinatorica`Star[40], Combinatorica`Star[11]]];

TimeConstrained[BivariatesPolynom1[G2, x, y];, 3600]

$Aborted

Timing[
 Expand[((x - y) * x^(100) + y * (x - 1) ^(100)) ^2 * ((x - y) * x^(99) + y * (x - 1) ^(99)) *
    ((x - y) * x^(40) + y * (x - 1) ^(40)) * ((x - y) * x^(11) + y * (x - 1) ^(11))];]

{0.296, Null}
```

Beispiel A.4 *Dieses Beispiel umfasst Berechnungen zu drei verschiedenen Beispielgraphen, wobei wir Satz 4.11 verwenden. Hier gehen wir ähnlich vor wie in Beispiel A.3, außer dass wir für die erste der drei Beispielberechnungen die beiden bereits oben auftretenden Darstellungen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *der Rekursionen aus Satz 3.19 und Bemerkung 3.20 parallel verwenden. Die Eingabe der Gleichung*

$$\begin{aligned} P(G;x,y) &= \sum_{b_N=0}^{t_N} \binom{t_N}{b_N} N^{b_N} \sum_{b_{N-1}=0}^{t_{N-1}} \binom{t_{N-1}}{b_{N-1}} (N-1)^{b_{N-1}} \\ &\quad \dots \sum_{b_2=0}^{t_2} \binom{t_2}{b_2} 2^{b_2} \sum_{b_1=0}^{t_1} \binom{t_1}{b_1} 1^{b_1} \\ &\quad \sum_{i=0}^{n-2b_N-\ldots-2b_1} \binom{n-2b_N-\ldots-2b_1}{i} (x-y)^i \, y^{\underline{n-b_N-\ldots-b_1-i}} \end{aligned}$$

aus Satz 4.11 für einen Graphen $G = K_n - \sum\limits_{m=1}^{N} t_m S_{m+1}$ *mit* $t_m \geq 0$ *für alle* $m \in \{1, \ldots, N\}$ *und* $N \geq 1$ *sowie* $n \geq \sum_{m=0}^{N} t_m (m+1)$ *erfolgt auch hier wieder direkt auf den ersten sowie den dritten Beispielgraphen angewandt.*
Zu den ersten zwei Bespielgraphen bestimmen wir das univariate chromatische Polynom mithilfe der Implementierung `ChromaticPolynomial` *und der Eingabe der Formel aus Korollar 4.13, wobei wir den zweiten und dritten Graphen aufgrund mangelnder Übersichtlichkeit nicht mehr abbilden.*
Es zeigt sich bereits beim ersten Graphen, dass die Rekursion `BivariatesPolynom1` *am ungünstigsten ist, gefolgt von der Rekursion* `BivariatesPolynom2`*. Darauf folgt die Rekursion* `ChromaticPolynomial` *für den univariaten Fall, was der zweite Graph verdeutlicht.*
Für das dritte Beispiel betrachten wir lediglich die Implementierung `BivariatesPolynom2` *im Vergleich zur Beziehung aus Satz 4.11. Dieses hat den Grund, dass sich bei Graphen des vorliegenden Typs die Methode der Kantenaddition sehr viel besser eignet als die der Kantenlöschung, weil diesen Graphen stets nur wenige Kanten im Vergleich zum vollständigen Graphen mit derselben Eckenanzahl fehlen. Nach Satz 3.19 und Beispiel 3.17 lässt sich das bivariate chromatische Polynom für leere oder vollständige Graphen schließlich besonders einfach ermitteln. Beim dritten Graphen liefert nur noch die direkte Eingabe der Formel aus Satz 4.11 ein Ergebnis, und dieses bereits nach etwa* 11 *Sekunden, welches wir jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht mehr mit ausgeben. Zusammenfassend sind die Methoden aus Satz 4.11 und Korollar 4.13 den anderen also vorzuziehen.*

```
ShowGraph[G1 = DeleteEdges[Combinatorica`CompleteGraph[9],
   {{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {5, 6}, {5, 7}, {8, 9}}]]
```



```
Timing[BivariatesPolynom1[G1, x, y]]
```

$\{137.125,\ x^9 + 17280\,y - 21288\,x\,y + 13332\,x^2\,y - 5688\,x^3\,y + 1874\,x^4\,y - 515\,x^5\,y + 126\,x^6\,y - 30\,x^7\,y - 27648\,y^2 + 31030\,x\,y^2 - 17218\,x^2\,y^2 + 6212\,x^3\,y^2 - 1580\,x^4\,y^2 + 263\,x^5\,y^2 + 11484\,y^3 - 10225\,x\,y^3 + 3976\,x^2\,y^3 - 734\,x^3\,y^3 - 1114\,y^4 + 462\,x\,y^4\}$

```
Timing[BivariatesPolynom2[G1, x, y]]
```

$\{0.359,\ x^9 + 17280\,y - 21288\,x\,y + 13332\,x^2\,y - 5688\,x^3\,y + 1874\,x^4\,y - 515\,x^5\,y + 126\,x^6\,y - 30\,x^7\,y - 27648\,y^2 + 31030\,x\,y^2 - 17218\,x^2\,y^2 + 6212\,x^3\,y^2 - 1580\,x^4\,y^2 + 263\,x^5\,y^2 + 11484\,y^3 - 10225\,x\,y^3 + 3976\,x^2\,y^3 - 734\,x^3\,y^3 - 1114\,y^4 + 462\,x\,y^4\}$

```
Timing[Expand[Sum[Binomial[1, c] * 3^c * Sum[Binomial[1, b] * 2^b *
      Sum[Binomial[1, a] * 1^a * Sum[Binomial[9 - 2 * c - 2 * b - 2 * a, i] *
          (x - y)^i * FunctionExpand[FactorialPower[y, 9 - c - b - a - i]],
        {i, 0, 9 - 2 * c - 2 * b - 2 * a}], {a, 0, 1}], {b, 0, 1}], {c, 0, 1}]]]
```

$\{0.047,\ x^9 + 17280\,y - 21288\,x\,y + 13332\,x^2\,y - 5688\,x^3\,y + 1874\,x^4\,y - 515\,x^5\,y + 126\,x^6\,y - 30\,x^7\,y - 27648\,y^2 + 31030\,x\,y^2 - 17218\,x^2\,y^2 + 6212\,x^3\,y^2 - 1580\,x^4\,y^2 + 263\,x^5\,y^2 + 11484\,y^3 - 10225\,x\,y^3 + 3976\,x^2\,y^3 - 734\,x^3\,y^3 - 1114\,y^4 + 462\,x\,y^4\}$

```
Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G1, y]]]
```

$\{0.047,\ 17280\,y - 48936\,y^2 + 55846\,y^3 - 34245\,y^4 + 12524\,y^5 - 2829\,y^6 + 389\,y^7 - 30\,y^8 + y^9\}$

```
Timing[Expand[Sum[Binomial[1, c] * 3^c *
    Sum[Binomial[1, b] * 2^b * Sum[Binomial[1, a] * 1^a * FunctionExpand[
        FactorialPower[y, 9 - c - b - a]], {a, 0, 1}], {b, 0, 1}], {c, 0, 1}]]]
```

$\{0.016,\ 17280\,y - 48936\,y^2 + 55846\,y^3 - 34245\,y^4 + 12524\,y^5 - 2829\,y^6 + 389\,y^7 - 30\,y^8 + y^9\}$

```
ShowGraph[G2 = DeleteEdges[Combinatorica`CompleteGraph[30], {{1, 2}, {1, 3}, {1, 4},
    {1, 5}, {6, 7}, {6, 8}, {6, 9}, {10, 11}, {10, 12}, {13, 14}, {15, 16}}]];
```

```
Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G2, y]]]
```

```
{16.38,
 -5 944 842 492 865 478 752 453 263 360 000 y + 23 636 170 142 233 395 889 415 454 720 000 y^2 -
  42 195 949 806 597 582 795 921 063 936 000 y^3 + 45 602 483 131 592 823 674 986 078 003 200 y^4 -
  33 813 671 694 304 696 617 086 066 202 624 y^5 + 18 441 792 136 612 906 567 580 741 810 688 y^6 -
  7 733 039 674 613 584 473 954 025 197 696 y^7 + 2 570 198 894 471 688 092 715 460 628 736 y^8 -
  692 180 682 918 107 150 051 272 594 656 y^9 + 153 548 420 823 323 893 598 946 152 384 y^10 -
  28 409 719 659 955 192 752 961 848 520 y^11 + 4 426 217 897 398 187 225 322 124 720 y^12 -
  584 923 881 189 570 774 317 069 810 y^13 + 65 919 730 109 996 829 489 974 210 y^14 -
  6 359 779 293 710 370 704 173 085 y^15 + 526 534 417 890 905 521 479 260 y^16 -
  37 449 182 213 968 354 589 720 y^17 + 2 287 677 108 278 542 824 935 y^18 -
  119 839 733 626 238 701 415 y^19 + 5 367 008 504 620 362 290 y^20 - 204 510 777 609 959 810 y^21 +
  6 585 306 852 374 525 y^22 - 177 493 064 569 355 y^23 + 3 952 301 815 880 y^24 -
  71 398 722 956 y^25 + 1 019 643 257 y^26 - 11 073 929 y^27 + 85 914 y^28 - 424 y^29 + y^30}
```

```
Timing[
 Expand[Sum[Binomial[1, d] * 4 ^d * Sum[Binomial[1, c] * 3 ^c * Sum[Binomial[1, b] * 2 ^b *
        Sum[Binomial[2, a] * 1 ^a * FunctionExpand[FactorialPower[y, 30 - d - c - b - a]],
         {a, 0, 2}], {b, 0, 1}], {c, 0, 1}], {d, 0, 1}]]]
```

```
{0.031,
 -5 944 842 492 865 478 752 453 263 360 000 y + 23 636 170 142 233 395 889 415 454 720 000 y^2 -
  42 195 949 806 597 582 795 921 063 936 000 y^3 + 45 602 483 131 592 823 674 986 078 003 200 y^4 -
  33 813 671 694 304 696 617 086 066 202 624 y^5 + 18 441 792 136 612 906 567 580 741 810 688 y^6 -
  7 733 039 674 613 584 473 954 025 197 696 y^7 + 2 570 198 894 471 688 092 715 460 628 736 y^8 -
  692 180 682 918 107 150 051 272 594 656 y^9 + 153 548 420 823 323 893 598 946 152 384 y^10 -
  28 409 719 659 955 192 752 961 848 520 y^11 + 4 426 217 897 398 187 225 322 124 720 y^12 -
  584 923 881 189 570 774 317 069 810 y^13 + 65 919 730 109 996 829 489 974 210 y^14 -
  6 359 779 293 710 370 704 173 085 y^15 + 526 534 417 890 905 521 479 260 y^16 -
  37 449 182 213 968 354 589 720 y^17 + 2 287 677 108 278 542 824 935 y^18 -
  119 839 733 626 238 701 415 y^19 + 5 367 008 504 620 362 290 y^20 - 204 510 777 609 959 810 y^21 +
  6 585 306 852 374 525 y^22 - 177 493 064 569 355 y^23 + 3 952 301 815 880 y^24 -
  71 398 722 956 y^25 + 1 019 643 257 y^26 - 11 073 929 y^27 + 85 914 y^28 - 424 y^29 + y^30}
```

```
ShowGraph[
  G3 = DeleteEdges[Combinatorica`CompleteGraph[40], {{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5},
      {1, 6}, {7, 8}, {7, 9}, {7, 10}, {7, 11}, {12, 13}, {12, 14}, {12, 15}, {12, 16},
      {17, 18}, {17, 19}, {17, 20}, {21, 22}, {23, 24}, {25, 26}, {27, 28}}]];

TimeConstrained[BivariatesPolynom2[G3, x, y], 3600]
```

```
$Aborted
```

```
Timing[Expand[
    Sum[Binomial[1, e] * 5 ^e *
      Sum[Binomial[2, d] * 4 ^d *
        Sum[Binomial[1, c] * 3 ^c * Sum[Binomial[0, b] * 2 ^b * Sum[Binomial[4, a] *
              1 ^a * Sum[Binomial[40 - 2 * e - 2 * d - 2 * c - 2 * b - 2 * a, i] * (x - y) ^
                  i * FunctionExpand[FactorialPower[y, 40 - e - d - c - b - a - i]],
                {i, 0, 40 - 2 * e - 2 * d - 2 * c - 2 * b - 2 * a}], {a, 0, 4}],
           {b, 0, 0}], {c, 0, 1}], {d, 0, 2}], {e, 0, 1}]];]
```

```
{11.029, Null}
```

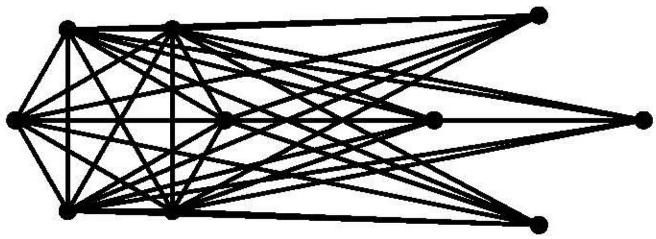
Beispiel A.5 *Unsere Vorgehensweise an dieser Stelle ähnelt wieder der aus den vorigen bei-*

den Beispielen. Hier betrachten wir exemplarisch zwei Graphen und verwenden neben den beiden Rekursionen `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *die Relation*

$$P(G;x,y) \quad = \quad \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} (x-y)^{s-t}\, y^{\underline{t}}\, (x-t)^k$$

aus Satz 4.15 für einen Graphen $G = K_s * \overline{K_k}$ mit $s \geq 1$ und $k \geq 1$ angewandt auf beide Graphen.
Den univariaten Fall geben wir beim ersten Graphen jeweils mithilfe der Implementierung `ChromaticPolynomial` *sowie der direkten Eingabe der Gleichung aus Korollar 4.17 mit an, erwähnen jedoch noch einmal, dass die Beziehung aus Korollar 4.17 bereits bekannt ist.*
Wie im vorausgehenden Beispiel sehen wir, dass die Rekursionen `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *weniger geeignet sind als die Methode aus Satz 4.15.*
Beim zweiten Graphen verzichten wir auf die Ausgabe seiner Darstellung und vergleichen lediglich die Dauer der Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms mittels der Implementierungen `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *mit der Dauer der Berechnung mithilfe der Formel aus Satz 4.15. Es zeigt sich, dass letztere das Ergebnis innerhalb von weniger als einer Sekunde liefert, während die erstgenannten beiden Methoden jeweils nach einer Stunde ohne Ergebnis abbrechen.*

```
ShowGraph[G1 = GraphJoin[Combinatorica`CompleteGraph[6], EmptyGraph[4]]]
```



```
Timing[BivariatesPolynom1[G1, x, y]]
```

$\{1479.97,\ x^{10} - 155520\,y + 193680\,x\,y - 120960\,x^2\,y + 50760\,x^3\,y - 16200\,x^4\,y + 4230\,x^5\,y - 954\,x^6\,y + 196\,x^7\,y - 39\,x^8\,y + 265104\,y^2 - 306156\,x\,y^2 + 174024\,x^2\,y^2 - 64596\,x^3\,y^2 + 17380\,x^4\,y^2 - 3480\,x^5\,y^2 + 465\,x^6\,y^2 - 127140\,y^3 + 123930\,x\,y^3 - 55620\,x^2\,y^3 + 14340\,x^3\,y^3 - 1935\,x^4\,y^3 + 17910\,y^4 - 11400\,x\,y^4 + 2340\,x^2\,y^4 - 360\,y^5\}$

