EINE REIHENENTWICKLUNG DER VERVOLLSTÄNDIGTEN UND ERGÄNZTEN RIEMANNSCHEN ZETAFUNKTION

$$\Xi(s) := s(s-1)\frac{\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{\frac{s}{2}}}$$

$$(s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\})$$

UND VERWANDTES

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
im Fachbereich Mathematik
der Universität Gesamthochschule Kassel

Vorgelegt von Markus Brede
aus Zierenberg

Kassel 2001

Einleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich im wesentlichen mit der Frage nach von Stirling-Zahlen und Zerfällungen möglichst unabhängigen Integral- und Reihendarstellungen für die Taylor- bzw. Laurentkoeffizienten der klassischen Riemannschen Zetafunktion $\zeta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, bzw. der mit ihr eng verwandten, vermöge

$$\Xi(s) := \begin{cases} s(s-1)\frac{\zeta(s)\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{\frac{s}{2}}} & \text{für } s \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\} \\ 1 & \text{für } s \in \{0,1\} \end{cases}$$

definierten Funktion $\Xi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bei Entwicklung u.a. um $s = 1$.
Im ersten Abschnitt wird ein bereits 1999 von M.A. Coppo vorgestelltes Verfahren zur Gewinnung einer Integraldarstellung u.a. der Laurentkoeffizienten γ_k der Riemannschen Zetafunktion bei Entwicklung um $s = 1$ behandelt, welches die γ_k auf die Ableitungen $\Gamma^{(k)}(1)$ der Eulerschen Gammafunktion Γ zurückführt (vgl. [Coppo]). Der dort vorgestellte Zugang läßt sich recht allgemein auf Dirichletreihen und Mellintransformierte anwenden und wird insbesondere zur Bestimmung eines Integralausdrucks für $\Xi^{(n)}(0)$ herangezogen.
Der zentrale "Abschnitt II" der vorliegenden Arbeit befaßt sich mit der Herleitung einer Reihenentwicklung für die Funktion Ξ. Diese ist im wesentlichen die Mellintransformierte der durch

$$\Phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k^2(2\pi k^2 x - 3)e^{-\pi k^2 x}$$

in $Re\, x > 0$ definierten Thetareihe Φ:

$$\Xi(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}}\Phi(x)dx \ .$$

Φ weist drei bemerkenswerte Eigenschaften auf, die die Grundlage für die Gewinnung der genannten Reihenentwicklung von Ξ ausmachen:

1.) $x^{\frac{5}{4}}\Phi(x)$ ist invariant unter der Substitution $x \leftrightarrow \frac{1}{x}$.
2.) Die Fourier-(cosinus-)transformierte φ_+ von Φ lautet

$$\varphi_+(w) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Phi(x) cos\, wx\, dx = \frac{2\sqrt{2\pi}\, w\, sin\sqrt{2\pi w}\, sinh\sqrt{2\pi w}}{(cosh\sqrt{2\pi w} - cos\sqrt{2\pi w})^2} \ .$$

Insbesondere also ist φ_+ meromorph nach ganz $\mathbb{C}$ fortsetzbar.

3.) Multiplikation mit der die Polstellen bei $cosh\sqrt{2\pi w} = cos\sqrt{2\pi w}$ behebenden Funktion $sinh^2 w/(2\sqrt{2\pi}\,w^2)$ führt auf eine *ganze* Funktion Q,

$$Q(w) := \varphi_+(w) \cdot \frac{sinh^2 w}{2\sqrt{2\pi}\,w^2} \ ,$$

deren durch

$$\beta_{2m} = \frac{2}{\pi} 4^m \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{2k}} \frac{(4k-1)\zeta(4k)}{(2m-2k+2)!}$$

gegebene Taylorkoeffizienten β_{2m} in der Entwicklung $Q(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m} w^{2m}$ der folgenden Abschätzung genügen:

$$|\beta_{2m}| < 20 \frac{4^m}{(2m+1)!} exp\left[-(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)}\right].$$

Ausgehend von diesen drei Aussagen und ferner mit Hilfe der Beziehung

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{2m}}{4^m}(2l+2m+2)!\zeta(2l+2m+2) = 0 \quad (l \in I\!N_0 \text{ beliebig})$$

läßt sich das Hauptresultat dieser Arbeit, nämlich die Entwicklung

$$\Xi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=L}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l+2m+2)!}{(2l)!} \frac{\zeta(2l+2m+2)}{2^{2l}} \left[\frac{1}{4l+3-s} + \frac{1}{4l+2+s}\right]$$

gewinnen, die – aufgrund bedingter Konvergenz – für *beliebige* $L \in I\!N_0$ und für $-2-4L < Re\, s < 3+4L$ Gültigkeit hat.
Die Herleitung dieser Entwicklung, die mittels gliedweiser Differentiation wiederum Ausdrücke für die eingangs genannten Laurentkoeffizienten von Ξ liefert, läßt sich weitgehend auch auf beliebige L-Reihen übertragen; abgesehen von einem Hilfssatz über die Gammafunktion, der in der Literatur wahrscheinlich bereits vorhanden ist, sind sämtliche Resultate dieses zweiten Abschnittes Ergebnisse des Verfassers.
"Abschnitt III" schließlich stellt neben einem charakterisierenden Kriterium für über $I\!R_0^+$ nicht verschwindende Polynome (beliebigen Grades) einen Satz vor, der für eine gewisse Klasse von ganzen Funktionen f u.a. Auskunft darüber gibt, inwiefern die Lage der Nullstellen von f Schlüsse auf die Taylorkoeffizienten von f zuläßt. Der Nachweis dieses Satzes und des zugehörigen Hilfssatzes erfolgt elementar und macht (in unterhaltsamer Weise) Gebrauch von gewissen Aussagen über quadratische Formen.

Danksagung

Herzlich danken möchte ich Herrn Prof. Dr. Klaus Barner und Herrn Prof. Dr. Wolfram Koepf für ihre Bereitschaft, die Begutachtung der vorliegenden Arbeit und den beträchtlichen damit verbundenen Energie- und Zeitaufwand zu übernehmen. Diese Aufgabe haben beide mit großer Sorgfalt (und auch mit Interesse) erfüllt und mir zugleich eine ganze Reihe von wertvollen Anregungen und Hinweisen gegeben.

Meinen Kollegen der Arbeitsgruppe Ingenieurmathematik möchte ich meinen herzlichsten Dank für das ausgesprochen angenehme Arbeitsklima ausdrücken, welches mir das Arbeiten an der vorliegenden Dissertationsschrift erheblich erleichtert hat; Frau Prof. Dr. Rita Jeltsch-Fricker gebührt dabei besonderer Dank, da sie, wo immer es möglich war, mir den größtmöglichen zeitlichen Rahmen einzuräumen bestrebt war, den ich für ein effizientes, reibungsloses und zügiges Arbeiten gut gebrauchen konnte.

Abschnitt I

Lemma 1:
Zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ existiert genau ein Polynom p_n vom Grad n derart, daß

$$x^n = \int_0^\infty p_n(x - log\, z)\, e^{-z} dz\,.$$

Beweis:
Ist $p_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ ein zunächst beliebiges Polynom über $\mathbb{C}$, so ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_n(x - log\, z)\, e^{-z} dz &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^n \alpha_k (x - log\, z)^k e^{-z} dz \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^\infty \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^l (-log\, z)^{k-l} e^{-z} dz \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} \Gamma^{(k-l)}(1)\, x^l \end{aligned}$$

worin Γ – wie schon eingangs – die Eulersche Gamma-Funktion bezeichne. Umsortieren liefert nun

$$\int_0^\infty p_n(x - log\, z)\, e^{-z} dz = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \binom{k+l}{l} \Gamma^{(l)}(1) \alpha_{k+l} \right) x^k \quad ,$$

woraus die (auch eindeutige) Möglichkeit der Wahl der α_k hervorgeht derart, daß Übereinstimmung mit x^n eintritt; es ist lediglich

$$\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \binom{k+l}{l} \Gamma^{(l)}(1) \alpha_{k+l} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = n\,, \\ 0 & \text{für } k < n \end{cases}$$

zu fordern ('Koeffizientenvergleich').
Dies ist offenbar möglich, da diese Forderung auf ein lineares Gleichungssystem für die α_k in Dreiecksform mit durchweg Einsen auf der Hauptdiagonalen der zugehörigen Koeffizientenmatrix (und daher mit Determinante=1) führt. Damit ist das Lemma gezeigt.