```
Timing[BivariatesPolynom2[G1, x, y]]
```

$\{0.249,\ x^{10} - 155520\,y + 193680\,x\,y - 120960\,x^2\,y + 50760\,x^3\,y - 16200\,x^4\,y + 4230\,x^5\,y - 954\,x^6\,y + 196\,x^7\,y - 39\,x^8\,y + 265104\,y^2 - 306156\,x\,y^2 + 174024\,x^2\,y^2 - 64596\,x^3\,y^2 + 17380\,x^4\,y^2 - 3480\,x^5\,y^2 + 465\,x^6\,y^2 - 127140\,y^3 + 123930\,x\,y^3 - 55620\,x^2\,y^3 + 14340\,x^3\,y^3 - 1935\,x^4\,y^3 + 17910\,y^4 - 11400\,x\,y^4 + 2340\,x^2\,y^4 - 360\,y^5\}$

```
Timing[Expand[Sum[Binomial[6, t] * (x - y) ^ (6 - t) *
    FunctionExpand[FactorialPower[y, t]] * (x - t) ^4, {t, 0, 6}]]]
```

```
{0.015, x^10 - 155 520 y + 193 680 x y - 120 960 x^2 y + 50 760 x^3 y - 16 200 x^4 y +
  4230 x^5 y - 954 x^6 y + 196 x^7 y - 39 x^8 y + 265 104 y^2 - 306 156 x y^2 + 174 024 x^2 y^2 -
  64 596 x^3 y^2 + 17 380 x^4 y^2 - 3480 x^5 y^2 + 465 x^6 y^2 - 127 140 y^3 + 123 930 x y^3 -
  55 620 x^2 y^3 + 14 340 x^3 y^3 - 1935 x^4 y^3 + 17 910 y^4 - 11 400 x y^4 + 2340 x^2 y^4 - 360 y^5}

Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G1, y]]]

{0.063, -155 520 y + 458 784 y^2 - 554 256 y^3 +
  366 624 y^4 - 148 176 y^5 + 38 290 y^6 - 6369 y^7 + 661 y^8 - 39 y^9 + y^10}

Timing[Expand[FunctionExpand[FactorialPower[y, 6]] * (y - 6) ^4]]

{0., -155 520 y + 458 784 y^2 - 554 256 y^3 +
  366 624 y^4 - 148 176 y^5 + 38 290 y^6 - 6369 y^7 + 661 y^8 - 39 y^9 + y^10}

ShowGraph[G2 = GraphJoin[Combinatorica`CompleteGraph[15], EmptyGraph[35]]];

TimeConstrained[BivariatesPolynom1[G2, x, y], 3600]

$Aborted

TimeConstrained[BivariatesPolynom2[G2, x, y], 3600]

$Aborted

Timing[Expand[Sum[Binomial[15, t] * (x - y) ^ (15 - t) *
      FunctionExpand[FactorialPower[y, t]] * (x - t) ^35, {t, 0, 15}]];]

{0.156, Null}
```

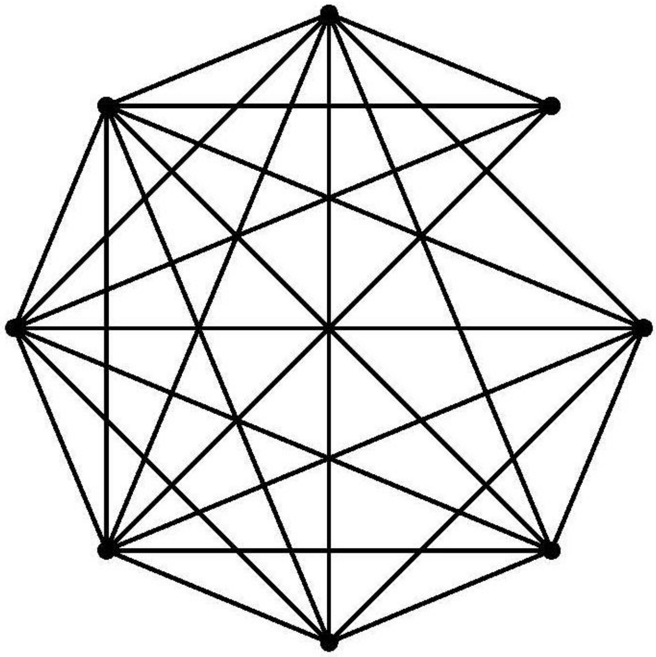
Beispiel A.6 *Für die nun folgenden Betrachtungen haben wir neben den beiden Rekursionen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *die Beziehung*

$$P(G;x,y) \quad = \quad (x-y)\,P(K_s;x,y) + y\,(P(K_s;x-1,y-1) + (s-r)\,P(K_{s-1};x-1,y-1))$$

für Graphen $G = (V,E)$, welche jeweils aus einem K_s und einer Ecke v entstehen, indem man v durch einen Join mit einem $K_r \subset K_s$ verbindet, aus Satz 4.19 unter der Bezeichnung `BivariatesPolynom5` *implementiert. Für die zwei nachfolgend angegebenen Beispielgraphen bestimmen wir das bivariate chromatische Polynom zunächst mithilfe der Rekursionen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2`*, um es hinterher unter Verwendung von Satz 4.19 mittels der Implementierung* `BivariatesPolynom5` *zu berechnen. Für die in dieser Gleichung auftretenden bivariaten chromatischen Polynome implementieren wir jeweils die Formel für das bivariate chromatische Polynom des vollständigen Graphen gemäß Beispiel 3.17 unter der Bezeichnung* `BivariatesPolynomKs`*. Weil der zweite Graph bereits* 200 *Ecken besitzt, bilden wir ihn nicht mit ab und messen für die Berechnung seines bivariaten chromatischen Polynoms nur die Zeit, ohne einen Output zu erzeugen. Zudem sehen wir von einer Betrachtung des univariaten Falles ab, weil sich dieser als sehr einfach erweist.*
Abschließend lässt sich festhalten, dass sich die Methode aus Satz 4.19, vor allem für sehr große Graphen, im Gegensatz zu allen anderen Vorgehensweisen am besten eignet, wie der zweite Beispielgraph zeigt.

```
Clear[BivariatesPolynomKs];
BivariatesPolynomKs[s_, x_, y_] :=
 Sum[Binomial[s, k] * (x - y) ^k * FunctionExpand[FactorialPower[y, s - k]], {k, 0, s}]
```

```
Clear[BivariatesPolynom5];
BivariatesPolynom5[s_, r_, x_, y_] := (x - y) * BivariatesPolynomKs[s, x, y] + y *
   (BivariatesPolynomKs[s, x - 1, y - 1] + (s - r) * BivariatesPolynomKs[s - 1, x - 1, y - 1])
ShowGraph[G1 = DeleteEdges[Combinatorica`CompleteGraph[8], {{1, 8}, {1, 7}, {1, 6}}]]
```



```
Timing[Expand[BivariatesPolynom1[G1, x, y]]]
```

$\{17.785,\ x^8 - 2880\,y + 3600\,x\,y - 2280\,x^2\,y + 984\,x^3\,y - 330\,x^4\,y + 94\,x^5\,y - 25\,x^6\,y + 4176\,y^2 - 4620\,x\,y^2 + 2470\,x^2\,y^2 - 820\,x^3\,y^2 + 165\,x^4\,y^2 - 1360\,y^3 + 1050\,x\,y^3 - 285\,x^2\,y^3 + 60\,y^4\}$

```
Timing[Expand[BivariatesPolynom2[G1, x, y]]]
```

$\{0.031,\ x^8 - 2880\,y + 3600\,x\,y - 2280\,x^2\,y + 984\,x^3\,y - 330\,x^4\,y + 94\,x^5\,y - 25\,x^6\,y + 4176\,y^2 - 4620\,x\,y^2 + 2470\,x^2\,y^2 - 820\,x^3\,y^2 + 165\,x^4\,y^2 - 1360\,y^3 + 1050\,x\,y^3 - 285\,x^2\,y^3 + 60\,y^4\}$

```
Timing[Expand[BivariatesPolynom5[7, 4, x, y]]]
```

$\{0.016,\ x^8 - 2880\,y + 3600\,x\,y - 2280\,x^2\,y + 984\,x^3\,y - 330\,x^4\,y + 94\,x^5\,y - 25\,x^6\,y + 4176\,y^2 - 4620\,x\,y^2 + 2470\,x^2\,y^2 - 820\,x^3\,y^2 + 165\,x^4\,y^2 - 1360\,y^3 + 1050\,x\,y^3 - 285\,x^2\,y^3 + 60\,y^4\}$

```
ShowGraph[G2 = DeleteEdges[Combinatorica`CompleteGraph[200], {{1, 200}, {1, 199},
      {1, 198}, {1, 197}, {1, 196}, {1, 195}, {1, 194}, {1, 193}, {1, 192}}]];
TimeConstrained[BivariatesPolynom1[G2, x, y];, 3600]

No more memory available.
Mathematica kernel has shut down.
Try quitting other applications and then retry.

TimeConstrained[BivariatesPolynom2[G2, x, y];, 3600]

$Aborted

Timing[Expand[BivariatesPolynom5[199, 190, x, y]];]

{599.965, Null}
```

Beispiel A.7 *Für die Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms von k- partiten Graphen des Typs* $G = K_{\underbrace{2,2,\ldots,2}_{k-mal}}$ *ziehen wir für den ersten von insgesamt drei Graphen zunächst die Rekursionen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *heran, um anschließend die Gleichung*

$$P(G;x,y) \quad = \quad \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \sum_{l=0}^{2k-2i} \binom{2k-2i}{l} (x-y)^{2k-2i-l}\, y^{\underline{i+l}}$$

aus Satz 4.23 auf den Graphen direkt angewandt einzugeben. Wir verzichten aufgrund einer leicht vorstellbaren Struktur auf die graphische Darstellung aller drei Graphen.
Zum ersten Beispielgraphen bestimmen wir wieder zusätzlich das univariate chromatische Polynom unter Anwendung der Implementierung `ChromaticPolynomial` *sowie durch Eingabe der Beziehung aus Korollar 4.25. Außerdem fügen wir für den univariaten Fall noch einen zweiten Beispielgraphen hinzu.*
Wir erkennen abermals, dass die Rekursionen `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *beziehungsweise* `ChromaticPolynomial` *hinter der Schnelligkeit des Ergebnisses aus Satz 4.23 beziehungsweise Korollar 4.25 zurückliegen.*
Für den dritten Graphen umgehen wir hier den Einsatz der Implementierung der Rekursion `BivariatesPolynom1`*, weil den Graphen des hier untersuchten Typs stets nur wenige Kanten zur Vollständigkeit fehlen und sich die Methode der Kantenaddition daher für solche Graphen als sehr viel günstiger erweist im Gegensatz zur Methode der Kantenlöschung. Der dritte Graph besitzt bereits* 30 *Ecken und die entsprechenden Kanten, wobei die Verwendung der Rekursion* `BivariatesPolynom2` *schon nach einer Stunde zum Erliegen kommt. Dagegen lässt sich das bivariate chromatische Polynom mithilfe von Satz 4.23 bereits innerhalb von etwa* 14 *Sekunden berechnen. Aufgrund seines Umfanges verzichten wir jedoch auf dessen Ausgabe.*

```
ShowGraph[G1 = CompleteKPartiteGraph[2, 2, 2, 2]];

Timing[BivariatesPolynom1[G1, x, y]]
```

$\{17.504,\ x^8 - 2790\,y + 3408\,x\,y - 2128\,x^2\,y + 912\,x^3\,y - 306\,x^4\,y + 88\,x^5\,y - 24\,x^6\,y + 4059\,y^2 - 4392\,x\,y^2 + 2320\,x^2\,y^2 - 768\,x^3\,y^2 + 156\,x^4\,y^2 - 1332\,y^3 + 1008\,x\,y^3 - 272\,x^2\,y^3 + 60\,y^4\}$

```
Timing[BivariatesPolynom2[G1, x, y]]
```

$\{0.234,\ x^8 - 2790\,y + 3408\,x\,y - 2128\,x^2\,y + 912\,x^3\,y - 306\,x^4\,y + 88\,x^5\,y - 24\,x^6\,y + 4059\,y^2 - 4392\,x\,y^2 + 2320\,x^2\,y^2 - 768\,x^3\,y^2 + 156\,x^4\,y^2 - 1332\,y^3 + 1008\,x\,y^3 - 272\,x^2\,y^3 + 60\,y^4\}$

```
Timing[Expand[Sum[Binomial[4, i] * Sum[Binomial[8 - 2 * i, l] * (x - y) ^ (8 - 2 * i - l) *
      FunctionExpand[FactorialPower[y, i + l]], {l, 0, 8 - 2 * i}], {i, 0, 4}]]]
```

$\{0.015,\ \{x^8 - 2790\,y + 3408\,x\,y - 2128\,x^2\,y + 912\,x^3\,y - 306\,x^4\,y + 88\,x^5\,y - 24\,x^6\,y + 4059\,y^2 - 4392\,x\,y^2 + 2320\,x^2\,y^2 - 768\,x^3\,y^2 + 156\,x^4\,y^2 - 1332\,y^3 + 1008\,x\,y^3 - 272\,x^2\,y^3 + 60\,y^4\}\}$

```
Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G1, y]]]
```

$\{0.047,\ -2790\,y + 7467\,y^2 - 7852\,y^3 + 4300\,y^4 - 1346\,y^5 + 244\,y^6 - 24\,y^7 + y^8\}$

```
Timing[
 Expand[Sum[Binomial[4, i] * FunctionExpand[FactorialPower[y, 2 * 4 - i]], {i, 0, 4}]]]
```

$\{0.,\ -2790\,y + 7467\,y^2 - 7852\,y^3 + 4300\,y^4 - 1346\,y^5 + 244\,y^6 - 24\,y^7 + y^8\}$

```
ShowGraph[G2 = CompleteKPartiteGraph[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]];

Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G2, y]]]

{10.967, -71370457471716480 y + 255204180333921456 y^2 - 399301633405001412 y^3 +
  368691035369713956 y^4 - 227522434437808075 y^5 + 100455070199882538 y^6 -
  33098809459167864 y^7 + 8366849412078661 y^8 - 1652865879723000 y^9 +
  258240082944756 y^10 - 32127654496466 y^11 + 3190174029516 y^12 - 252304764540 y^13 +
  15782900950 y^14 - 770776728 y^15 + 28759416 y^16 - 791655 y^17 + 15150 y^18 - 180 y^19 + y^20}

Timing[Expand[
  Sum[Binomial[10, i] * FunctionExpand[FactorialPower[y, i + 2 * 10 - 2 * i]], {i, 0, 10}]]]

{0.015, -71370457471716480 y + 255204180333921456 y^2 - 399301633405001412 y^3 +
  368691035369713956 y^4 - 227522434437808075 y^5 + 100455070199882538 y^6 -
  33098809459167864 y^7 + 8366849412078661 y^8 - 1652865879723000 y^9 +
  258240082944756 y^10 - 32127654496466 y^11 + 3190174029516 y^12 - 252304764540 y^13 +
  15782900950 y^14 - 770776728 y^15 + 28759416 y^16 - 791655 y^17 + 15150 y^18 - 180 y^19 + y^20}

ShowGraph[G3 = CompleteKPartiteGraph[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
    2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]];

TimeConstrained[BivariatesPolynom2[G3, x, y];, 3600]

$Aborted

Timing[Expand[Sum[Binomial[30, i] * Sum[Binomial[60 - 2 * i, l] * (x - y) ^{60 - 2 * i - l} *
       FunctionExpand[FactorialPower[y, i + l]], {l, 0, 60 - 2 * i}], {i, 0, 30}]];]

{14.289, Null}
```

Beispiel A.8 *Bei Graphen des Typs* $G = K_{\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k-mal}}$ *gehen wir auch hier für drei verschiedene exemplarische Graphen vor wie im vorausgehenden Beispiel. Auf die Verwendung der beiden Rekursionen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *für den ersten Beispielgraphen folgt die direkte Eingabe der Relation*

$$P(G;x,y) \quad = \quad \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \sum_{t=0}^{i} \binom{i}{t} 3^{i-t} \sum_{l=0}^{3k-2i-t} \binom{3k-2i-t}{l} (x-y)^{3k-2i-t-l}\, y^{\underline{i+l}}$$

aus Satz 4.27 auf diesen Graphen angewandt.
Wir fügen wieder die Berechnung des univariaten chromatischen Polynoms für den ersten sowie den zweiten Beispielgraphen unter Anwendung der Implementierung `ChromaticPolynomial` *sowie durch Eingabe der Formel aus Korollar 4.29 hinzu. Auch hier verzichten wir aufgrund des einfachen Aufbaus wiederum auf die graphische Darstellung aller drei Graphen.*
Bei der Effektivität der einzelnen Methoden zeigt sich hier ein zum vorigen Anhang analoges Bild: Demnach berechnet das Ergebnis aus Satz 4.27 das bivariate und das Ergebnis aus Korollar 4.29 das univariate chromatische Polynom eindeutig am schnellsten.
Beim dritten Graphen, welcher nun bereits 60 *Ecken und die dazugehörigen Kanten umfasst, bestimmen wir wiederum das bivariate chromatische Polynom mittels der Implementierung* `BivariatesPolynom2` *sowie unter direkter Eingabe der Gleichung aus Satz 4.27. Wir verzichten wiederum aus dem gleichen Grund wie in Beispiel A.7 auf die Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms durch die Formel* `BivariatesPolynom1`*. Die Gleichung aus Satz 4.27 liefert das Ergebnis, welches wir auch hier aufgrund seines zu erwartenden großen Umfanges*

nicht mit ausgeben, nach etwa 72 Sekunden, während die alternative Berechnungsmöglichkeit nach einer Stunde noch immer ohne Erfolg bleibt.

```
ShowGraph[G1 = CompleteKPartiteGraph[3, 3, 3]];
```

```
Timing[BivariatesPolynom1[G1, x, y]]
```

$$\{100.761,\ x^9 + 11\,828\, y - 15\,048\, x\, y + 9738\, x^2\, y - 4305\, x^3\, y + 1476\, x^4\, y - 423\, x^5\, y + 108\, x^6\, y - 27\, x^7\, y - 18\,918\, y^2 + 21\,942\, x\, y^2 - 12\,582\, x^2\, y^2 + 4698\, x^3\, y^2 - 1242\, x^4\, y^2 + 216\, x^5\, y^2 + 7848\, y^3 - 7236\, x\, y^3 + 2916\, x^2\, y^3 - 558\, x^3\, y^3 - 756\, y^4 + 324\, x\, y^4\}$$

```
Timing[BivariatesPolynom2[G1, x, y]]
```

$$\{1.934,\ x^9 + 11\,828\, y - 15\,048\, x\, y + 9738\, x^2\, y - 4305\, x^3\, y + 1476\, x^4\, y - 423\, x^5\, y + 108\, x^6\, y - 27\, x^7\, y - 18\,918\, y^2 + 21\,942\, x\, y^2 - 12\,582\, x^2\, y^2 + 4698\, x^3\, y^2 - 1242\, x^4\, y^2 + 216\, x^5\, y^2 + 7848\, y^3 - 7236\, x\, y^3 + 2916\, x^2\, y^3 - 558\, x^3\, y^3 - 756\, y^4 + 324\, x\, y^4\}$$

```
Timing[
 Expand[Sum[Binomial[3, i] * Sum[Binomial[i, t] * 3^(i - t) * Sum[Binomial[9 - 2 i - t, l] *
        (x - y) ^ (9 - 2 i - t - l) * FunctionExpand[FactorialPower[y, i + l]],
       {l, 0, 9 - 2 i - t}], {t, 0, i}], {i, 0, 3}]]]
```

$$\{0.015,\ x^9 + 11\,828\, y - 15\,048\, x\, y + 9738\, x^2\, y - 4305\, x^3\, y + 1476\, x^4\, y - 423\, x^5\, y + 108\, x^6\, y - 27\, x^7\, y - 18\,918\, y^2 + 21\,942\, x\, y^2 - 12\,582\, x^2\, y^2 + 4698\, x^3\, y^2 - 1242\, x^4\, y^2 + 216\, x^5\, y^2 + 7848\, y^3 - 7236\, x\, y^3 + 2916\, x^2\, y^3 - 558\, x^3\, y^3 - 756\, y^4 + 324\, x\, y^4\}$$

```
Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G1, y]]]
```

$$\{0.187,\ 11\,828\, y - 33\,966\, y^2 + 39\,528\, y^3 - 24\,879\, y^4 + 9414\, y^5 - 2223\, y^6 + 324\, y^7 - 27\, y^8 + y^9\}$$

```
Timing[Expand[Sum[Binomial[3, i] * Sum[Binomial[i, t] * 3^(i - t) *
      FunctionExpand[FactorialPower[y, 3 * 3 - i - t]], {t, 0, i}], {i, 0, 3}]]]
```

$$\{0.,\ 11\,828\, y - 33\,966\, y^2 + 39\,528\, y^3 - 24\,879\, y^4 + 9414\, y^5 - 2223\, y^6 + 324\, y^7 - 27\, y^8 + y^9\}$$

```
ShowGraph[G2 = CompleteKPartiteGraph[3, 3, 3, 3, 3, 3]];
```

```
Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G2, y]]]
```

$$\{87.501,\ -118\,146\,235\,225\,800\, y + 414\,083\,156\,562\,310\, y^2 - 631\,409\,170\,510\,725\, y^3 + 564\,769\,854\,403\,344\, y^4 - 335\,404\,573\,014\,747\, y^5 + 141\,454\,223\,607\,024\, y^6 - 44\,137\,837\,631\,250\, y^7 + 10\,459\,111\,311\,801\, y^8 - 1\,913\,313\,970\,971\, y^9 + 272\,686\,403\,758\, y^{10} - 30\,369\,172\,590\, y^{11} + 2\,634\,984\,675\, y^{12} - 176\,357\,472\, y^{13} + 8\,933\,742\, y^{14} - 331\,470\, y^{15} + 8505\, y^{16} - 135\, y^{17} + y^{18}\}$$

```
Timing[
 Expand[Expand[Sum[Binomial[6, i] * Sum[Binomial[i, t] * 3^(i - t) * FunctionExpand[
       FactorialPower[y, 3 * 6 - i - t]], {t, 0, i}], {i, 0, 6}]]]]
```

$$\{0.032,\ -118\,146\,235\,225\,800\, y + 414\,083\,156\,562\,310\, y^2 - 631\,409\,170\,510\,725\, y^3 + 564\,769\,854\,403\,344\, y^4 - 335\,404\,573\,014\,747\, y^5 + 141\,454\,223\,607\,024\, y^6 - 44\,137\,837\,631\,250\, y^7 + 10\,459\,111\,311\,801\, y^8 - 1\,913\,313\,970\,971\, y^9 + 272\,686\,403\,758\, y^{10} - 30\,369\,172\,590\, y^{11} + 2\,634\,984\,675\, y^{12} - 176\,357\,472\, y^{13} + 8\,933\,742\, y^{14} - 331\,470\, y^{15} + 8505\, y^{16} - 135\, y^{17} + y^{18}\}$$

```
ShowGraph[
  G3 = CompleteKPartiteGraph[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]];
```

```
TimeConstrained[BivariatesPolynom2[G3, x, y];, 3600]
```

```
$Aborted
```

```
Timing[
 Expand[Sum[Binomial[20, i] * Sum[Binomial[i, t] * 3^(i - t) * Sum[Binomial[60 - 2 i - t,
        1] * (x - y)^(60 - 2 i - t - 1) * FunctionExpand[FactorialPower[y, i + 1]],
       {1, 0, 60 - 2 i - t}], {t, 0, i}], {i, 0, 20}]];]
{71.558, Null}
```

Beispiel A.9 *Unsere nächsten, auch hier wiederum aus drei Graphen bestehenden Betrachtungen, beziehen sich auf Graphen der Form* $K_s * \overline{K_k} - \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$ *mit* $s \geq 1$, $k \geq 1$, $s \geq t$ *und* $k \geq t$, *so dass für alle* $i, j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ *mit* $i \neq j$ $e_i \cap e_j = \emptyset$ *sowie für alle* $e_i = \{v_1, v_2\}$ *mit* $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ *die Beziehungen* $v_1 \in V(K_s)$ *und* $v_2 \in V(\overline{K_k})$ *gelten. Für den ersten Beispielgraphen bestimmen wir das bivariate chromatische Polynom zunächst mithilfe der Rekursionen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *und anschließend unter Anwendung der Beziehung*

$$\begin{aligned} P(K_s * \overline{K_k} - \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}\,; x, y) &= P(K_s * \overline{K_k} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{t-1}\}\,; x, y) \\ &+ P(K_s * \overline{K_{k-1}} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{t-1}\}\,; x, y) \\ &- (x - y)\, P(K_{s-1} * \overline{K_{k-1}} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{t-1}\}\,; x, y) \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung

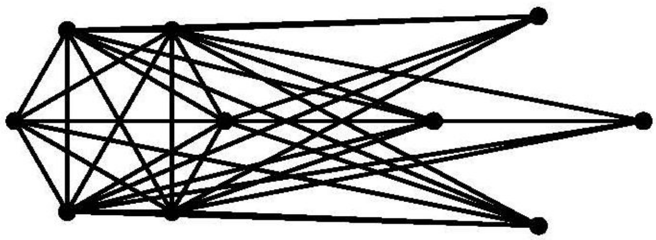
$$\begin{aligned} P(K_s * \overline{K_k} - \{e_1\}\,; x, y) &= P(K_s * \overline{K_k}; x, y) + P(K_s * \overline{K_{k-1}}; x, y) \\ &- (x - y)\, P(K_{s-1} * \overline{K_{k-1}}; x, y) \end{aligned}$$

aus Satz 4.34. Hierfür ergänzen wir anfangs zu den bisherigen Implementierungen die Implementierung `BivariatesPolynom6` *dieser Rekursionsgleichung. Dafür greifen wir neben Satz 4.34 auch Satz 4.15 auf, um das bivariate chromatische Polynom für Graphen der Form* $K_s * \overline{K_k}$ *mit einzugeben.*
Zudem implementieren wir unter der Bezeichnung `UnivariatesPolynom6` *das Ergebnis aus Satz 4.34 für den univariaten Fall und vergleichen dieses wiederum mit der Implementierung* `ChromaticPolynomial` *am ersten sowie am zweiten Graphen.*
Abermals zeigt sich die zeitliche Unterlegenheit der drei Rekursionen `BivariatesPolynom1`, `BivariatesPolynom2` *und* `ChromaticPolynomial` *gegenüber der Methode aus Satz 4.34.*
Beim abschließenden dritten Beispielgraphen, welcher 50 *Ecken besitzt und daher nicht mit angezeigt wird, liefert die Methode aus Satz 4.34 das Ergebnis, welches wir aufgrund seiner Länge ebenfalls nicht mit ausgeben, bereits nach etwa* 32 *Sekunden, wohingegen die Rekursionen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *nach einer Stunde noch ergebnislos bleiben.*

```
Clear[BivariatesPolynom6]
BivariatesPolynom6[s_, k_, x_, y_] := Sum[Binomial[s, i] * (x - y)^{s - i} *
   FunctionExpand[FactorialPower[y, i]] * (x - i)^{k}, {i, 0, s}]
BivariatesPolynom6[1, s_, k_, x_, y_] := BivariatesPolynom6[s, k, x, y] +
  BivariatesPolynom6[s, k - 1, x, y] - (x - y) * BivariatesPolynom6[s - 1, k - 1, x, y]
BivariatesPolynom6[t_, s_, k_, x_, y_] :=
 BivariatesPolynom6[t - 1, s, k, x, y] + BivariatesPolynom6[t - 1, s, k - 1, x, y] -
  (x - y) * BivariatesPolynom6[t - 1, s - 1, k - 1, x, y]
```

```
Clear[UnivariatesPolynom6]
UnivariatesPolynom6[s_, k_, y_] := FunctionExpand[FactorialPower[y, s]] * (y - s) ^{k}
UnivariatesPolynom6[1, s_, k_, y_] :=
 UnivariatesPolynom6[s, k, y] + UnivariatesPolynom6[s, k - 1, y]
UnivariatesPolynom6[t_, s_, k_, y_] :=
 UnivariatesPolynom6[t - 1, s, k, y] + UnivariatesPolynom6[t - 1, s, k - 1, y]
```

```
ShowGraph[G1 = DeleteEdges[
   GraphJoin[Combinatorica`CompleteGraph[6], EmptyGraph[4]], {{3, 7}, {2, 10}}]]
```



```
Timing[BivariatesPolynom1[G1, x, y]]
```

$$\{1108.75,\ x^{10} - 108\,000\,y + 141\,600\,x\,y - 92\,616\,x^2\,y + 40\,536\,x^3\,y - 13\,448\,x^4\,y + 3640\,x^5\,y - 849\,x^6\,y + 180\,x^7\,y - 37\,x^8\,y + 184\,200\,y^2 - 224\,008\,x\,y^2 + 133\,382\,x^2\,y^2 - 51\,652\,x^3\,y^2 + 14\,452\,x^4\,y^2 - 3002\,x^5\,y^2 + 416\,x^6\,y^2 - 88\,436\,y^3 + 90\,832\,x\,y^3 - 42\,735\,x^2\,y^3 + 11\,508\,x^3\,y^3 - 1619\,x^4\,y^3 + 12\,484\,y^4 - 8386\,x\,y^4 + 1809\,x^2\,y^4 - 252\,y^5\}$$