Bemerkung:
Der genannte Koeffizientenvergleich ermöglicht offenbar die rekursive Bestimmung der Koeffizienten α_k. Auf diese Weise erhält man u.a.

$$\begin{aligned} p_0(x) &\equiv 1\,, \\ p_1(x) &= x-\gamma\,, \\ p_2(x) &= x^2-2\gamma\, x+\gamma^2-\tfrac{\pi^2}{6}\,, \end{aligned}$$

wobei $\gamma := \gamma_{Euler}$ die Eulersche Konstante bezeichnet.
Hiermit sind die Koeffizienten der Polynome p_n auf die Ableitungen der Gamma-Funktion (bei $x=1$) zurückgeführt und können damit als bekannt angesehen werden.

Mit Hilfe des Lemmas 1 folgt nun

Satz 1 (Coppo):
Für die durch

$$\gamma_n := (-1)^n \lim_{s\downarrow 1} \left(\left(\frac{d}{ds}\right)^n \left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)\right) \quad (n\in I\!N_0)$$

definierten "verallgemeinerten Eulerschen Konstanten" γ_n gilt

$$\gamma_n = \int_0^1 p_n(-log|log\,t|)\left(\frac{1}{log\,t}-\frac{1}{t-1}\right)dt\;,$$

wenn die p_n die in Lemma 1 behandelten Polynome bezeichnen.

Beweis:
Zunächst ist bekanntlich (vgl. etwa [Lerch])

$$\gamma_n = \lim_{\mathcal{K}\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\mathcal{K}}\frac{log^n k}{k}-\frac{log^{n+1}\mathcal{K}}{n+1}\right) = \lim_{\mathcal{K}\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\mathcal{K}}\frac{log^n k}{k}-\int_1^{\mathcal{K}+1}\frac{log^n x}{x}dx\right).$$

Lemma 1 liefert nun

$$log^n x = \int_0^\infty p_n(log\,x-log\,z)e^{-z}dz\;,$$

was mittels Substitution $z/x=-log\,t\Rightarrow dz=-x\,dt/t$ übergeht in die Form

$$\frac{log^n x}{x} = \int_0^1 p_n(-log|log\,t|)\,t^x\frac{dt}{t}\;.$$

Hiermit lassen sich die Ausdrücke $log^n x$ und $log^n k$ ersetzen und es ergibt sich die Möglichkeit, die Summe $\sum_{k=1}^{\mathcal{K}}$ auszuwerten, da sie auf eine geometrische hinausläuft; doch auch das Integral läßt sich explizit angeben. Es folgt

$$\gamma_n = \lim_{\mathcal{K}\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \int_0^1 p_n(-log|log\,t|)\, t^k \frac{dt}{t} - \int_1^{\mathcal{K}+1} \int_0^1 p_n(-log|log\,t|)\, t^x \frac{dt}{t} dx \right)$$
$$= \lim_{\mathcal{K}\to\infty} \int_0^1 p_n(-log|log\,t|) \left[\sum_{k=0}^{\mathcal{K}-1} t^k - \int_0^{\mathcal{K}} t^x dx \right] dt\,.$$

Ausrechnen der Summe bzw. des Integrals führt nun auf die Behauptung:

$$\gamma_n = \lim_{\mathcal{K}\to\infty} \int_0^1 p_n(-log|log\,t|) \left[\frac{t^{\mathcal{K}}-1}{t-1} - \frac{t^{\mathcal{K}}-1}{log\,t} \right] dt$$
$$= \int_0^1 p_n(-log|log\,t|) \left(\frac{1}{log\,t} - \frac{1}{t-1} \right) dt\,,$$

wobei sich die Vertauschung mit Hilfe der Zerlegung $\int_0^1 = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1$ ($\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$) legitimieren läßt: $\lim_{\mathcal{K}\to\infty} \int_0^{\varepsilon} \to 0$ nebst $\lim_{\mathcal{K}\to\infty} \int_{1-\varepsilon}^1 \to 0$ (für $\varepsilon \to 0$) aufgrund der langsamen Divergenz von $log|log(t)|$ gegen Unendlich, denn bezeichnen – wie oben – α_k ($k = 0, ..., n$) die Koeffizienten des Polynoms p_n, so existiert $A_n := max\{|\alpha_k|, k = 0, ..., n\}$ und es folgt

$$\left| \lim_{\mathcal{K}\to\infty} \int_{0/1-\varepsilon}^{\varepsilon/1} p_n(-log|log\,t|) \left(\frac{t^{\mathcal{K}}-1}{t-1} - \frac{t^{\mathcal{K}}-1}{log\,t} \right) dt \right|$$
$$\leq A_n \lim_{\mathcal{K}\to\infty} \int_{0/1-\varepsilon}^{\varepsilon/1} \sum_{k=0}^{n} |log|log(t)||^k \left| t^{\mathcal{K}} - 1 \right| \left| \frac{1}{t-1} - \frac{1}{log\,t} \right| dt\,.$$

In $(0,1)$ ist nun $\left| t^{\mathcal{K}} - 1 \right| < 1$ nebst $\left| \frac{1}{t-1} - \frac{1}{log\,t} \right| < 1$, wie eine elementare Kurvendiskussion zeigt. In $(0, \varepsilon)$ bzw. $(1-\varepsilon, 1)$ ist schließlich zudem noch $\sum_{k=0}^{n} |log|log(t)||^k < (n+1)|log|log(t)||^n$, wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist. Es folgt $\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\mathcal{K}\to\infty} \int_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\mathcal{K}\to\infty} \int_{1-\varepsilon}^1 = 0$.

Im Hauptanteil $\lim_{\mathcal{K}\to\infty} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}$ ist – da die singulären Stellen 0 und 1 ja nicht an den Integrationsbereich heranreichen – $p_n(-log|log\,t|)$ beschränkt und die Folge $\frac{t^{\mathcal{K}}-1}{t-1} - \frac{t^{\mathcal{K}}-1}{log\,t}$ gleichmäßig konvergent. Damit ist auch die Vertauschung $\lim_{\mathcal{K}\to\infty} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \lim_{\mathcal{K}\to\infty}$ gerechtfertigt.

Bemerkung:
Satz 1 ist (wegen $p_0 \equiv 1$) eine sehr natürliche Verallgemeinerung der entsprechenden (und bekannten) Formel für die Eulersche Konstante:

$$\gamma_0 = \int_0^1 \left(\frac{1}{log\, t} - \frac{1}{t-1} \right) dt \ .$$

In ähnlicher Weise läßt sich auch eine entsprechende Aussage für die durch

$$\Xi(s) := \begin{cases} s(s-1)\frac{\zeta(s)\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{\frac{s}{2}}} & \text{für } s \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\} \\ 1 & \text{für } s \in \{0,1\} \end{cases}$$

über $\mathbb{C}$ definierte vervollständigte (und ergänzte) Riemannsche Zetafunktion Ξ nachweisen, welche – was zuvor zu zeigen ist – im wesentlichen die Mellin-Transformierte ist der in $Re\, x > 0$ vermöge

$$\Phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k^2 (2\pi k^2 x - 3) e^{-\pi k^2 x}$$

definierten Thetareihe Φ, die einer einfachen Funktionalgleichung genügt. Die genannten Aussagen sind Gegenstand der folgenden Lemmata 2 und 3:

Lemma 2:
Für $x > 0$ gilt

$$x^{\frac{5}{4}} \Phi(x) = x^{-\frac{5}{4}} \Phi\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \ .$$

Beweis:
Verwendet man die (z.B. aus [Barner], Kap. III, Par. 15, (8)) bekannte und in $x > 0$ gültige Funktionalgleichung

$$x^{\frac{1}{4}} \left(\Theta(x) + \frac{1}{2} \right) = x^{-\frac{1}{4}} \left(\Theta\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \right)$$

der in $Re\, x > 0$ durch $\Theta(x) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 x}$ definierten Theta-Reihe Θ und ferner die beiden unmittelbaren Folgerungen

$$\begin{aligned} \Theta'(x) &= -\tfrac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \Theta\left(\tfrac{1}{x}\right) - x^{-\frac{5}{2}} \Theta'\left(\tfrac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \\ \Theta''(x) &= \tfrac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} \Theta\left(\tfrac{1}{x}\right) + 3\, x^{-\frac{7}{2}} \Theta'\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^{-\frac{9}{2}} \Theta''\left(\tfrac{1}{x}\right) + \tfrac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

für Θ, Θ' und Θ'', so folgt mit der leicht zu verifizierenden Beziehung $\Phi(x) = 6\,\Theta'(x) + 4x\,\Theta''(x)$ nach kurzer Rechnung die Funktionalgleichung. Die behauptete Ungleichung ist eine (beinahe triviale) Folgerung daraus.

Lemma 3:
Für $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\Xi(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}} \Phi(x) dx \ .$$

Beweis:
Verwendet man die (z.B. wieder aus [Barner], Kap. III, Par. 15, (22)) bekannte und in $Re\, s > 1$ gültige Beziehung

$$\frac{\zeta(s)\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{\frac{s}{2}}} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}} \Theta(x) \frac{dx}{x} = 2 \int_0^\infty x^{s-2} \cdot x\, \Theta(x^2) dx \ ^1 \ ,$$

so folgt (zunächst nur für $Re\, s > 1$) sehr leicht mittels zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned}
\Xi(s) := s(s-1)\frac{\zeta(s)\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{\frac{s}{2}}} &= 2\, s \int_0^\infty \underbrace{(s-1)x^{s-2}}_{u_1'} \cdot \underbrace{x\, \Theta(x^2)}_{v_1} dx \\
&= 2\, s \left[x^{s-1} \cdot x\, \Theta(x^2) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty x^{s-1} \cdot (\Theta(x^2) + 2\, x^2\, \Theta'(x^2)) dx \right] \\
&= 0 - 2 \int_0^\infty \underbrace{s\, x^{s-1}}_{u_2'} \cdot \underbrace{(\Theta(x^2) + 2\, x^2\, \Theta'(x^2))}_{v_2} dx \\
&= -2\, x^s \cdot (\Theta(x^2) + 2\, x^2\, \Theta'(x^2)) \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty x^s \cdot (6\, x\, \Theta'(x^2) + 4\, x^3\, \Theta''(x^2)) dx \\
&= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}} (6\, \Theta'(x) + 4\, x\, \Theta''(x)) dx \ ,
\end{aligned}$$

nach (Rück-)Substitution $x \leftrightarrow x^{\frac{1}{2}}$.
Mit $6\, \Theta'(x) + 4x\, \Theta''(x) = \Phi(x)$ (vgl. Beweis von Lemma 2) ist die Behauptung zunächst in $Re\, s > 1$ gewonnen; die Gültigkeit derselben in ganz $\mathbb{C}$ ergibt sich mittels analytischer Fortsetzung, wenn die in Lemma 2 genannte Funktionalgleichung für Φ und die hieraus folgende Beziehung $\lim_{x \to \infty} x^s \Phi(x) = \lim_{x \to 0} x^s \Phi(x) = 0$ (für alle $s \in \mathbb{C}$) verwendet werden.

Bemerkung: Die Funktionalgleichung für Φ impliziert die Funktionalgleichung der Zetafunktion:

$$\Xi(s) = \int_0^1 \left(x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}} \right) \Phi(x) dx = \int_1^\infty \left(x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}} \right) \Phi(x) dx = \Xi(1-s) \ .$$

[1] Die Substitution $x \leftrightarrow x^2$ macht die nachfolgende Rechnung transparenter.

$$\frac{(s-1)\zeta(s)}{\pi^{\frac{s}{4}}}$$

$$\frac{s\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{\frac{s}{4}}}$$

$$\Xi(s) := s\,(s-1)\frac{\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{\frac{s}{2}}}$$

Nunmehr läßt sich Satz 2 formulieren:

Satz 2:
Bedeuten p_n ($n \in I\!N_0$) die in Lemma 1 behandelten Polynome, so gilt für die n-ten Ableitungen $\Xi^{(n)}(0)$ von Ξ bei $s=0$:

$$\Xi^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n}\int_0^1 p_n\left(-log\left(\frac{log^2 x}{4\pi}\right)\right)\left[log^2 x\frac{1+x}{(1-x)^3} + log\,x\,\frac{2}{(1-x)^2}\right] dx\ .$$

Beweis:
Der Bemerkung im Anschluß an den Beweis von Lemma 3 zufolge ist

$$\begin{aligned}\Xi^{(n)}(0) :&= \left(\frac{d}{ds}\right)^n \int_0^1 \left(x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}}\right)\Phi(x)dx\Big|_{s=0}\\ &= \frac{1}{2^n}\int_0^1 log^n x\left((-1)^n\sqrt{x}+1\right)\Phi(x)dx\\ &= \frac{1}{2^n}\int_0^\infty log^n x\cdot x^{-\frac{5}{2}}\Phi\left(\frac{1}{x}\right)dx\ ;\end{aligned}$$

letzteres aufgrund von $\Phi(x) = x^{-\frac{5}{2}}\Phi(\frac{1}{x})$. Hierbei ist die Vertauschung legitim, da der Integrationsweg kompakt und der Integrand, nämlich $I(x,s) := \left(x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}}\right)\Phi(x)$, stetig ist, und – wieder aufgrund der Funktionalgleichung für Φ – auch die beliebig hohen partiellen Ableitungen $I_{s^n}(x,s)$ von I nach s stetig sind.
Heranziehen von Lemma 1 führt nun auf

$$\begin{aligned}\Xi^{(n)}(0) &= \frac{1}{2^n}\int_0^\infty x\int_0^1 p_n(-log|log\,t|)t^x\frac{dt}{t}\cdot x^{-\frac{5}{2}}\Phi\left(\frac{1}{x}\right)dx\\ &= \frac{1}{2^n}\int_0^1 p_n(-log|log\,t|)\left[\int_0^\infty t^x x^{-\frac{3}{2}}\Phi\left(\frac{1}{x}\right)dx\right]\frac{dt}{t}\ .\end{aligned}$$

Die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge läßt sich – leider nur sehr aufwendig – u.a. mittels [Fichtenholz], Kap. XIV, Nr. 521, Satz 4 zeigen. Dieser liefert für $f(x,t) := p_n(-log|log\,t|)\cdot t^{x-1}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\Phi(\frac{1}{x})$ und $\varepsilon \in (0,\frac{1}{2}]$ zunächst

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\int_0^\infty f(x,t)dx\,dt = \int_0^\infty\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(x,t)dx\,dt\ ,$$

denn $f(x,t)$ – bei $x=0$ stetig ergänzt durch $f(0,t) := 0$ – ist stetig über $[\varepsilon, 1-\varepsilon]\times[0,\infty)$ und ferner das Integral $I(t) := \int_0^\infty f(x,t)dx$ (aufgrund des starken Abklingens von f für $x\to\infty$) gleichmäßig konvergent (bzgl. t).