```
Timing[BivariatesPolynom2[G1, x, y]]
```

$$\{0.422,\ x^{10} - 108\,000\,y + 141\,600\,x\,y - 92\,616\,x^2\,y + 40\,536\,x^3\,y - 13\,448\,x^4\,y + 3640\,x^5\,y - 849\,x^6\,y + 180\,x^7\,y - 37\,x^8\,y + 184\,200\,y^2 - 224\,008\,x\,y^2 + 133\,382\,x^2\,y^2 - 51\,652\,x^3\,y^2 + 14\,452\,x^4\,y^2 - 3002\,x^5\,y^2 + 416\,x^6\,y^2 - 88\,436\,y^3 + 90\,832\,x\,y^3 - 42\,735\,x^2\,y^3 + 11\,508\,x^3\,y^3 - 1619\,x^4\,y^3 + 12\,484\,y^4 - 8386\,x\,y^4 + 1809\,x^2\,y^4 - 252\,y^5\}$$

```
Timing[Expand[BivariatesPolynom6[2, 6, 4, x, y]]]
```

$$\{0.031,\ \{x^{10} - 108\,000\,y + 141\,600\,x\,y - 92\,616\,x^2\,y + 40\,536\,x^3\,y - 13\,448\,x^4\,y + 3640\,x^5\,y - 849\,x^6\,y + 180\,x^7\,y - 37\,x^8\,y + 184\,200\,y^2 - 224\,008\,x\,y^2 + 133\,382\,x^2\,y^2 - 51\,652\,x^3\,y^2 + 14\,452\,x^4\,y^2 - 3002\,x^5\,y^2 + 416\,x^6\,y^2 - 88\,436\,y^3 + 90\,832\,x\,y^3 - 42\,735\,x^2\,y^3 + 11\,508\,x^3\,y^3 - 1619\,x^4\,y^3 + 12\,484\,y^4 - 8386\,x\,y^4 + 1809\,x^2\,y^4 - 252\,y^5\}\}$$

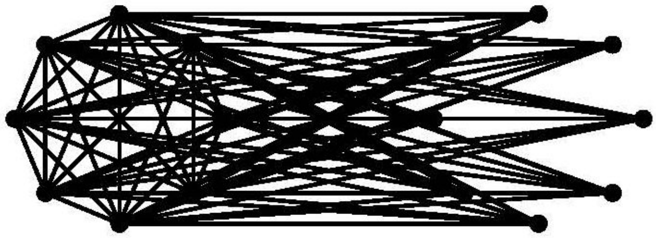
```
Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G1, y]]]
```

$$\{0.063,\ -108\,000\,y + 325\,800\,y^2 - 405\,060\,y^3 + 277\,234\,y^4 - 116\,473\,y^5 + 31\,409\,y^6 - 5470\,y^7 + 596\,y^8 - 37\,y^9 + y^{10}\}$$

```
Timing[Expand[UnivariatesPolynom6[2, 6, 4, y]]]
```

$$\{0.046,\ \{-108\,000\,y + 325\,800\,y^2 - 405\,060\,y^3 + 277\,234\,y^4 - 116\,473\,y^5 + 31\,409\,y^6 - 5470\,y^7 + 596\,y^8 - 37\,y^9 + y^{10}\}\}$$

```
ShowGraph[G2 = DeleteEdges[GraphJoin[Combinatorica`CompleteGraph[8], EmptyGraph[8]],
   {{1, 10}, {2, 12}, {3, 14}}]]
```



```
Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G2, y]]]
```

{38.267, $-56\,646\,696\,960\,y + 206\,558\,134\,272\,y^2 - 329\,833\,742\,336\,y^3 + 310\,099\,105\,792\,y^4 - 193\,758\,808\,704\,y^5 + 85\,803\,236\,976\,y^6 - 27\,961\,339\,620\,y^7 + 6\,855\,028\,800\,y^8 - 1\,278\,741\,935\,y^9 + 181\,964\,635\,y^{10} - 19\,632\,495\,y^{11} + 1\,579\,947\,y^{12} - 91\,941\,y^{13} + 3657\,y^{14} - 89\,y^{15} + y^{16}$}

```
Timing[Expand[UnivariatesPolynom6[3, 8, 8, y]]]
```

{0.047, {$-56\,646\,696\,960\,y + 206\,558\,134\,272\,y^2 - 329\,833\,742\,336\,y^3 + 310\,099\,105\,792\,y^4 - 193\,758\,808\,704\,y^5 + 85\,803\,236\,976\,y^6 - 27\,961\,339\,620\,y^7 + 6\,855\,028\,800\,y^8 - 1\,278\,741\,935\,y^9 + 181\,964\,635\,y^{10} - 19\,632\,495\,y^{11} + 1\,579\,947\,y^{12} - 91\,941\,y^{13} + 3657\,y^{14} - 89\,y^{15} + y^{16}$}}

```
ShowGraph[
  G3 = DeleteEdges[GraphJoin[Combinatorica`CompleteGraph[24], EmptyGraph[26]],
    {{1, 30}, {2, 32}, {3, 34}, {4, 36}, {6, 38}}]];
TimeConstrained[BivariatesPolynom1[G3, x, y];, 3600]
$Aborted
TimeConstrained[BivariatesPolynom2[G3, x, y];, 3600]
$Aborted
Timing[Expand[BivariatesPolynom6[5, 24, 26, x, y]];]
{31.933, Null}
```

Beispiel A.10 *In diesem Beispiel, welches Berechnungen zu insgesamt drei Graphen umfasst, zeigt sich bereits beim ersten Beispielgraphen der Vorteil der Rekursion aus Satz 4.39 gegenüber den beiden Rekursionsgleichungen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2`*. Bei diesem Graphen handelt es sich um einen Graphen des Typs* $K_{r_1+r_2,s_1+r_2} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{r_2}\}$ *mit* $e_i, e_j \in E(G)$ *für* $i, j \in \{1, 2, \ldots, r_2\}$ *und* $e_i \cap e_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$*. Nach der Berechnung des bivariaten chromatischen Polynoms durch die Implementierungen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *folgt die Bestimmung des Polynoms unter Einbezug der Rekursionsrelation*

$$\begin{aligned} P(G; x, y) &= P(K_{r_1+r_2,s_1+r_2} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{r_2-1}\}; x, y) \\ &+ yP(K_{r_1+r_2-1,s_1+r_2-1} - \{e_1, e_2, \ldots, e_{r_2-1}\}; x-1, y-1) \end{aligned}$$

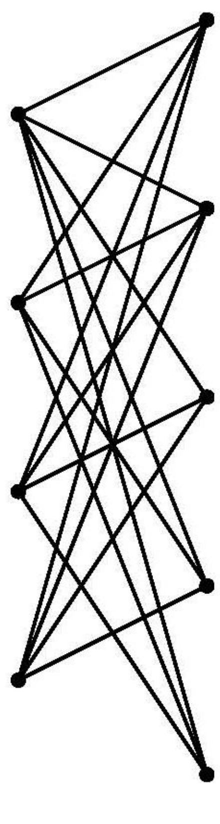
mit der Anfangsbedingung

$$P(K_{r_1+1,s_1+1} - \{e_1\}; x, y) = P(K_{r_1+1,s_1+1}; x, y) + yP(K_{r_1,s_1}; x-1, y-1)$$

aus Satz 4.39. Diese Rekursion implementieren wir unter dem Namen `BivariatesPolynom7`*. Auch hier betrachten wir den univariaten Fall unter Verwendung der Implementierungen* `ChromaticPolynomial` *und* `UnivariatesPolynom7` *sowohl für den oben genannten Graphen*

als auch für ein weiteres Exemplar, wobei sich die Vorgehenweise aus Satz 4.39 trotz ihres rekursiven Aufbaus als am besten erweist.
Abschließend untersuchen wir den allgemeinen Fall an einem Graphen mit 60 Ecken. Während die Rekursionen **BivariatesPolynom1** *und* **BivariatesPolynom2** *nach einer Stunde jeweils noch kein Ergebnis hervorbringen, liefert die Methode aus Satz 4.39 dieses nach 220 Sekunden. Auch hier verzichten wir auf die Ausgabe des Graphen und der Polynome.*

```
Clear[BivariatesPolynom7];
BivariatesPolynom7[r_, s_, x_, y_] :=
 Sum[Binomial[r, k] * (x - y) ^ (r - k) * Sum[StirlingS2[k, j] *
     FunctionExpand[FactorialPower[y, j]] * (x - j) ^s, {j, 0, k}], {k, 0, r}]
BivariatesPolynom7[1, r_, s_, x_, y_] := BivariatesPolynom7[r, s, x, y] +
  y * BivariatesPolynom7[r - 1, s - 1, x - 1, y - 1]
BivariatesPolynom7[n_, r_, s_, x_, y_] := BivariatesPolynom7[n - 1, r, s, x, y] +
  y * BivariatesPolynom7[n - 1, r - 1, s - 1, x - 1, y - 1]
Clear[UnivariatesPolynom7];
UnivariatesPolynom7[r_, s_, y_] :=
 Sum[StirlingS2[r, j] * FunctionExpand[FactorialPower[y, j]] * (y - j) ^s, {j, 0, r}]
UnivariatesPolynom7[1, r_, s_, y_] :=
 UnivariatesPolynom7[r, s, y] + y * UnivariatesPolynom7[r - 1, s - 1, y - 1]
UnivariatesPolynom7[n_, r_, s_, y_] :=
 UnivariatesPolynom7[n - 1, r, s, y] + y * UnivariatesPolynom7[n - 1, r - 1, s - 1, y - 1]
ShowGraph[G1 = DeleteEdges[CompleteKPartiteGraph[4, 5], {{1, 5}, {2, 6}, {3, 7}}]]
```



```
Timing[BivariatesPolynom1[G1, x, y]]
```

$\{13.915,\ x^9 + 1147\,y - 1825\,x\,y + 1500\,x^2\,y - 855\,x^3\,y + 380\,x^4\,y - 144\,x^5\,y + 49\,x^6\,y - 17\,x^7\,y - 1942\,y^2 + 2835\,x\,y^2 - 2085\,x^2\,y^2 + 1025\,x^3\,y^2 - 360\,x^4\,y^2 + 87\,x^5\,y^2 + 900\,y^3 - 1062\,x\,y^3 + 558\,x^2\,y^3 - 149\,x^3\,y^3 - 107\,y^4 + 64\,x\,y^4\}$

```
Timing[BivariatesPolynom2[G1, x, y]]
```

$\{16.646,\ x^9 + 1147\,y - 1825\,x\,y + 1500\,x^2\,y - 855\,x^3\,y + 380\,x^4\,y - 144\,x^5\,y + 49\,x^6\,y - 17\,x^7\,y - 1942\,y^2 + 2835\,x\,y^2 - 2085\,x^2\,y^2 + 1025\,x^3\,y^2 - 360\,x^4\,y^2 + 87\,x^5\,y^2 + 900\,y^3 - 1062\,x\,y^3 + 558\,x^2\,y^3 - 149\,x^3\,y^3 - 107\,y^4 + 64\,x\,y^4\}$

```
Timing[Expand[BivariatesPolynom7[3, 4, 5, x, y]]]
```

$\{0.015,\ x^9 + 1147\,y - 1825\,x\,y + 1500\,x^2\,y - 855\,x^3\,y + 380\,x^4\,y - 144\,x^5\,y + 49\,x^6\,y - 17\,x^7\,y - 1942\,y^2 + 2835\,x\,y^2 - 2085\,x^2\,y^2 + 1025\,x^3\,y^2 - 360\,x^4\,y^2 + 87\,x^5\,y^2 + 900\,y^3 - 1062\,x\,y^3 + 558\,x^2\,y^3 - 149\,x^3\,y^3 - 107\,y^4 + 64\,x\,y^4\}$

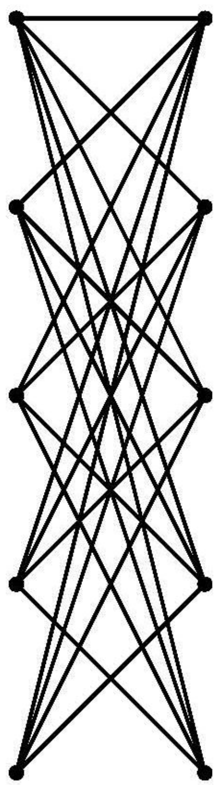
```
Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G1, y]]]
```

$\{4.462,\ 1147\,y - 3767\,y^2 + 5235\,y^3 - 4109\,y^4 + 2027\,y^5 - 653\,y^6 + 136\,y^7 - 17\,y^8 + y^9\}$

```
Timing[Expand[UnivariatesPolynom7[3, 4, 5, y]]]
```

$\{0.015,\ 1147\,y - 3767\,y^2 + 5235\,y^3 - 4109\,y^4 + 2027\,y^5 - 653\,y^6 + 136\,y^7 - 17\,y^8 + y^9\}$

```
ShowGraph[
 G2 = DeleteEdges[CompleteKPartiteGraph[5, 5], {{1, 6}, {2, 7}, {3, 8}, {4, 9}}]]
```



```
Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G2, y]]]
```

```
{29.859,
 -7139 y + 23862 y^2 - 34120 y^3 + 27997 y^4 - 14775 y^5 + 5273 y^6 - 1288 y^7 + 210 y^8 - 21 y^9 + y^10}

Timing[Expand[UnivariatesPolynom7[4, 5, 5, y]]]

{0.062,
 -7139 y + 23862 y^2 - 34120 y^3 + 27997 y^4 - 14775 y^5 + 5273 y^6 - 1288 y^7 + 210 y^8 - 21 y^9 + y^10}

ShowGraph[G3 = DeleteEdges[CompleteKPartiteGraph[24, 36],
    {{1, 37}, {2, 38}, {3, 39}, {4, 40}, {5, 41}, {6, 42}, {7, 43}, {8, 44}}]];

TimeConstrained[BivariatesPolynom1[G3, x, y];, 3600]

$Aborted

TimeConstrained[BivariatesPolynom2[G3, x, y];, 3600]

$Aborted


Timing[Expand[BivariatesPolynom7[8, 24, 36, x, y]];]