Übergang $\varepsilon \to 0$ liefert im Falle der Existenz der Grenzwerte (formal)

$$\int_0^1\int_0^\infty f(x,t)dx\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(x,t)dt\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty\left(\int_0^1 - \int_0^\varepsilon - \int_{1-\varepsilon}^1\right) f(x,t)dt\,dx\ ,$$

d.h.

$$\int_0^\infty\int_0^1 f(x,t)dt\,dx = \int_0^1\int_0^\infty f(x,t)dx\,dt + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty\left(\int_0^\varepsilon + \int_{1-\varepsilon}^1\right) f(x,t)dt\,dx\ .$$

Die Existenz geht aber nun insbesondere aus den folgenden beiden (mit α_1 und α_2 bezeichneten) Abschätzungen hervor:

$$\alpha_1) \qquad \left|\int_0^\infty\int_0^\varepsilon f(x,t)dt\,dx\right| \le \int_0^\infty\int_0^\varepsilon |p_n(-log(-log\,t))|\,t^{x-1}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\Phi\left(\frac{1}{x}\right)dt\,dx$$
$$< (n+1)A_n\int_0^\infty\int_0^\varepsilon |log(-log\,t)|^n\,t^{x-1}dt\cdot x^{-\frac{3}{2}}\Phi\left(\frac{1}{x}\right)dx\ ,$$

falls ε hinreichend klein ist und - wie im Beweis von Satz 1 – auch hier A_n den Betrag des betraglich größten Koeffizienten von p_n bezeichnet.
Nun ist – erneut für genügend kleine ε – $|log(-log\,t)|^n < |log\,t|$ $(t \in (0,\varepsilon])$ und für solche also

$$\int_0^\varepsilon |log(-log\,t)|^n\,t^{x-1}dt < -\int_0^\varepsilon log\,t\cdot t^{x-1}dt$$
$$= -\left[log\,t\cdot\frac{t^x}{x}\Bigg|_{t=0}^{t=\varepsilon} - \int_0^\varepsilon \frac{1}{t}\cdot\frac{t^x}{x}dt\right] = -log\,\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon^x}{x} + 0 + \frac{1}{x}\cdot\frac{\varepsilon^x}{x}\ .$$

Damit ist

$$\left|\int_0^\infty\int_0^\varepsilon f(x,t)dt\,dx\right| \le (n+1)A_n\int_0^\infty\left(\frac{|log\,\varepsilon|}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\varepsilon^x\cdot x^{-\frac{3}{2}}\Phi\left(\frac{1}{x}\right)dx\ .$$

Nun ist aufgrund von Lemma 2 für geeignetes K_0 – z.B. für $K_0 = 96$ –

$$\Phi\left(\frac{1}{x}\right) := \sum_{k=1}^\infty 2\pi k^2\left(\frac{2\pi k^2}{x} - 3\right)e^{-\frac{\pi k^2}{x}} < K_0 e^{-\frac{3}{x}}\ ,$$

und somit folgt mittels Substitution $x \leftrightarrow x^2$

$$\left|\int_0^\infty\int_0^\varepsilon f(x,t)dt\,dx\right| < 2K_0(n+1)A_n\int_0^\infty\left(\frac{|log\,\varepsilon|}{x^4} + \frac{1}{x^6}\right)e^{log\,\varepsilon\cdot x^2 - \frac{3}{x^2}}dx\ .$$

Die beiden nun entstandenen Integrale lassen sich auswerten mit Hilfe der für $a > 0$, $b > 0$ gültigen (tabellierten) Formel (vgl. [Ryshik, Gradstein], 3.214, Gl. 2)

$$I(a,b) := \int_0^\infty e^{-a\,x^2-\frac{b}{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}\ ;$$

mittels Ableiten nach b nämlich erhält man die auch unten noch Verwendung findenden Integralformeln

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\,x^2-\frac{b}{x^2}}\,dx}{x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\,e^{-2\sqrt{ab}}\ ,$$

nebst

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\,x^2-\frac{b}{x^2}}\,dx}{x^4} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{b^3}}\,(1+2\sqrt{ab})e^{-2\sqrt{ab}}\ .$$

(Die Vertauschbarkeit der Differentiation gegen die Integration, die Möglichkeit also, unter dem Integralzeichen zu differenzieren, folgt (leicht) aus der gleichmäßigen Konvergenz der erhaltenen Integrale; vgl. wieder [Fichtenholz], Kap. XIV, Nr. 520, Satz 3.)
Auswerten mit Hilfe der nun verfügbaren Beziehungen und anschließender Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ zeigt schließlich – da $e^{-2\sqrt{-3\,log\,\varepsilon}}$ hinreichend stark gegen Null strebt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty \int_0^\varepsilon f(x,t)dt\,dx = 0\ .$$

Als weitere Abschätzung gilt ferner – beinahe trivial, da das Integrationsintervall diesmal nicht an die hier problematische Stelle $t=0$ heranreicht –

$$\alpha_2)\qquad \left|\int\limits_0^\infty \int\limits_{1-\varepsilon}^1 f(x,t)dt\,dx\right| \le \int\limits_0^\infty \int\limits_{1-\varepsilon}^1 |p_n(-log(-log\,t))|\cdot t^{x-1}x^{-\frac{3}{2}}\Phi\Big(\frac{1}{x}\Big)\,dt\,dx$$
$$< \int\limits_0^\infty \int\limits_{1-\varepsilon}^1 |p_n(-log(-log\,t))|\cdot t^{-1}dt\cdot x^{-\frac{3}{2}}\Phi\Big(\frac{1}{x}\Big)\,dx$$
$$= \int\limits_0^\infty x^{-\frac{3}{2}}\Phi\Big(\frac{1}{x}\Big)\,dx\cdot \int\limits_{1-\varepsilon}^1 |p_n(-log(-log\,t))|dt\ ,$$

was offenbar gleichfalls gegen Null geht, sofern $\varepsilon \to 0$, denn das (uneigentliche) Integral $\int_0^1 |p_n(-log(-log\,t))|dt$ existiert.

Die in Rede stehende Vertauschung ist nunmehr gesichert, denn in der letztgenannten (zunächst) formalen Beziehung

$$\int_0^\infty \int_0^1 f(x,t)dt\,dx = \int_0^1 \int_0^\infty f(x,t)dx\,dt + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty \left(\int_0^\varepsilon + \int_{1-\varepsilon}^1\right) f(x,t)dt\,dx$$

existieren nun also alle Grenzwerte: Die linke Seite ist gleich $2^n \cdot \Xi^{(n)}(0)$, die Limiten rechts verschwinden und mithin existiert auch das Integral $\int_0^1 \int_0^\infty f(x,t)dx\,dt$ und es gilt

$$\Xi^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n} \int_0^\infty \int_0^1 f(x,t)dt\,dx = \frac{1}{2^n} \int_0^1 \int_0^\infty f(x,t)dx\,dt$$
$$= \frac{1}{2^n} \int_0^1 p_n(-log|log\,t|) \int_0^\infty t^x x^{-\frac{3}{2}} \Phi\!\left(\frac{1}{x}\right) dx \frac{dt}{t}\ .$$