{219.993, Null}
```

Beispiel A.11 *An dieser Stelle betrachten wir Berechnungen zu drei verschiedenen Beispielgraphen der Form* $K_{\underbrace{r,r,\ldots,r}_{k\text{-}mal}}$ *mit* $r \geq 1$ *und* $k \geq 1$. *Für den ersten dieser Graphen führen wir zunächst wieder Berechnungen des bivariaten chromatischen Polynoms unter Verwendung der Implementierungen* `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *durch, um anschließend die als* `BivariatesPolynom8` *implementierte rekursive Beziehung*

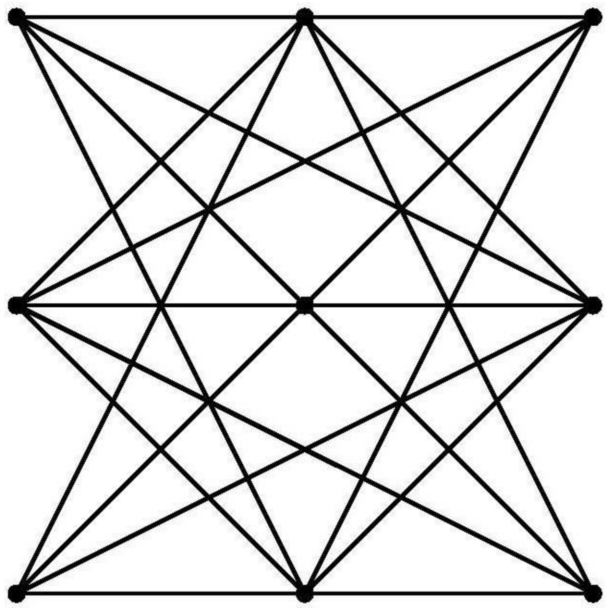
$$P(K_{\underbrace{r,r,\ldots,r}_{k\text{-}mal}};x,y) \quad = \quad \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (x-y)^i \sum_{j=0}^{r-i} S_{r-i,j}\, y^{\underline{j}}\, P(K_{\underbrace{r,r,\ldots,r}_{(k-1)\text{-}mal}};x-j,y-j)$$

mit der Anfangsbedingung

$$P(\overline{K_r};x,y) = x^r$$

aus Satz 4.42 auf ihn anzuwenden.
Für den ersten Graphen untersuchen wir wieder zusätzlich den univariaten Fall und fügen hierfür schließlich noch einen zweiten Graphen hinzu. Für die Berechnung der univariaten chromatischen Polynome verwenden wir wieder die Implementierung `ChromaticPolynomial` *sowie die Implementierung* `UnivariatesPolynom8` *der Formel aus Korollar 4.43. Wir verzichten auf die Abbildung dieses und des dritten Graphen. Bei letzterem unterdrücken wir zudem die Ausgabe des Polynoms aufgrund seines Umfanges.*
Wir sehen am Beispiel des dritten Graphen, dass die Rekursion `BivariatesPolynom2` *nach einer Stunde noch immer nicht zum Ergebnis führt, wogegen wir dieses mithilfe der Rekursion aus Satz 4.42 bereits nach etwa* 162 *Sekunden erhalten.*
Zusammenfassend zeigt sich die längste Laufzeit also wieder bei den bereits bekannten Rekursionen `BivariatesPolynom1` *und* `BivariatesPolynom2` *sowie* `ChromaticPolynomial`. *Damit ist die rekursive Vorgehensweise aus Satz 4.42 am schnellsten.*

```
Clear[BivariatesPolynom8]
BivariatesPolynom8[r_, 1, x_, y_] := x^r
BivariatesPolynom8[r_, k_, x_, y_] := Sum[Binomial[r, i] * (x - y)^i *
    Sum[StirlingS2[r - i, j] * FunctionExpand[FactorialPower[y, j]] *
      BivariatesPolynom8[r, k - 1, x - j, y - j], {j, 0, r - i}], {i, 0, r}]
Clear[UnivariatesPolynom8]
UnivariatesPolynom8[r_, 1, y_] := y^r
UnivariatesPolynom8[r_, k_, y_] :=
  Sum[StirlingS2[r, j] * FunctionExpand[FactorialPower[y, j]] *
    UnivariatesPolynom8[r, k - 1, y - j], {j, 0, r}]
ShowGraph[G1 = CompleteKPartiteGraph[3, 3, 3]]
```



```
Timing[BivariatesPolynom1[G1, x, y]]
```

$\{98.281,\ x^9 + 11828\,y - 15048\,x\,y + 9738\,x^2\,y - 4305\,x^3\,y + 1476\,x^4\,y - 423\,x^5\,y + 108\,x^6\,y - 27\,x^7\,y - 18918\,y^2 + 21942\,x\,y^2 - 12582\,x^2\,y^2 + 4698\,x^3\,y^2 - 1242\,x^4\,y^2 + 216\,x^5\,y^2 + 7848\,y^3 - 7236\,x\,y^3 + 2916\,x^2\,y^3 - 558\,x^3\,y^3 - 756\,y^4 + 324\,x\,y^4\}$

```
Timing[BivariatesPolynom2[G1, x, y]]
```

$\{1.95,\ x^9 + 11828\,y - 15048\,x\,y + 9738\,x^2\,y - 4305\,x^3\,y + 1476\,x^4\,y - 423\,x^5\,y + 108\,x^6\,y - 27\,x^7\,y - 18918\,y^2 + 21942\,x\,y^2 - 12582\,x^2\,y^2 + 4698\,x^3\,y^2 - 1242\,x^4\,y^2 + 216\,x^5\,y^2 + 7848\,y^3 - 7236\,x\,y^3 + 2916\,x^2\,y^3 - 558\,x^3\,y^3 - 756\,y^4 + 324\,x\,y^4\}$

```
Timing[Expand[BivariatesPolynom8[3, 3, x, y]]]
```

$\{0.047,\ x^9 + 11828\,y - 15048\,x\,y + 9738\,x^2\,y - 4305\,x^3\,y + 1476\,x^4\,y - 423\,x^5\,y + 108\,x^6\,y - 27\,x^7\,y - 18918\,y^2 + 21942\,x\,y^2 - 12582\,x^2\,y^2 + 4698\,x^3\,y^2 - 1242\,x^4\,y^2 + 216\,x^5\,y^2 + 7848\,y^3 - 7236\,x\,y^3 + 2916\,x^2\,y^3 - 558\,x^3\,y^3 - 756\,y^4 + 324\,x\,y^4\}$

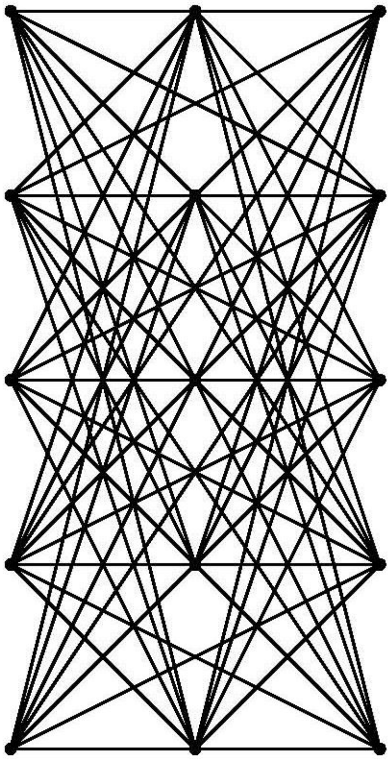
```
Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G1, y]]]
```

$\{0.203,\ 11828\,y - 33966\,y^2 + 39528\,y^3 - 24879\,y^4 + 9414\,y^5 - 2223\,y^6 + 324\,y^7 - 27\,y^8 + y^9\}$

```
Timing[Expand[UnivariatesPolynom8[3, 3, y]]]
```

$$\{0.,\ 11\,828\,y - 33\,966\,y^2 + 39\,528\,y^3 - 24\,879\,y^4 + 9414\,y^5 - 2223\,y^6 + 324\,y^7 - 27\,y^8 + y^9\}$$

```
ShowGraph[G2 = CompleteKPartiteGraph[5, 5, 5]]
```



```
Timing[Expand[ChromaticPolynomial[G2, y]]]
```

$$\{369.957,\ 7\,838\,870\,492\,y - 26\,874\,565\,530\,y^2 + 39\,799\,090\,050\,y^3 - 34\,294\,064\,450\,y^4 + 19\,432\,190\,240\,y^5 - 7\,727\,759\,593\,y^6 + 2\,240\,257\,880\,y^7 - 483\,890\,835\,y^8 + 78\,681\,510\,y^9 - 9\,632\,440\,y^{10} + 878\,200\,y^{11} - 58\,100\,y^{12} + 2650\,y^{13} - 75\,y^{14} + y^{15}\}$$

```
Timing[Expand[UnivariatesPolynom8[5, 3, y]]]
```

$$\{0.015,\ 7\,838\,870\,492\,y - 26\,874\,565\,530\,y^2 + 39\,799\,090\,050\,y^3 - 34\,294\,064\,450\,y^4 + 19\,432\,190\,240\,y^5 - 7\,727\,759\,593\,y^6 + 2\,240\,257\,880\,y^7 - 483\,890\,835\,y^8 + 78\,681\,510\,y^9 - 9\,632\,440\,y^{10} + 878\,200\,y^{11} - 58\,100\,y^{12} + 2650\,y^{13} - 75\,y^{14} + y^{15}\}$$

```
ShowGraph[G3 = CompleteKPartiteGraph[10, 10, 10, 10]];

TimeConstrained[BivariatesPolynom1[G3, x, y];, 3600]
```

```
$Aborted
```

```
TimeConstrained[BivariatesPolynom2[G3, x, y];, 3600]
```

```
$Aborted
```

```
Timing[Expand[BivariatesPolynom8[10, 4, x, y]];]
```

```
{161.992, Null}
```

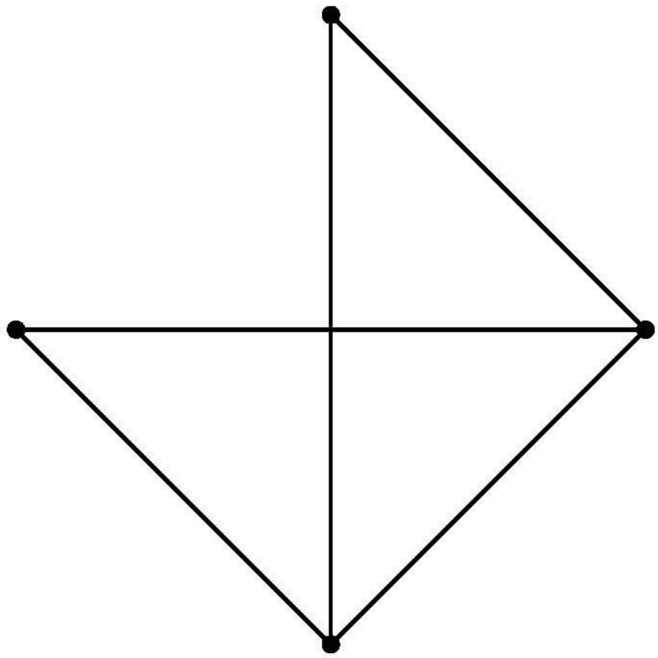
Beispiel A.12 *In diesem Beispiel, welches zwei Graphen umfasst, benötigen wir zur Bestimmung der Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms mithilfe der Beziehung*

$$c_m(G;x,y) \quad = \quad \sum_{W\in A}(x-y)^{|W|} \sum_{\pi\in\Pi_C G-W) \; mit \; |E(\pi)|=m} \; \sum_{\kappa\in\Pi_I(\pi)} y^{\underline{|\kappa|}}$$

aus Satz 5.4 für einen Graphen $G=(V,E)$ mehrere neue Implementierungen. Zunächst erinnern wir uns, dass wir nach Satz 5.4 für alle $W\subseteq V$ und für alle $\pi\in\Pi_C(G-W)$ die Menge aller Kanten von $G-W$, deren Ecken nicht zu verschiedenen Blöcken von π gehören, mit $E(\pi)$ bezeichnen. Weiterhin sei $A=\{W\subset V||E(G-W)|\geq m\}$ und $\Pi_I(\pi)$ die Menge aller unabhängigen Partitionen von G_π, wobei G_π der Graph mit $V(G_\pi)=\left\{v_1,\ldots,v_{|\pi|}\right\}$ derart sei, dass jedes v_k mit $k=1,\ldots,|\pi|$ einem Block von π entspricht und die Kantenmenge durch $E(G_\pi)=\{\{v_k,v_l\}\,|k\neq l,\; v_k,v_l\in V(G_\pi)$ und $\exists w_1\in v_k,\exists w_2\in v_l$ mit $\{w_1,w_2\}\in E\}$ gegeben sei.
Zu den neuen Implementierungen zählt zunächst `SubsetsWithRemainingEdges` der Menge A all derjenigen Elemente der Potenzmenge der Eckenmenge eines Graphen, deren Elemente jeweils noch einen Teilgraphen des Ausgangsgraphen mit mindestens m Kanten induzieren. In Anlehnung an die Implementierung `IndependentSetPartitions` nach [22] ergänzen wir weiterhin die beiden zusätzlichen Implementierungen `ConnectedSetPartitions` und `IndependentSetPartitionsOfPartitionsOf`. Die erstgenannte erlaubt die Bestimmung der Menge aller zusammenhängenden Partitionen $\Pi_C(G-W)$ der Eckenmenge des Graphen $G-W$, während die zweite der Bestimmung der Menge $\Pi_I(\pi)$ mit $\pi\in\Pi_C(G-W)$ mit $|E(\pi)|=m$ aller unabhängigen Partitionen einer zusammenhängenden Partition mit genau m Kanten dient. Hierbei besteht jeder Block einer solchen Partition $\kappa\in\Pi_I(\pi)$ aus paarweise nicht benachbarten Blöcken der zusammenhängenden Partition π. Für die zweite Implementierung verwenden wir die beiden Implementierungen `Pairs` und `PartitionsOf` nach [21], welche zusammen die Menge aller $\pi\in\Pi_C(G-W)$ mit $|E(\pi)|=m$, das heißt aller zusammenhängenden Partitionen eines Graphen mit genau m Kanten, bestimmen. Diese Vorbereitungen ermöglichen schließlich die Berechnung der Anzahl aller Eckenfärbungen eines Graphen mit genau m echt einfarbigen Kanten mittels der Implementierung `Koeffizient1`.
Insbesondere die zweite Berechnung benötigt zwar viel Zeit, dafür setzt die Gleichung zur Bestimmung der Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms jedoch keinen bestimmten Graphentyp voraus.