Verwenden der Definition von Φ führt nun auf

$$\Xi^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n} \int_0^1 p_n(-log|log\,t|) \int_0^\infty t^x \sum_{k=1}^\infty 2\pi k^2 \left(\frac{2\pi k^2}{x^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}\right) e^{-\frac{\pi k^2}{x}} dx \frac{dt}{t}$$
$$= \frac{1}{2^n} \int_0^1 p_n(-log|log\,t|) \sum_{k=1}^\infty 2\pi k^2 \int_0^\infty \left(\frac{2\pi k^2}{x^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}\right) e^{x\cdot log\,t - \frac{\pi k^2}{x}} dx \frac{dt}{t}\ ,$$

wobei die vorgenommene Vertauschung sich wie folgt rechtfertigen läßt: Aus der für alle reellen $x > 0$ gültigen (trivialen) Abschätzung

$$1+x < e^x \Rightarrow \left(1+\frac{\pi k^2}{3x}\right)^3 < \left(e^{\frac{\pi k^2}{3x}}\right)^3 \Rightarrow e^{-\frac{\pi k^2}{x}} < \frac{27x^3}{(3x+\pi k^2)^3}$$

folgt für $\mathcal{K} \in I\!N$ (und $t \in (0,1)$) sofort

$$\left|\int_0^\infty t^x \sum_{k=\mathcal{K}}^\infty 2\pi k^2 \left(\frac{2\pi k^2}{x^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}\right) e^{-\frac{\pi k^2}{x}} dx\right| < \int_0^\infty t^x \sum_{k=\mathcal{K}}^\infty 2\pi k^2 \left|\frac{2\pi k^2}{x^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \frac{27x^3 dx}{(3x+\pi k^2)^3}$$
$$< 54 \int_0^\infty t^x \sum_{k=\mathcal{K}}^\infty \pi k^2 \left(\frac{2\pi k^2}{x^{\frac{5}{2}}} + \frac{3\pi k^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \frac{x^3 dx}{(0+\pi k^2)^3} = \frac{54}{\pi} \int_0^\infty t^x \sum_{k=\mathcal{K}}^\infty \frac{2\sqrt{x}+3x^{\frac{3}{2}}}{k^2} dx\,.$$

Dies strebt mit $\mathcal{K} \to \infty$ offenbar gegen Null, da $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ konvergiert. Mit $\int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty ...\,dx = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}-1} \int_0^\infty ...\,dx + \int_0^\infty \sum_{k=\mathcal{K}}^\infty ...\,dx$, worin die linke Seite existiert und der zweite Summand rechts – wie gesehen – für $\mathcal{K}\to\infty$ gegen Null geht, folgt: Auch $\lim_{\mathcal{K}\to\infty} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}-1} \int_0^\infty ...\,dx = \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty ...\,dx$ existiert und ist gleich $\int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty ...\,dx$, womit die Vertauschbarkeit gezeigt ist.

Die Substitution $x \leftrightarrow x^2$ führt nun auf

$$\Xi^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n}\int_0^1 p_n(-log|log\,t|)\sum_{k=1}^{\infty} 4\pi k^2 \int_0^{\infty}\left(\frac{2\pi k^2}{x^4} - \frac{3}{x^2}\right) e^{x^2\cdot log\,t - \frac{\pi k^2}{x^2}}\, dx \frac{dt}{t} \ .$$

Die hierin auftretenden Integrale lassen sich nun mittels der oben bereits genannten Formeln geschlossen auswerten und somit folgt

$$\Xi^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n}\int_0^1 p_n(-log|log\,t|)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi k^2}{e^{2\sqrt{-\pi log\,t}\,k}} \left[\sqrt{-\pi log\,t} - \frac{1}{k}\right] \frac{dt}{t} \ .$$

Die Substitution $-log\,x = 2\sqrt{-\pi log\,t} \Rightarrow -log\,t = \frac{log^2 x}{4\pi} \Rightarrow \frac{dt}{t} = -\frac{log\,x}{2\,\pi\,x}\,dx$ führt zusammen mit den beiden geometrischen Summenformeln

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^k = \frac{x}{(1-x)^2}\ , \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2\,x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}\ , \ (|x| < 1)$$

schließlich auf die Behauptung:

$$\begin{aligned}\Xi^{(n)}(0) &= \frac{1}{2^n}\int_0^1 p_n\left(-log\left(\frac{log^2 x}{4\pi}\right)\right)\sum_{k=1}^{\infty} 4\pi k^2 x^k \left[+\frac{log\,x}{2} + \frac{1}{k}\right]\frac{log\,x}{2\,\pi\,x}\,dx \\ &= \frac{1}{2^n}\int_0^1 p_n\left(-log\left(\frac{log^2 x}{4\pi}\right)\right)\left[log^2 x\frac{1+x}{(1-x)^3} + log\,x\,\frac{2}{(1-x)^2}\right] dx \ .\end{aligned}$$

Bemerkung:

Die vorgestellte Rechnung läßt sich nur auf den Fall $s \in 2\mathbb{N}_0$ übertragen, da nur dieser auf geometrische Summen führt. (Ist $s \in 2\mathbb{Z}^-$, so treten Polylogarithmen auf, im Falle beliebiger $s \in \mathbb{C}$ zudem modifizierte Bessel- bzw. MacDonaldsche Funktionen.) Man erhält etwa

$$\Xi^{(n)}(2) = -\frac{2\pi}{2^n}\int_0^1 p_n\left(-log\left(\frac{log^2 x}{4\pi}\right)\right)\left[log\,x\,\frac{x^2+4\,x+1}{(1-x)^4} + 3\,\frac{x+1}{(1-x)^3}\right] dx\,,$$

nebst

$$\begin{aligned}\Xi^{(n)}(4) = \frac{4\pi^2}{2^n}\int_0^1 p_n\left(-log\left(\frac{log^2 x}{4\pi}\right)\right)\cdot \\ \left[\frac{x^3+11x^2+11x+1}{(1-x)^5} + \frac{3}{log\,x}\frac{x^2+4\,x+1}{(1-x)^4} - \frac{3}{log^2 x}\frac{x+1}{(1-x)^3}\right] dx \ .\end{aligned}$$

Die oben bemerkte Funktionalgleichung $\Xi(s) = \Xi(1-s)$ ermöglicht freilich noch die Gewinnung analoger Formeln für die ungeraden s der Form $s = 2k+1$, $(k \in \mathbb{Z}_0^-)$, denn damit ist $\Xi^{(n)}(1-s) = (-1)^n \Xi^{(n)}(s)$.

Bemerkung:

Lemma 1 läßt sich offenbar recht allgemein anwenden zur Gewinnung von Integralausdrücken für die Ableitungen von Dirichletreihen der Form $\sum_{k=1}^{\infty} a_k/k^s$ und von Mellintransformationen der Form $\int_0^{\infty} x^s f(x)dx$, denn diese enthalten ja Logarithmenpotenzen, welche sich mittels Lemma 1 umformen lassen; man erhält, sofern sich die Vertauschung von Differentiation gegen Summation bzw. Integration rechtfertigen läßt,

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s} = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{log^n k}{k^s} = (-1)^n \int_0^1 p_n(-log|log\, t|) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{t^{k-1}}{k^{s-1}}\, dt,$$

nebst

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^n \int_0^{\infty} x^s f(x)dx = \int_0^{\infty} log^n x \cdot x^s f(x)dx = \int_0^1 p_n(-log|log\, t|) \int_0^{\infty} x^{s+1} t^{x-1} f(x)dx\, dt.$$

Bemerkung:

Bevor im nachfolgenden Abschnitt II der zweite, der eigentlich interessante und gangbare Zugang zur Bestimmung der Ableitungen $\Xi^{(n)}(s)$ $(s \in \mathbb{C})$ behandelt wird, soll noch kurz eine Möglichkeit angesprochen werden, gut (genauer: geometrisch) konvergente Reihen für die γ_n zu gewinnen, welche freilich Stirling-Anzahlen und auch Ableitungen von ζ (allerdings an Stellen $s \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$) enthalten. Dazu kann ein Zwischenergebnis aus dem Beweis des Satzes 1 herangezogen werden:

$$\gamma_n = \lim_{\mathcal{K}\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \frac{log^n k}{k} - \int_1^{\mathcal{K}} \frac{log^n x}{x} dx \right) = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{log^n k}{k} - \frac{log^n(x+k)}{x+k} \right) dx\, .$$

Taylorentwicklung des Integranden um $x = 0$ führt dann etwa im Falle $n = 1$ auf das Ergebnis

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2} log^2(2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left[\Big(\zeta(k+1) - 1\Big) \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} + \zeta'(k+1) \right].$$

Eine sehr ähnlich strukturierte, allerdings besser konvergente Reihe gab K. Dilcher (u.a.) an (vgl. [Dilcher]):

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2} log^2\!\left(\frac{3}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(2k+1)} \left[\Big(\zeta(2k+1) - 1\Big) \sum_{l=1}^{2k} \frac{1}{l} + \zeta'(2k+1) \right].$$

Abschnitt II

Nun zur Gewinnung der eingangs genannten Reihenentwicklung der Funktion Ξ, des zentralen Resultats dieser Arbeit (vgl. Satz 3, (i)).
Ihr Nachweis erfordert im wesentlichen zwei Hilfssätze – die Lemmata 10 und 11 –, welche sich ihrerseits mittels einiger weiterer Hilfssätze ergeben. So folgt Lemma 10 mittels der Lemmata 4, 6, 8 und 9 und Lemma 11 mittels Lemma 4 und Lemma 10; die Lemmata 5 und 7 werden zur Gewinnung der Lemmata 6 und 8 benötigt.

Lemma 4:
Die gerade Fortsetzung

$$\Phi_+(x) := \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\pi k^2(2\pi k^2|x|-3)e^{-\pi k^2|x|} & \text{für } x \in I\!\!R\backslash\{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

der Theta-Reihe $\Phi(x)$ nach ganz $I\!\!R$ ist Fourier-(cosinus-)transformierbar. Für die Fourier-(cosinus-)transformierte $\varphi_+(w)$, gegeben durch

$$\varphi_+(w) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_+(x)\, e^{iwx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \Phi(x)\, cos(wx)\, dx\ ,$$

gilt

$$\varphi_+(w) = \frac{2\sqrt{2\pi}\, w\, sin\sqrt{2\pi w}\, sinh\sqrt{2\pi w}}{(cosh\sqrt{2\pi w} - cos\sqrt{2\pi w})^2} \quad (\text{für } w \neq 0)\,.$$

Insbesondere ist φ_+ meromorph nach ganz $C\!\!\!\!I$ fortsetzbar und (nach Fortsetzung) holomorph in $w = 0$.

Beweis:
Wegen $\Phi(x) = \mathcal{O}(x\, e^{-\pi x})$ für $x \to \infty$ nebst $cos(wx) = \mathcal{O}(e^{|wx|})$ für $x \to \infty$ folgt zunächst: φ_+ ist im Kreis $K_\pi(0) := \{w \in C\!\!\!\!I \,\big|\, |w| < \pi\}$ holomorph und daher um $w = 0$ in eine Taylorreihe mit Konvergenzradius $\geq \pi$ entwickelbar; diese Entwicklung in $K_\pi(0)$ lautet

$$\varphi_+(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} \Phi(x) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(wx)^{2l}}{(2l)!}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{w^{2l}}{(2l)!} \int\limits_0^{\infty} x^{2l}\Phi(x) dx\ .$$

Die Vertauschbarkeit sieht man (leicht) wie folgt ein: In $K_\pi(0)$ ist

$$\int_0^\infty \sum_{l=0}^\infty ... \, dx = \sum_{l=0}^{L-1} \int_0^\infty ... \, dx + \int_0^\infty \sum_{l=L}^\infty ... \, dx$$

für beliebiges $L \in I\!N^+$, wobei

$$\left| \int\limits_0^\infty \Phi(x) \sum_{l=L}^\infty (-1)^l \frac{(wx)^{2l}}{(2l)!} \, dx \right| \leq \int\limits_0^\infty \Phi(x) \sum_{l=L}^\infty \frac{(|w|x)^{2l}}{(2l)!} \, dx = \sum_{l=L}^\infty \int\limits_0^\infty \Phi(x) \frac{(|w|x)^{2l}}{(2l)!} \, dx$$

wegen absoluter Konvergenz der (Rest-) Reihe; (vgl. [Fichtenholz], Kap. XIV, Nr. 518, Folgerung aus Satz 1).

Nun folgt mittels Lemma 3 und Verwenden der Definition von Ξ

$$\sum_{l=L}^\infty \int_0^\infty \Phi(x) \frac{(|w|x)^{2l}}{(2l)!} \, dx = \sum_{l=L}^\infty \frac{|w|^{2l}}{(2l)!} \Xi(4l) < 2\zeta(4L) \sum_{l=L}^\infty (4l-1) \frac{|w|^{2l}}{\pi^{2l}} \ ,$$

was im Falle $L \to \infty$ aber offenbar gegen Null strebt, da ja $|w| < \pi$.

Damit ist die Vertauschung gerechtfertigt, denn in der genannten Zerlegung des (existierenden) Integrals $\int_0^\infty \sum_{l=0}^\infty$ strebt der hintere Summand gegen Null, wenn $L \to \infty$, und mithin strebt der vordere gegen $\sum_{l=0}^\infty \int_0^\infty$ und stimmt mit $\int_0^\infty \sum_{l=0}^\infty$ überein.

Man erhält

$$\begin{aligned}
\varphi_+(w) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{l=0}^\infty (-1)^l \frac{w^{2l}}{(2l)!} \int_0^\infty x^{2l} \Phi(x) dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{l=0}^\infty (-1)^l \frac{w^{2l}}{(2l)!} \, \Xi(4l) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + \sum_{l=1}^\infty (-1)^l \frac{w^{2l}}{(2l)!} \, 4l(4l-1) \, \frac{\zeta(4l)\Gamma(2l)}{\pi^{2l}} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^\infty (-1)^l \zeta(4l)(4l-1) \left(\frac{w}{\pi} \right)^{2l} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^\infty (-1)^l \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^{4l}} (4l-1) \left(\frac{w}{\pi} \right)^{2l} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty (-1)^l (4l-1) \left(\frac{w}{\pi m^2} \right)^{2l} \right) \ ;
\end{aligned}$$

letzteres aufgrund der absoluten Konvergenz der Doppelreihe.

Mit Hilfe der beiden geometrischen Summenformeln

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l x^{2l} = -\frac{x^2}{x^2+1} \ \ , \ \ \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l l\, x^{2l} = -\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

folgt nun leicht (für $w \neq 0$)

$$\varphi_+(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^2(w^2-3\pi^2 m^4)}{(w^2+\pi^2 m^4)^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{w^2(w^2-3\pi^2 m^4)}{(w^2+\pi^2 m^4)^2} \ .$$

Die Poissonsche Summenformel

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) cos(2\,\pi\, n\, x) dx$$

liefert nun sofort

$$\varphi_+(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w^2(w^2-3\pi^2 x^4)}{(w^2+\pi^2 x^4)^2}\, cos(2\,\pi\, n\, x) dx \ .$$

Schreibt man in den auftretenden Integralen $cos(2\,\pi\, n\, x)$ in der Form

$$cos(2\,\pi\, n\, x) = \frac{e^{i\cdot 2\pi n x} + e^{i\cdot 2\pi n x}}{2} \ ,$$

so ergibt sich mittels Residuenkalkül

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w^2(w^2-3\pi^2 x^4)}{(w^2+\pi^2 x^4)^2}\, cos(2\,\pi\, n\, x) dx = 2\,\pi\, w\, |n| \cdot \frac{sin(\sqrt{2\pi|w|}\, |n|)}{e^{\sqrt{2\pi|w|}\, |n|}} \ ,$$

und damit wird

$$\varphi_+(w) = 4\sqrt{2\pi}\, w \sum_{n=1}^{\infty} n\, \frac{sin(\sqrt{2\pi|w|}\, n)}{e^{\sqrt{2\pi|w|}\, n}} \ .$$

Mit Hilfe der Eulerschen Gleichung $sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{i\,x} - e^{-i\,x})$ läßt sich nun noch der Sinus umformen, und anschließend können die (dann auftretenden) geometrischen Reihen mittels $\sum_{n=1}^{\infty} n/q^n = q/(q-1)^2$ (für $|q| > 1$) ausgewertet werden. Dieses Vorgehen führt sofort auf die erste behauptete Gleichung – gesichert allerdings erst für $|w| < \pi$.