```
Clear[SubsetsWithRemainingEdges]
SubsetsWithRemainingEdges[graph_, m_] :=
 Module[{i, n = Length[Subsets[VertexList[graph]]], ver = VertexList[graph],
   sub = Subsets[VertexList[graph]], RemainingSubsets = {}},
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
   If[Length[Edges[InduceSubgraph[graph, Complement[ver, sub[[i]]]]]] ≥ m,
    AppendTo[RemainingSubsets, sub[[i]]]]];
  RemainingSubsets]
```

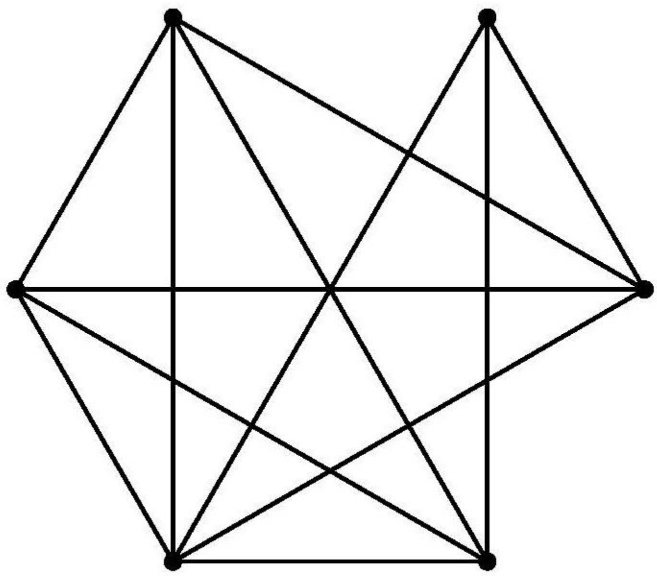
```
Clear[ConnectedSetPartitions]
ConnectedSetPartitions[graph_] :=
 Module[{i, j, n = Length[SetPartitions[VertexList[graph]]],
    part = SetPartitions[VertexList[graph]], ConnectedPartitions = {}},
   For[i = 1, i ≤ n, i++,
    append = True;
    For[j = 1, j ≤ Length[part[[i]]], j++,
     If[Not[ConnectedQ[InduceSubgraph[graph, part[[i]][[j]]]]],
       append = False; Break[]];];
    If[append, AppendTo[ConnectedPartitions, part[[i]]]];];
   ConnectedPartitions]

Clear[Pairs];
Pairs[p_] := Flatten[Map[Subsets[#, {2}] &, p], 1]

Clear[PartitionsOf];
PartitionsOf[graph_, m_] := Select[ConnectedSetPartitions[graph],
   Length[Intersection[Pairs[#], Edges[graph]]] == m &]

Clear[IndependentPartitionsOfPartitionsOf]
IndependentPartitionsOfPartitionsOf[graph_, m_, p_] :=
 Module[{i, j, n = Length[SetPartitions[PartitionsOf[graph, m][[p]]]],
    part = SetPartitions[PartitionsOf[graph, m][[p]]], IndependentPartitions = {}},
   For[i = 1, i ≤ n, i++,
    append = True;
    For[j = 1, j ≤ Length[part[[i]]], j++,
     If[Length[part[[i]][[j]]] ≠
        Length[Combinatorica`ConnectedComponents[InduceSubgraph[graph,
           Flatten[part[[i]][[j]]]]]], append = False; Break[]];];
    If[append, AppendTo[IndependentPartitions, part[[i]]];];];
   IndependentPartitions]

Clear[Koeffizient1]
Koeffizient1[graph_, m_, x_, y_] :=
 Module[{suwir = SubsetsWithRemainingEdges[graph, m]},
   Sum[(x - y) ^ (Length[suwir[[a]]]) * Sum[Sum[FunctionExpand[
        FactorialPower[y, Length[IndependentPartitionsOfPartitionsOf[InduceSubgraph[
             graph, Complement[VertexList[graph], suwir[[a]]]], m, b][[c]]]]],
       {c, 1, Length[IndependentPartitionsOfPartitionsOf[InduceSubgraph[
           graph, Complement[VertexList[graph], suwir[[a]]]], m, b]]}],
      {b, 1, Length[PartitionsOf[InduceSubgraph[graph, Complement[
           VertexList[graph], suwir[[a]]]], m]]}]
    , {a, 1, Length[suwir]}]]


ShowGraph[G1 = DeleteEdge[Combinatorica`CompleteGraph[4], {1, 2}]]
```



```
Timing[Expand[Koeffizient1[G1, 3, x, y]]]
```

{0.141, $-2y + 2xy$}

```
ShowGraph[G2 = DeleteEdges[Combinatorica`CompleteGraph[6], {{1, 2}, {1, 3}, {5, 6}}]]
```



```
Timing[Expand[Koeffizient1[G2, 3, x, y]]]
```

{35.459, $19y + 25xy - 27x^2y + 9x^3y - 36y^2 + 2xy^2 + 8y^3$}

Beispiel A.13 *An dieser Stelle benötigen wir zur Bestimmung der Koeffizienten des triva-*

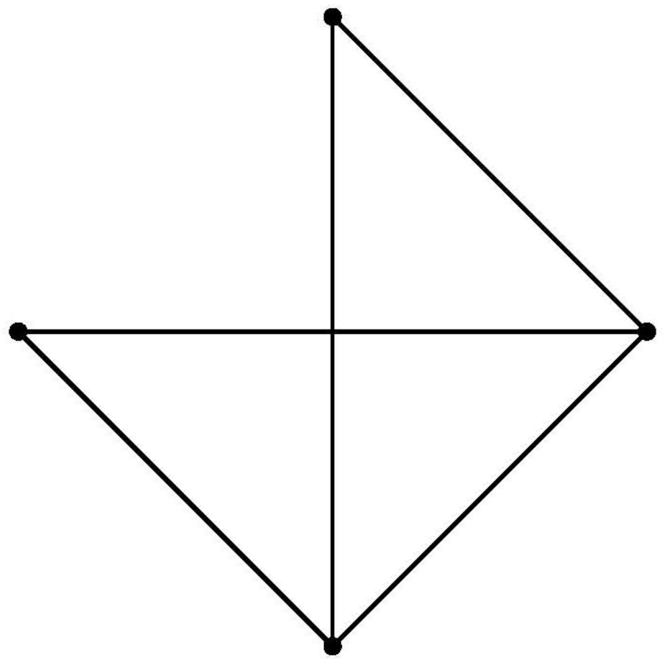
riaten chromatischen Polynoms nach Satz 5.7 mithilfe der Relation

$$c_m(G;x,y) \quad = \sum_{\pi\in\Pi_C(G)\ mit\ |E(\pi)|=m}\ \sum_{M\subseteq\{X\in\pi\ |\ |X|=1\}} (x-y)^{|M|} \sum_{\kappa\in\Pi_I(\pi-M)} y^{\underline{|\kappa|}}$$

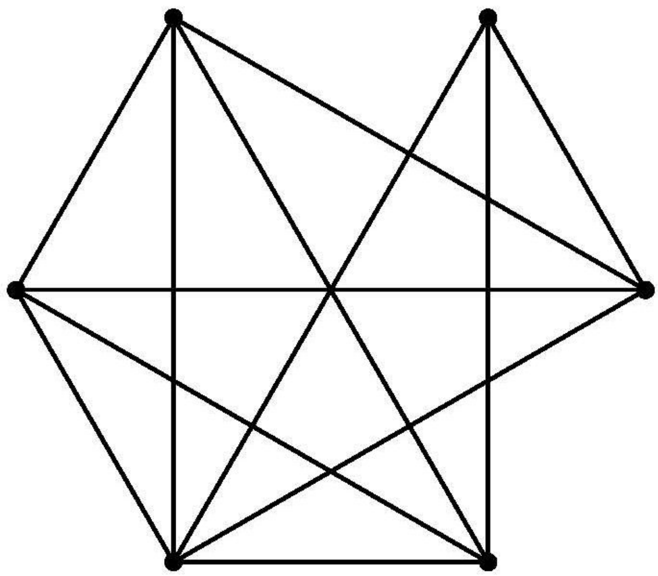
einige weitere Implementierungen. Wir erinnern wiederum an die folgenden Definitionen in Satz 5.7: Für $\pi \in \Pi_C(G)$ bezeichnen wir die Menge aller Kanten von G, deren Ecken nicht zu verschiedenen Blöcken von π gehören, mit $E(\pi)$. Weiterhin sei $\Pi_I(\pi - M)$ für eine Menge $M \subseteq \{X \in \pi \mid |X| = 1\}$ analog zur Definition von $\Pi_I(\pi)$ in Satz 5.4 derart definiert, dass statt der Partition π die Teilmenge $\pi - M$ zugrunde gelegt wird. Darauf aufbauend führen wir drei zusätzliche Implementierungen ein, welche wir `PartitionsOfSingletons`, `IndependentPartitionsOfPartitionsOfWithoutA` *sowie* `Koeffizient2` *nennen. Die erstgenannte gibt die Menge $\{X \in \pi \mid |X| = 1\}$ aller einelementigen Blöcke einer beliebigen zusammenhängenden Partition $\pi \in \Pi_C(G)$ mit genau m Kanten an. Die zweite erfolgt wiederum ähnlich der Implementierung* `IndependentSetPartitions` *nach [22]. Sie erlaubt die Bestimmung der Menge $\Pi_I(\pi - M)$ aller unabhängigen Partitionen einer zusammenhängenden Partition eines Graphen ohne eine beliebige Teilmenge M von einelementigen Blöcken der betrachteten zusammenhängenden Partition. Mit der letzten Implementierung bestimmen wir schließlich die Anzahl aller Eckenfärbungen eines Graphen mit genau m echt einfarbigen Kanten.*
Die Implementierung `Koeffizient2` *beansprucht zwar mehr Zeit als die Implementierung* `Koeffizient1`*, allerdings benötigen wir diese Darstellung der Koeffizienten des trivariaten chromatischen Polynoms mehrfach als Beweismittel.*

```
Clear[PartitionsOfSingletons]
PartitionsOfSingletons[graph_, m_, a_] :=
 Module[{i, n = Length[PartitionsOf[graph, m][[a]]],
    conspar = PartitionsOf[graph, m][[a]], Singletons = {}},
   For[i = 1, i ≤ n, i++,
    If[Length[conspar[[i]]] == 1, AppendTo[Singletons, conspar[[i]]]];];
   Singletons]
Clear[IndependentPartitionsOfPartitionsOfWithoutA]
IndependentPartitionsOfPartitionsOfWithoutA[graph_, m_, a_, listlist_] :=
 Module[
  {i, j, n = Length[SetPartitions[Complement[PartitionsOf[graph, m][[a]], listlist]]],
    part = SetPartitions[Complement[PartitionsOf[graph, m][[a]], listlist]],
    IndependentPartitions = {}},
   For[i = 1, i ≤ n, i++,
    append = True;
    For[j = 1, j ≤ Length[part[[i]]], j++,
     If[Length[part[[i]][[j]]] ≠
        Length[Combinatorica`ConnectedComponents[InduceSubgraph[graph,
           Flatten[part[[i]][[j]]]]]], append = False; Break[];];
    If[append, AppendTo[IndependentPartitions, part[[i]]];];];
   IndependentPartitions]
```

```
Clear[Koeffizient2]
Koeffizient2[graph_, m_, x_, y_] :=
 Sum[Sum[(x - y) ^ (Length[Subsets[PartitionsOfSingletons[graph, m, i]][[j]]]) *
     Sum[FunctionExpand[
        FactorialPower[y, Length[IndependentPartitionsOfPartitionsOfWithoutA[graph,
             m, i, Subsets[PartitionsOfSingletons[graph, m, i]][[j]]][[k]]]]]
       , {k, 1, Length[IndependentPartitionsOfPartitionsOfWithoutA[graph,
           m, i, Subsets[PartitionsOfSingletons[graph, m, i]][[j]]]]}]
    , {j, 1, Length[Subsets[PartitionsOfSingletons[graph, m, i]]]}]
  , {i, 1, Length[PartitionsOf[graph, m]]}]

ShowGraph[G1 = DeleteEdge[Combinatorica`CompleteGraph[4], {1, 2}]]
```



```
Timing[Expand[Koeffizient2[G1, 3, x, y]]]

{0.421, -2 y + 2 x y}

ShowGraph[G2 = DeleteEdge[
   DeleteEdge[DeleteEdge[Combinatorica`CompleteGraph[6], {1, 2}], {1, 3}], {5, 6}]]
```



```
Timing[Expand[Koeffizient2[G2, 3, x, y]]]
```

$\{208.558,\ 19\,y + 25\,x\,y - 27\,x^2\,y + 9\,x^3\,y - 36\,y^2 + 2\,x\,y^2 + 8\,y^3\}$

Beispiel A.14 *Abschließend zeigen wir die Berechnung des trivariaten chromatischen Polynoms anhand vierer exemplarischer Wälder, wobei die Koeffizienten für jedes dieser Beispiele nach den Rekursionsvorschriften aus Satz 5.19 und Korollar 5.20 mithilfe der Implementierungen* `TrivariaterKoeffizientAzyklisch` *beziehungsweise* `TrivariaterKoeffizientWald`, *welche an die Implementierung* `BivariatesPolynom1` *nach [21] angelehnt sind, bestimmt werden können. Für die Implementierung* `TrivariaterKoeffizientWald` *benötigen wir wiederum die Implementierung* `EdgesWithoutLeafs`, *welche wir ähnlich wie die bereits vorgestellte Implementierung* `IndependentSetPartitions` *nach [22] vornehmen und welche die Menge aller Kanten $e = \{v_1, v_2\}$ bestimmt, so dass $|N(v_1)| = 1$ oder $|N(v_2)| = 1$ gilt. Schließlich geben wir unter Einsatz dieser Implementierungen der Koeffizienten das trivariate chromatische Polynom* `TrivariatesPolynomAzyklisch` *beziehungsweise das trivariate chromatische Polynom* `TrivariatesPolynomWald` *für jeden dieser Graphen aus. Der Implementierung* `TrivariaterKoeffizientAzyklisch` *liegt hierbei die folgende Formel aus Satz 5.19 zugrunde: Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit einer Kante $e = \{u, v\} \in E$, welche die Eigenschaft $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ besitzt. Für jeden beliebigen Graphen H und $r > |E(H)|$ setzen wir*

$$c_r(H; x, y) \quad = \quad 0\,.$$

Dann gilt nach Satz 3.26

$$\begin{aligned} c_m(G; x, y) \quad &= \quad c_{m-1}(G/e; x, y) - (x - y)\, c_{m-1}(G - u - v; x, y) \\ &+ \quad c_m(G - e; x, y) - c_m(G/e; x, y) + (x - y)\, c_m(G - u - v; x, y)\,. \end{aligned}$$

Weiterhin liegt der Implementierung `TrivariaterKoeffizientWald` *die folgende Formel aus Korollar 5.20 zugrunge: Es sei $W = (V, E)$ ein Wald und $e = \{u, v\} \in E$ eine beliebige Kante. Dann gilt*

$$\begin{aligned} c_m(W; x, y) \quad &= \quad c_{m-1}(W/e; x, y) - (x - y)\, c_{m-1}(W - u - v; x, y) \\ &+ \quad c_m(W - e; x, y) - c_m(W/e; x, y) + (x - y)\, c_m(W - u - v; x, y) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$c_0(W;x,y) \quad = \quad P(W;x,y)$$

und

$$c_r(H;x,y) \quad = \quad 0$$

für jeden beliebigen Graphen H mit $r > |E(H)|$.
Zum Vergleich implementieren wir außerdem das trivariate chromatische Polynom unter der Bezeichnung `TrivariatesPolynom1` beziehungsweise `TrivariatesPolynom2`, indem wir die Koeffizienten gemäß Satz 5.4 als `Koeffizient1` beziehungsweise Satz 5.7 als `Koeffizient2` implementieren. Wie man an den Beispielen sieht, benötigt die Implementierung des trivariaten chromatischen Polynoms `TrivariatesPolynom2` mithilfe der Implemenetierung der Koeffizenten `Koeffizient2` am meisten Zeit, weshalb sie nur im ersten und zweiten Beispiel zum Einsatz kommt. Auch die Implementierung des trivariaten chromatischen Polynoms `TrivariatesPolynom1` mithilfe der Implementierung der Koeffizenten `Koeffizient1` erweist sich als langsam, weshalb auf sie ab dem vierten Beispiel verzichtet wird. Am schnellsten gelingt die Berechnung mithilfe der Implementierung `TrivariatesPolynomWald`, gefolgt von der Implementierung `TrivariatesPolynomAzyklisch`.