Beachtet man schließlich, daß φ_+ gerade ist und daß $sinh(\sqrt{\frac{\pi}{2}\, w}\,(1-i)) = 0 \Leftrightarrow w = -\pi\, k^2\, i$ ($k \in \mathbb{N}_0$), so folgt nach analytischer Fortsetzung der Rest.

$$\Phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi k^2 (2\pi k^2 x - 3)}{exp(\pi k^2 x)}$$

$$x^{\frac{5}{4}} \Phi(x)$$

$$\varphi_+(w) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(x)\, cos(wx)\, dx$$
$$= \frac{2\sqrt{2\pi}\, w\, sin\sqrt{2\pi w}\, sinh\sqrt{2\pi w}}{(cosh\sqrt{2\pi w} - cos\sqrt{2\pi w})^2}$$

Bemerkung:
Analog zu Φ_+ läßt sich (u.a.) auch die *ungerade* Fortsetzung Φ_-:

$$\Phi_-(x) := sgn(x) \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k^2 (2\pi k^2 |x| - 3) e^{-\pi k^2 |x|}$$

von Φ nach ganz $I\!R$ untersuchen: Auch diese Funktion ist Fouriertransformierbar und die (nun: Sinus-) Transformierte φ_- lautet

$$\varphi_-(w) = -Re \left(\frac{\sqrt{2\pi}\, w}{sinh^2(\sqrt{\frac{\pi}{2}\, w}\,(1-i))} \right) \ , \ (w > 0)\,.$$

Bemerkung:
Da $\Theta(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $(x \to 0)$, ist auch Θ – nach vorheriger (z.B.) gerader oder ungerader Fortsetzung nach $I\!R$ – Fouriertransformierbar.
Eine analoge Rechnung wie beim Beweis des Lemmas 4 liefert

$$\begin{aligned} \vartheta_+(w) :&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Theta(x) cos(wx) dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{w}} + \frac{1}{\sqrt{w}}\,(Re - Im) \left[\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi w}\,(1-i)} - 1} \right] \ , \\ \vartheta_-(w) :&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Theta(x) sin(wx) dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{w}} + \frac{1}{\sqrt{w}}\,(Re + Im) \left[\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi w}\,(1-i)} - 1} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} \ . \end{aligned}$$

Bemerkung:
Für die Koeffizienten a_k der über $[-1,1]$ gültigen Fourier-*Entwicklung*

$$\Phi_+(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, cos(\pi\, k\, x)$$

der 2-periodischen Fortsetzung von $\Phi_+(x)$ $(x \in [-1,1])$ nach $I\!R$ gilt:

$$a_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1-2\pi m^2}{e^{\pi m^2}} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi m^2} \ ,$$

bzw. (für $k \neq 0$)

$$a_k = Im \left(\frac{\pi^2 k}{sinh^2(\sqrt{\frac{|k|}{2}}\pi(1-i))} \right) + (-1)^{k+1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^4 \frac{2\pi m^6 - m^4 + 2\pi k^2 m^2 - 5k^2}{(k^2+m^4)^2 e^{\pi m^2}} \ .$$

Nächster zum Nachweis von Satz 3 erforderlicher Hilfssatz ist Lemma 6; es wird – gleich im Anschluß – gewonnen mittels

<u>Lemma 5:</u>
Für $Re\, x > 0$ gilt
$$\Psi(x) := \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}e^{-\pi k^2 x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi}{4x}} \ .$$
Ferner ist das Integral
$$F(z) := \int_0^{\infty} \Psi'(z+t)\Psi'(t)\, dt$$
aufgrund der genannten Beziehung für $z > 0$ wohldefiniert und es gilt
$$F(z) = \frac{\pi}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{\pi l^3}{sinh\, \pi l}\, e^{-\pi l^2 z} \ .$$
<u>Beweis:</u>
Die behauptete Gleichung für Ψ folgt zunächst sehr leicht mit Hilfe der im Beweis von Lemma 2 bereits verwendeten Funktionalgleichung der in $Re\, x > 0$ durch $\Theta(x) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 x}$ definierten Thetafunktion Θ; sie liefert insbesondere die gleich noch erforderliche Aussage $\lim_{t\to 0}\Psi(t) = \frac{1}{2}$. Mittels partieller Integration[2], welche die folgenden Vertauschungen von Integral- gegen die beiden Summenzeichen ermöglicht, folgt nun für F:
$$\begin{aligned} F(z) &= \left[\lim_{t\to\infty} - \lim_{t\to 0}\right](\Psi'(z+t)\Psi(t)) - \int_0^{\infty} \Psi''(z+t)\Psi(t)\, dt \\ &= -\frac{1}{2}\Psi'(z) - \int_0^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\pi^2 l^4 e^{-\pi l^2(z+t)}\Psi(t)dt \ . \end{aligned}$$
Hierbei gilt für $L \in I\!N_0$
$$\begin{aligned} \left|\int_0^{\infty}\sum_{l=L}^{\infty}(-1)^{l+1} l^4 e^{-\pi l^2(z+t)}\Psi(t)dt\right| &\le \int_0^{\infty}\sum_{l=L}^{\infty} l^4 e^{-\pi l^2(z+0)}\Psi(t)dt \\ &= \int_0^{\infty}\Psi(t)dt\sum_{l=L}^{\infty} l^4 e^{-\pi l^2 z} =: J_0 \sum_{l=L}^{\infty} l^4 e^{-\pi l^2 z}, \end{aligned}$$
was im Falle $L \to \infty$ (und $z > 0$) offenbar gegen Null strebt.
Es darf also das Integral gegen die Reihe (über l) vertauscht werden.

[2] Das erforderliche gliedweise Ableiten läßt sich (leicht) mittels der – wegen $z > 0$ – über ganz $I\!R^+$ gleichmäßigen Konvergenz der abgeleiteten Reihe legitimieren.

Zusammen mit der Definition von Ψ folgt nun

$$F(z) = -\frac{1}{2}\Psi'(z) - \pi^2 \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1} l^4 e^{-\pi l^2 z} \int_0^{\infty} e^{-\pi l^2 t} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1} e^{-\pi m^2 t} dt \ ,$$

wobei auch die weitere Vertauschung der Integration gegen die Summation über m gestattet ist, denn zunächst ist

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi l^2 t} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1} e^{-\pi m^2 t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\pi l^2 t} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1} e^{-\pi m^2 t} dt \ .$$

Hierin gilt für $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\pi l^2 t} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1} e^{-\pi m^2 t} dt = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\pi (l^2+m^2) t} dt \ ,$$

denn für $M \in \mathbb{N}^+$ ist

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\pi l^2 t} \sum_{m=M}^{\infty}(-1)^{m+1} e^{-\pi m^2 t} dt \right| \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} e^{-\pi m^2 t} dt < \int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} e^{-\pi m\, t} dt$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(e^{-\pi t})^M}{1-e^{-\pi t}} dt < \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-\pi M t} dt}{1-e^{-\pi\varepsilon}} < \frac{1}{1-e^{-\pi\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-\pi M t} dt = \frac{1}{1-e^{-\pi\varepsilon}} \frac{1}{\pi M} \ ,$$

was offenbar mit $M \to \infty$ gegen Null geht.
Nunmehr ist gewonnen

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi l^2 t} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1} e^{-\pi m^2 t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1} \frac{e^{-\pi(l^2+m^2)\varepsilon}}{\pi(l^2+m^2)} \ .$$

Hierin kann der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ gliedweise ausgeführt werden, denn

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1} \frac{e^{-\pi(l^2+m^2)\varepsilon}}{\pi(l^2+m^2)} = \left(\sum_{m=1}^{M-1} \lim_{\varepsilon \to 0} + \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{m=M}^{\infty} \right) (-1)^{m+1} \frac{e^{-\pi(l^2+m^2)\varepsilon}}{\pi(l^2+m^2)}$$

(für $M \in \mathbb{N}^+$), wobei für $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{m=M}^{\infty}(-1)^{m+1} \frac{e^{-\pi(l^2+m^2)\varepsilon}}{\pi(l^2+m^2)} \right| < \frac{1}{\pi} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{l^2+m^2} < \frac{1}{\pi} \sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{m^2} \ ,$$

was mit $M \to \infty$ offenbar gegen 0 geht.
Es folgt also

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi l^2 t} \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1} e^{-\pi m^2 t} dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\pi(l^2+m^2)} \ ,$$

was mit der oben behaupteten Vertauschbarkeit äquivalent ist.