```
Clear[TrivariaterKoeffizientAzyklisch];
TrivariaterKoeffizientAzyklisch[graph_, m_, x_, y_] :=
 0 /; m > Length[Edges[graph]] && AcyclicQ[graph]
TrivariaterKoeffizientAzyklisch[graph_, m_, x_, y_] :=
 BivariatesPolynom1[graph, x, y] /; m == 0 && AcyclicQ[graph]
TrivariaterKoeffizientAzyklisch[graph_, m_, x_, y_] :=
 Module[{e = Edges[graph], e1, e2, g1, g2, g3},
   g1 = DeleteEdge[graph, e[[1]]];
   g2 = MakeSimple[Contract[graph, e[[1]]]];
   e1 = Min[e[[1]]];
   e2 = Max[e[[1]]];
   g3 = DeleteVertices[graph, {e1, e2}];
   Return[Expand[TrivariaterKoeffizientAzyklisch[g2, m - 1, x, y] -
      (x - y) * TrivariaterKoeffizientAzyklisch[g3, m - 1, x, y] +
      TrivariaterKoeffizientAzyklisch[g1, m, x, y] - TrivariaterKoeffizientAzyklisch[
       g2, m, x, y] + (x - y) * TrivariaterKoeffizientAzyklisch[g3, m, x, y]]];
  ] /; 0 < Length[Edges[graph]] && 0 < m && m ≤ Length[Edges[graph]] && AcyclicQ[graph]
TrivariaterKoeffizientAzyklisch[graph_, m_, x_, y_] :=
 "Keine Lösung" /; Not[AcyclicGraphQ[graph]]

Clear[EdgesWithLeafs];
EdgesWithLeafs[graph_] :=
 Module[{i, j, e = Edges[graph], m = Length[Edges[graph]], WithLeaf = {}},
  For[i = 1, i ≤ m, i++,
   append = True;
   For[j = 1, j ≤ 1, j++,
    If[Length[Neighborhood[graph, e[[i]][[j]], 1]] - 1 > 1 &&
       Length[Neighborhood[graph, e[[i]][[j + 1]], 1]] - 1 > 1, append = False];];
   If[append, AppendTo[WithLeaf, e[[i]]]];];
  WithLeaf]
```

```
Clear[TrivariaterKoeffizientWald];
TrivariaterKoeffizientWald[graph_, m_, x_, y_] :=
 0 /; m > Length[Edges[graph]] && AcyclicQ[graph]
TrivariaterKoeffizientWald[graph_, m_, x_, y_] :=
 BivariatesPolynom1[graph, x, y] /; m == 0 && AcyclicQ[graph]
TrivariaterKoeffizientWald[graph_, m_, x_, y_] :=
 Module[{e = EdgesWithLeafs[graph], e1, e2, g1, g2, g3},
   g1 = DeleteEdge[graph, e[[1]]];
   g2 = MakeSimple[Contract[graph, e[[1]]]];
   e1 = Min[e[[1]]];
   e2 = Max[e[[1]]];
   g3 = DeleteVertices[graph, {e1, e2}];
   Return[Expand[TrivariaterKoeffizientWald[g2, m - 1, x, y] -
      (x - y) * TrivariaterKoeffizientWald[g3, m - 1, x, y] +
      (x - 1) * TrivariaterKoeffizientWald[g2, m, x, y] +
      (x - y) * TrivariaterKoeffizientWald[g3, m, x, y]]];
  ] /; 0 < Length[Edges[graph]] && 0 < m && m ≤ Length[Edges[graph]] && AcyclicQ[graph]
TrivariaterKoeffizientWald[graph_, m_, x_, y_] :=
 "Keine Lösung" /; Not[AcyclicGraphQ[graph]]

Clear[TrivariatesPolynom1];
TrivariatesPolynom1[graph_, x_, y_, z_] :=
 Sum[Koeffizient1[graph, i, x, y] * z ^ i, {i, 0, Length[Edges[graph]]}]


Clear[TrivariatesPolynom2];
TrivariatesPolynom2[graph_, x_, y_, z_] :=
 Sum[Koeffizient2[graph, i, x, y] * z ^ i, {i, 0, Length[Edges[graph]]}]

Clear[TrivariatesPolynomAzyklisch];
TrivariatesPolynomAzyklisch[graph_, x_, y_, z_] := Sum[
  TrivariaterKoeffizientAzyklisch[graph, i, x, y] * z ^ i, {i, 0, Length[Edges[graph]]}]

Clear[TrivariatesPolynomWald];
TrivariatesPolynomWald[graph_, x_, y_, z_] :=
 Sum[TrivariaterKoeffizientWald[graph, i, x, y] * z ^ i, {i, 0, Length[Edges[graph]]}]

ShowGraph[G1 = Combinatorica`Star[3]];

Timing[Expand[TrivariatesPolynom1[G1, x, y, z]]]
```

$\{0.156, x^3 + y - 2 x y - 2 y z + 2 x y z + y z^2\}$

```
Timing[Expand[TrivariatesPolynom2[G1, x, y, z]]]
```

$\{0.405, x^3 + y - 2 x y - 2 y z + 2 x y z + y z^2\}$

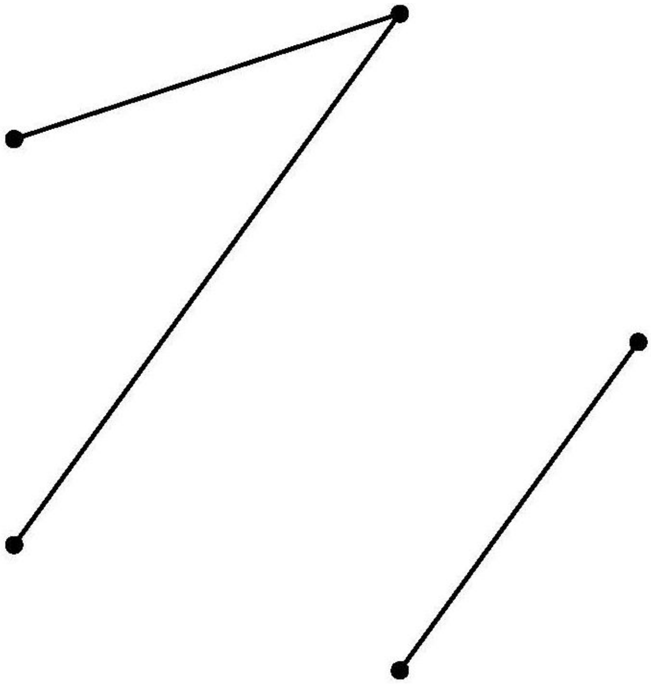
```
Timing[Expand[TrivariatesPolynomAzyklisch[G1, x, y, z]]]
```

$\{0.016, x^3 + y - 2 x y - 2 y z + 2 x y z + y z^2\}$

```
Timing[Expand[TrivariatesPolynomWald[G1, x, y, z]]]
```

$\{0.016, x^3 + y - 2 x y - 2 y z + 2 x y z + y z^2\}$

```
ShowGraph[G2 = AddEdge[AddEdge[AddEdge[EmptyGraph[5], {1, 2}], {1, 3}], {4, 5}]]
```



```
Timing[Expand[TrivariatesPolynom1[G2, x, y, z]]]
```

$$\{5.788,\ x^5 + x^2 y - 3 x^3 y - y^2 + 2 x y^2 - 2 x^2 y z + 3 x^3 y z + 3 y^2 z - 4 x y^2 z + x^2 y z^2 - 3 y^2 z^2 + 2 x y^2 z^2 + y^2 z^3\}$$

```
Timing[Expand[TrivariatesPolynom2[G2, x, y, z]]]
```

$$\{26.988,\ x^5 + x^2 y - 3 x^3 y - y^2 + 2 x y^2 - 2 x^2 y z + 3 x^3 y z + 3 y^2 z - 4 x y^2 z + x^2 y z^2 - 3 y^2 z^2 + 2 x y^2 z^2 + y^2 z^3\}$$

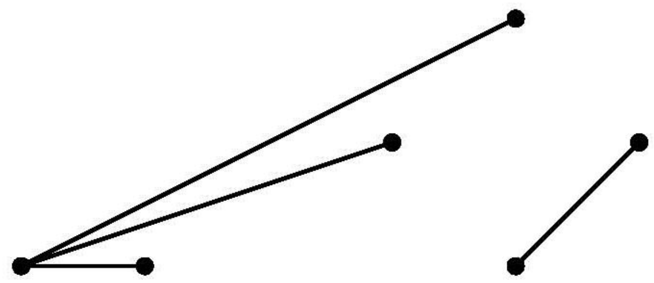
```
Timing[Expand[TrivariatesPolynomAzyklisch[G2, x, y, z]]]
```

$$\{0.078,\ x^5 + x^2 y - 3 x^3 y - y^2 + 2 x y^2 - 2 x^2 y z + 3 x^3 y z + 3 y^2 z - 4 x y^2 z + x^2 y z^2 - 3 y^2 z^2 + 2 x y^2 z^2 + y^2 z^3\}$$

```
Timing[Expand[TrivariatesPolynomWald[G2, x, y, z]]]
```

$$\{0.062,\ x^5 + x^2 y - 3 x^3 y - y^2 + 2 x y^2 - 2 x^2 y z + 3 x^3 y z + 3 y^2 z - 4 x y^2 z + x^2 y z^2 - 3 y^2 z^2 + 2 x y^2 z^2 + y^2 z^3\}$$

```
ShowGraph[
 G3 = AddEdges[Combinatorica`GraphUnion[Combinatorica`Path[2], EmptyGraph[4]],
   {{1, 3}, {1, 4}, {5, 6}}]]
```



Timing[Expand[TrivariatesPolynom1[G3, x, y, z]]]

$$\{73.586,\ x^6 - x^2 y + 3 x^3 y - 4 x^4 y + y^2 - 3 x y^2 + 3 x^2 y^2 + 3 x^2 y z - 6 x^3 y z + 4 x^4 y z - 4 y^2 z + 9 x y^2 z - 6 x^2 y^2 z - 3 x^2 y z^2 + 3 x^3 y z^2 + 6 y^2 z^2 - 9 x y^2 z^2 + 3 x^2 y^2 z^2 + x^2 y z^3 - 4 y^2 z^3 + 3 x y^2 z^3 + y^2 z^4\}$$

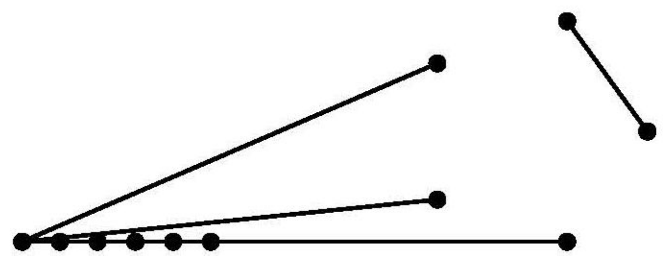
Timing[Expand[TrivariatesPolynomAzyklisch[G3, x, y, z]]]

$$\{0.141,\ x^6 - x^2 y + 3 x^3 y - 4 x^4 y + y^2 - 3 x y^2 + 3 x^2 y^2 + 3 x^2 y z - 6 x^3 y z + 4 x^4 y z - 4 y^2 z + 9 x y^2 z - 6 x^2 y^2 z - 3 x^2 y z^2 + 3 x^3 y z^2 + 6 y^2 z^2 - 9 x y^2 z^2 + 3 x^2 y^2 z^2 + x^2 y z^3 - 4 y^2 z^3 + 3 x y^2 z^3 + y^2 z^4\}$$

Timing[Expand[TrivariatesPolynomWald[G3, x, y, z]]]

$$\{0.078,\ x^6 - x^2 y + 3 x^3 y - 4 x^4 y + y^2 - 3 x y^2 + 3 x^2 y^2 + 3 x^2 y z - 6 x^3 y z + 4 x^4 y z - 4 y^2 z + 9 x y^2 z - 6 x^2 y^2 z - 3 x^2 y z^2 + 3 x^3 y z^2 + 6 y^2 z^2 - 9 x y^2 z^2 + 3 x^2 y^2 z^2 + x^2 y z^3 - 4 y^2 z^3 + 3 x y^2 z^3 + y^2 z^4\}$$

```
ShowGraph[
 G4 = AddEdges[Combinatorica`GraphUnion[Combinatorica`Path[6], EmptyGraph[5]],
   {{1, 8}, {1, 9}, {2, 10}, {7, 11}}]]
```



Timing[Expand[TrivariatesPolynomAzyklisch[G4, x, y, z]]]

$$\{87.329,\ x^{11} + x^2 y - 4 x^3 y + 7 x^4 y - 9 x^5 y + 10 x^6 y - 10 x^7 y + 9 x^8 y - 9 x^9 y - y^2 + 4 x y^2 - 11 x^2 y^2 + 26 x^3 y^2 - 41 x^4 y^2 + 47 x^5 y^2 - 41 x^6 y^2 + 27 x^7 y^2 + 4 y^3 - 17 x y^3 + 35 x^2 y^3 - 52 x^3 y^3 + 53 x^4 y^3 - 33 x^5 y^3 - 4 y^4 + 15 x y^4 - 22 x^2 y^4 + 16 x^3 y^4 + y^5 - 2 x y^5 - 8 x^2 y z + 28 x^3 y z - 42 x^4 y z + 45 x^5 y z - 40 x^6 y z + 30 x^7 y z - 18 x^8 y z + 9 x^9 y z + 9 y^2 z - 32 x y^2 z + 77 x^2 y^2 z - 156 x^3 y^2 z + 205 x^4 y^2 z - 188 x^5 y^2 z + 123 x^6 y^2 z - 54 x^7 y^2 z - 32 y^3 z + 119 x y^3 z - 210 x^2 y^3 z + 260 x^3 y^3 z - 212 x^4 y^3 z + 99 x^5 y^3 z + 28 y^4 z - 90 x y^4 z + 110 x^2 y^4 z - 64 x^3 y^4 z - 6 y^5 z + 10 x y^5 z + 28 x^2 y z^2 - 84 x^3 y z^2 + 105 x^4 y z^2 - 90 x^5 y z^2 + 60 x^6 y z^2 - 30 x^7 y z^2 + 9 x^8 y z^2 - 36 y^2 z^2 + 112 x y^2 z^2 - 231 x^2 y^2 z^2 + 390 x^3 y^2 z^2 - 410 x^4 y^2 z^2 + 282 x^5 y^2 z^2 - 123 x^6 y^2 z^2 + 27 x^7 y^2 z^2 + 112 y^3 z^2 - 357 x y^3 z^2 + 525 x^2 y^3 z^2 - 520 x^3 y^3 z^2 + 318 x^4 y^3 z^2 - 99 x^5 y^3 z^2 - 84 y^4 z^2 + 225 x y^4 z^2 - 220 x^2 y^4 z^2 + 96 x^3 y^4 z^2 + 15 y^5 z^2 - 20 x y^5 z^2 - 56 x^2 y z^3 + 140 x^3 y z^3 - 140 x^4 y z^3 + 90 x^5 y z^3 - 40 x^6 y z^3 + 10 x^7 y z^3 + 84 y^2 z^3 - 224 x y^2 z^3 +$$

$$
\begin{aligned}
&385 x^2 y^2 z^3 - 520 x^3 y^2 z^3 + 410 x^4 y^2 z^3 - 188 x^5 y^2 z^3 + 41 x^6 y^2 z^3 - 224 y^3 z^3 + 595 x y^3 z^3 - \\
&700 x^2 y^3 z^3 + 520 x^3 y^3 z^3 - 212 x^4 y^3 z^3 + 33 x^5 y^3 z^3 + 140 y^4 z^3 - 300 x y^4 z^3 + 220 x^2 y^4 z^3 - \\
&64 x^3 y^4 z^3 - 20 y^5 z^3 + 20 x y^5 z^3 + 70 x^2 y z^4 - 140 x^3 y z^4 + 105 x^4 y z^4 - 45 x^5 y z^4 + 10 x^6 y z^4 - \\
&126 y^2 z^4 + 280 x y^2 z^4 - 385 x^2 y^2 z^4 + 390 x^3 y^2 z^4 - 205 x^4 y^2 z^4 + 47 x^5 y^2 z^4 + 280 y^3 z^4 - \\
&595 x y^3 z^4 + 525 x^2 y^3 z^4 - 260 x^3 y^3 z^4 + 53 x^4 y^3 z^4 - 140 y^4 z^4 + 225 x y^4 z^4 - 110 x^2 y^4 z^4 + \\
&16 x^3 y^4 z^4 + 15 y^5 z^4 - 10 x y^5 z^4 - 56 x^2 y z^5 + 84 x^3 y z^5 - 42 x^4 y z^5 + 9 x^5 y z^5 + 126 y^2 z^5 - \\
&224 x y^2 z^5 + 231 x^2 y^2 z^5 - 156 x^3 y^2 z^5 + 41 x^4 y^2 z^5 - 224 y^3 z^5 + 357 x y^3 z^5 - 210 x^2 y^3 z^5 + \\
&52 x^3 y^3 z^5 + 84 y^4 z^5 - 90 x y^4 z^5 + 22 x^2 y^4 z^5 - 6 y^5 z^5 + 2 x y^5 z^5 + 28 x^2 y z^6 - 28 x^3 y z^6 + \\
&7 x^4 y z^6 - 84 y^2 z^6 + 112 x y^2 z^6 - 77 x^2 y^2 z^6 + 26 x^3 y^2 z^6 + 112 y^3 z^6 - 119 x y^3 z^6 + \\
&35 x^2 y^3 z^6 - 28 y^4 z^6 + 15 x y^4 z^6 + y^5 z^6 - 8 x^2 y z^7 + 4 x^3 y z^7 + 36 y^2 z^7 - 32 x y^2 z^7 + \\
&11 x^2 y^2 z^7 - 32 y^3 z^7 + 17 x y^3 z^7 + 4 y^4 z^7 + x^2 y z^8 - 9 y^2 z^8 + 4 x y^2 z^8 + 4 y^3 z^8 + y^2 z^9 \}
\end{aligned}
$$

```
Timing[Expand[TrivariatesPolynomWald[G4, x, y, z]]]
```

$$
\begin{aligned}
\{&13.666,\ x^{11} + x^2 y - 4 x^3 y + 7 x^4 y - 9 x^5 y + 10 x^6 y - 10 x^7 y + 9 x^8 y - 9 x^9 y - y^2 + 4 x y^2 - 11 x^2 y^2 + \\
&26 x^3 y^2 - 41 x^4 y^2 + 47 x^5 y^2 - 41 x^6 y^2 + 27 x^7 y^2 + 4 y^3 - 17 x y^3 + 35 x^2 y^3 - 52 x^3 y^3 + \\
&53 x^4 y^3 - 33 x^5 y^3 - 4 y^4 + 15 x y^4 - 22 x^2 y^4 + 16 x^3 y^4 + y^5 - 2 x y^5 - 8 x^2 y z + 28 x^3 y z - \\
&42 x^4 y z + 45 x^5 y z - 40 x^6 y z + 30 x^7 y z - 18 x^8 y z + 9 x^9 y z + 9 y^2 z - 32 x y^2 z + 77 x^2 y^2 z - \\
&156 x^3 y^2 z + 205 x^4 y^2 z - 188 x^5 y^2 z + 123 x^6 y^2 z - 54 x^7 y^2 z - 32 y^3 z + 119 x y^3 z - \\
&210 x^2 y^3 z + 260 x^3 y^3 z - 212 x^4 y^3 z + 99 x^5 y^3 z + 28 y^4 z - 90 x y^4 z + 110 x^2 y^4 z - 64 x^3 y^4 z - \\
&6 y^5 z + 10 x y^5 z + 28 x^2 y z^2 - 84 x^3 y z^2 + 105 x^4 y z^2 - 90 x^5 y z^2 + 60 x^6 y z^2 - 30 x^7 y z^2 + \\
&9 x^8 y z^2 - 36 y^2 z^2 + 112 x y^2 z^2 - 231 x^2 y^2 z^2 + 390 x^3 y^2 z^2 - 410 x^4 y^2 z^2 + 282 x^5 y^2 z^2 - \\
&123 x^6 y^2 z^2 + 27 x^7 y^2 z^2 + 112 y^3 z^2 - 357 x y^3 z^2 + 525 x^2 y^3 z^2 - 520 x^3 y^3 z^2 + 318 x^4 y^3 z^2 - \\
&99 x^5 y^3 z^2 - 84 y^4 z^2 + 225 x y^4 z^2 - 220 x^2 y^4 z^2 + 96 x^3 y^4 z^2 + 15 y^5 z^2 - 20 x y^5 z^2 - 56 x^2 y z^3 + \\
&140 x^3 y z^3 - 140 x^4 y z^3 + 90 x^5 y z^3 - 40 x^6 y z^3 + 10 x^7 y z^3 + 84 y^2 z^3 - 224 x y^2 z^3 + \\
&385 x^2 y^2 z^3 - 520 x^3 y^2 z^3 + 410 x^4 y^2 z^3 - 188 x^5 y^2 z^3 + 41 x^6 y^2 z^3 - 224 y^3 z^3 + 595 x y^3 z^3 - \\
&700 x^2 y^3 z^3 + 520 x^3 y^3 z^3 - 212 x^4 y^3 z^3 + 33 x^5 y^3 z^3 + 140 y^4 z^3 - 300 x y^4 z^3 + 220 x^2 y^4 z^3 - \\
&64 x^3 y^4 z^3 - 20 y^5 z^3 + 20 x y^5 z^3 + 70 x^2 y z^4 - 140 x^3 y z^4 + 105 x^4 y z^4 - 45 x^5 y z^4 + 10 x^6 y z^4 - \\
&126 y^2 z^4 + 280 x y^2 z^4 - 385 x^2 y^2 z^4 + 390 x^3 y^2 z^4 - 205 x^4 y^2 z^4 + 47 x^5 y^2 z^4 + 280 y^3 z^4 - \\
&595 x y^3 z^4 + 525 x^2 y^3 z^4 - 260 x^3 y^3 z^4 + 53 x^4 y^3 z^4 - 140 y^4 z^4 + 225 x y^4 z^4 - 110 x^2 y^4 z^4 + \\
&16 x^3 y^4 z^4 + 15 y^5 z^4 - 10 x y^5 z^4 - 56 x^2 y z^5 + 84 x^3 y z^5 - 42 x^4 y z^5 + 9 x^5 y z^5 + 126 y^2 z^5 - \\
&224 x y^2 z^5 + 231 x^2 y^2 z^5 - 156 x^3 y^2 z^5 + 41 x^4 y^2 z^5 - 224 y^3 z^5 + 357 x y^3 z^5 - 210 x^2 y^3 z^5 + \\
&52 x^3 y^3 z^5 + 84 y^4 z^5 - 90 x y^4 z^5 + 22 x^2 y^4 z^5 - 6 y^5 z^5 + 2 x y^5 z^5 + 28 x^2 y z^6 - 28 x^3 y z^6 + \\
&7 x^4 y z^6 - 84 y^2 z^6 + 112 x y^2 z^6 - 77 x^2 y^2 z^6 + 26 x^3 y^2 z^6 + 112 y^3 z^6 - 119 x y^3 z^6 + \\
&35 x^2 y^3 z^6 - 28 y^4 z^6 + 15 x y^4 z^6 + y^5 z^6 - 8 x^2 y z^7 + 4 x^3 y z^7 + 36 y^2 z^7 - 32 x y^2 z^7 + \\
&11 x^2 y^2 z^7 - 32 y^3 z^7 + 17 x y^3 z^7 + 4 y^4 z^7 + x^2 y z^8 - 9 y^2 z^8 + 4 x y^2 z^8 + 4 y^3 z^8 + y^2 z^9 \}
\end{aligned}
$$

Literaturverzeichnis

[1] Averbouch I., Godlin B. und Makowsky J. A.: A most general edge elimination polynomial. In: *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, 5344, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2008, S. 31-42. http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-540-92248-3_4

[2] Averbouch I., Godlin B. und Makowsky J. A.: An extension of the bivariate chromatic polynomial, *European J. Combin.*, 31, 2010, S. 1-21. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669809001267

[3] Birkhoff G. D.: A determinant formula for the number of ways of coloring an map, *Ann. of Math. (2)*, 14(1), 1912, S. 42-46. http://www.jstor.org/stable/1967597

[4] Birkhoff G. D. und Lewis D. C.: Chromatic polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1946, S. 355-451. http://www.ams.org/journals/tran/1946-060-00/S0002-9947-1946-0018401-4/home.html

[5] Bohn A.: Chromatic polynomials of complements of bipartite graphs, *Graphs Combin.*, 30(2), 2012, S. 287-301 http://link.springer.com/article/10.1007/s00373-012-1268-6

[6] Bollobás B.: *Modern Graph Theory. Grad. Texts in Math.*, 184, Springer, New York, 1998.

[7] DasGupta A.: *Fundamentals of Probability: A first Course*, Springer, New York, 2010.

[8] Diestel R.: *Graph Theory. Grad. Texts in Math.*, 173, 4. elektronische Auflage, korrigierter Nachdruck, Springer, Heidelberg, 2012. http://diestel-graph-theory.com/

[9] Dohmen K., Pönitz A. und Tittmann P.: A new two-variable generalization of the chromatic polynomial, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 6, 2003, S. 69-90. http://www.emis.de/journals/DMTCS/volumes/abstracts/dm060106.abs.html

[10] Farrell E. J.: An introduction to matching polynomials of graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, 27(1), 1979, S. 75-86. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895679900704

[11] Foldes S. und Hammer P. L.: Split graphs having Dilworth number two, *Canad. J. Math.*, 29(3), 1977, S. 666-672. http://cms.math.ca/10.4153/CJM-1977-069-1

[12] Frucht R. W.: A new method of computing chromatic polynomials of graphs. In: Chuaqui R.: *Analysis, Geometry and Probability: Proceedings of the First Chilean Symposium on Mathematics. Lect. Notes Pure Appl. Math.*, 96, Dekker, New York, 1985, S. 69-77.

[13] Koepf W.: *Computeralgebra. Eine algorithmisch orientierte Einführung*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.

[14] Koepf W.: Was ist 0^0? In: Der Mathematikunterricht 41(4/1995), Derive-Projekte im Mathematikunterricht, edited by W. Koepf, 1995, S. 65-71. `http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Publikationen/`

[15] Koepf W.: Efficient computation of Chebyshev polynomials. In: M. Wester (Ed.): *Computer Algebra Systems: A Practical Guide.* John Wiley, Chichester, 1999, S. 79-99. `http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Publikationen/`

[16] Lovasz L. und Plummer M. D: *Matching Theory. North-Holland Math. Stud., 121. Ann. Discrete Math., 29.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1986. `http://dlx.bookzz.org/genesis/319000/17202c9545854f1fc1537f867bf0fe65/_as/[L._Lovasz,_M._D._Plummer]_Matching_Theory_(North-(BookZZ.org).pdf`

[17] *Mathematica*-Package GraphUtilities, *Mathematica*, www.wolfram.com `http://reference.wolfram.com/language/GraphUtilities/guide/GraphUtilitiesPackage.html`

[18] Read R. C.: An introduction to chromatic polynomials, *J. Combin. Theory Ser. B*, 4, 1968, S. 52-71. `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021980068800870`

[19] Simon F., Tittmann P., und Trinks M.: Counting connected set partitions of graphs, *Electron. J. Combin.*, 18(1), 2011. `http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v18i1p14/pdf`

[20] Skiena S.: *Implementing Discrete Mathematics. Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Addison-Wesley Publishing Co., The Advanced Book Program, Redwood City, 1990.

[21] Sprenger T.: Implementierungen `BivariatesPolynom1`, `BivariatesPolynom2`, `Pairs` und `PartitionsOf` in *Mathematica*. `http://www.mathematik.uni-kassel.de/~sprenger`

[22] Sprenger T., Gerling M.: Implementierung `IndependentSetPartitions` in *Mathematica*. `http://www.mathematik.uni-kassel.de/~sprenger`

[23] Tan N. D. und Hung L. X.: On colorings of split graphs, *Acta Math. Vietnam.*, 31(3), 2006, S. 195-204. `http://journals.math.ac.vn/acta/index.php?option=com_content&view=article&id=181:vol-31-no-3-2006&catid=22:open-access-issues&Itemid=61`

[24] Tittmann P.: *Einführung in die Kombinatorik*, 2. Auflage, Imprint: Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2014.

[25] Tittmann P.: *Graphentheorie. Eine anwendungsorientierte Einführung*, 2. aktualisierte Auflage, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 2011.

[26] Trinks M.: *Graph Polynomials and Their Representations*, Dissertation, Technische Universität Bergakademie Freiberg, 2012. http://www.researchgate.net/publication/237063067_Graph_Polynomials_and_Their_Representations

[27] Trinks M.: Proving properties of the edge elimination polynomial using equivalent graph polynomials, 2012. http://arxiv.org/abs/1205.2205

[28] Trinks M.: The covered components polynomial: A new representation of the edge elimination polynomial, *Electron. J. Combin.*, 19(1), 2012. http://www.combinatorics.org/Volume_19/Abstracts/v19i1p50.html.

[29] Tutte W. T.: A ring in graph theory, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 43(1), 1947, S. 26-40. http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=2035532&fileId=S0305004100023173

[30] Tutte W. T.: A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Canad. J. Math.*, 6, 1954, S. 80-91. https://cms.math.ca/10.4153/CJM-1954-010-9

[31] Volkmann L.: *Graphen an allen Ecken und Kanten*, 2. Version, RWTH Aachen, 2011. https://www.math2.rwth-aachen.de/files/gt/buch/graphen_an_allen_ecken_und_kanten.pdf

[32] Welsh D. J. A.: *Complexity: Knots, Colourings and Counting. London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 186, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[33] White J. A.: On multivariate chromatic polynomials of hypergraphs and hyperedge elimination, *Electron. J. Combin.*, 18(1), 2011, S.1-17. http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v18i1p160

[34] Whitney H.: The coloring of graphs, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 17(2), 1931, S. 122-125. http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1076007/

[35] Whitney H.: A logical expansion in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 38(8), S. 572-579. http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183496087.

[36] Wilf H.: *Generatingfunctionology*, Academic Press, Boston, 1990.

[37] Wolfram St.: *The Mathematica Book*, Wolfram Research, Cambridge University Press, Cambridge, 5. Auflage, 2004.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbständig, ohne unerlaubte Hilfe Dritter angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Dritte waren an der inhaltlich-materiellen Erstellung der Dissertation nicht beteiligt; insbesondere habe ich hierfür nicht die Hilfe eines Promotionsberaters in Anspruch genommen. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren verwendet worden.