Dies in die letztgenannte Gleichung für F eingesetzt ergibt nun

$$F(z) = -\frac{1}{2}\Psi'(z) - \pi^2 \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1} l^4 e^{-\pi l^2 z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\pi(l^2+m^2)} \ ,$$

und zusammen mit $\sum_{m=1}^{\infty} a_m = \frac{1}{2}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{|m|} - a_0\right)$ und ferner mittels der (bekannten) Partialbruchzerlegung der Funktion $x \mapsto \pi x / sinh(\pi x)$ folgt schließlich die Behauptung:

$$\begin{aligned} F(z) &= -\frac{1}{2}\Psi'(z) + \frac{\pi}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1} l^4 e^{-\pi l^2 z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{l^2+m^2} + \underbrace{\frac{\pi}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l l^4 e^{-\pi l^2 z} \cdot \frac{1}{l^2}}_{=\frac{1}{2}\Psi'(z)} \\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1} l^4 e^{-\pi l^2 z} \cdot \frac{1}{l} \frac{\pi}{sinh\, \pi l} \\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1} \frac{\pi l^3}{sinh\, \pi l} e^{-\pi l^2 z} \ . \end{aligned}$$

Nunmehr läßt sich zeigen das angekündigte (bizarr anmutende)

Lemma 6:
Ist für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\sigma(k) := \sum_{l=0}^{2k}(-1)^l \left(1-\frac{2}{4^l}\right)\left(1-\frac{2}{4^{2k-l}}\right) \zeta(2l)\zeta(4k-2l) \ ,$$

so gilt

$$\sigma(k) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1} \frac{\pi l}{sinh\, \pi l} \frac{1}{l^{4k}} \ .$$

Beweis:
Bezeichnet $\Psi(x)$ die in Lemma 5 definierte Thetareihe, so gilt zunächst (insbesondere) für ganze $l > 0$ bzw. $l \geq 0$

$$\left(1-\frac{2}{4^l}\right)\zeta(2l) = \frac{\pi^l}{\Gamma(l)} \int_0^{\infty} x^l \Psi(x) \frac{dx}{x} = \frac{\pi^l}{l!} \int_0^{\infty} x^l(-\Psi'(x))dx \ ,$$

was sich in völliger Analogie zur oben bereits verwendeten Gleichung

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}} \Theta(x) \frac{dx}{x} \quad (Re\, s > 1)$$

nachweisen läßt (vgl. etwa [Barner], Kap. III, Par. 15).

Damit folgt dann

$$\sigma(k) := \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l \left(1-\frac{2}{4^l}\right)\left(1-\frac{2}{4^{2k-l}}\right) \zeta(2l)\zeta(4k-2l)$$

$$= \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l \cdot \frac{\pi^l}{l!} \int_0^\infty x^l(-\Psi'(x))dx \cdot \frac{\pi^{2k-l}}{(2k-l)!} \int_0^\infty y^{2k-l}(-\Psi'(y))dy$$

$$= \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} \int_0^\infty \int_0^\infty \sum_{l=0}^{2k} \binom{2k}{l} (-x)^l y^{2k-l} \Psi'(x)\Psi'(y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} \int_0^\infty \int_0^\infty (x-y)^{2k} \Psi'(x)\Psi'(y)\, dx\, dy\,.$$

Die Substitution $x = z + t$, $y = t \Rightarrow \frac{dx\,dy}{dz\,dt} = 1$ liefert nun aufgrund der Symmetrie $(x-y)^{2k}\Psi'(x)\Psi'(y) = (y-x)^{2k}\Psi'(y)\Psi'(x)$:

$$\sigma(k) = 2\,\frac{\pi^{2k}}{(2k)!} \int_0^\infty z^{2k} \int_0^\infty \Psi'(z+t)\Psi'(t)\, dt\, dz = 2\,\frac{\pi^{2k}}{(2k)!} \int_0^\infty z^{2k} F(z)\, dz\,,$$

sofern F wie in Lemma 5 definiert ist. Schließlich folgt

$$\sigma(k) = 2\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}\int_0^\infty z^{2k} F(z) dz = 2\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}\int_0^\infty z^{2k} \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{\pi l^3}{\sinh \pi l} e^{-\pi l^2 z} dz$$

$$= \frac{\pi^{2k+1}}{(2k)!} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{\pi l^3}{\sinh \pi l} \int_0^\infty \left(\frac{z}{\pi l^2}\right)^{2k} e^{-z} \frac{dz}{\pi l^2} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{\pi l}{\sinh \pi l}\, \frac{1}{l^{4k}}\,,$$

wie behauptet.
Die letzte hier erforderliche Vertauschung sieht man (erneut) wie folgt ein:

$$\left| \int_0^\infty z^{2k} \sum_{l=L}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{\pi l^3}{\sinh \pi l} e^{-\pi l^2 z} dz \right| \le \int_0^\infty z^{2k} \sum_{l=L}^{\infty} \frac{\pi l^3}{\sinh \pi l} e^{-\pi l^2 z} dz$$

$$< \int_0^\infty z^{2k} \sum_{l=L}^{\infty} \frac{K}{\exp(3l)} e^{-\pi l\, z} dz = K \int_0^\infty z^{2k} \sum_{l=L}^{\infty} e^{-(3+\pi z)l} dz$$

$$= K \int_0^\infty z^{2k} \frac{(e^{-(3+\pi z)})^L}{1-e^{-(3+\pi z)}} dz < K \int_0^\infty z^{2k} \frac{e^{-(3+\pi z)L}}{1-e^{-3}} dz$$

$$< 2K\, e^{-3L} \int_0^\infty z^{2k} e^{-\pi L\, z} dz = \frac{2K\, e^{-3L}}{(\pi L)^{2k+1}} \cdot (2k)! \to 0\,,\ \text{wenn } L \to \infty\,.$$

Bemerkung:
Insbesondere liefert Lemma 6 die beiden interessanten (und keineswegs trivialen) Beziehungen

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{\pi l}{sinh\,\pi l} = \frac{1}{4}$$

nebst

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{l=0}^{2k}(-1)^l\left(1-\frac{2}{4^l}\right)\left(1-\frac{2}{4^{2k-l}}\right)\zeta(2l)\zeta(4k-2l) = \frac{\pi}{sinh\,\pi}\ .$$

Bemerkung:
Die zunächst lediglich für positive und ganzzahlige Argumentwerte k definierte Funktion $\sigma(k)$ läßt sich mittels Lemma 6 analytisch nach ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen; sehr bemerkenswert dabei ist, daß anscheinend, wie ein Blick auf den zugehörigen Funktionsgraphen vermuten läßt,

$$\sigma(k) = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}^-)$$

gilt. (Der Beweis folgt leicht aus dem noch folgenden Lemma 8; s.u.)

Bemerkung:
In enger Analogie zu Lemma 6 läßt sich auch folgende Aussage gewinnen:

$$\begin{aligned}\sigma^*(k) &:= \sum_{l=0}^{2k}(-1)^l(2l-1)(4k-2l-1)\zeta(2l)\zeta(4k-2l)\\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\Big(4k+2\pi l\,coth(\pi l)-3\Big)\frac{\pi^2 l^2}{sinh^2\pi l}\,\frac{1}{l^{4k}}\ .\end{aligned}$$

Anstelle von Ψ (s.o.) hat man hier lediglich die schon bekannte Funktion Φ zu verwenden; neben $\sigma^*(k)=0$ für $k\in\mathbb{Z}^-$ findet man hier entsprechend

$$\sum_{l=1}^{\infty}\Big(2\pi l\,coth(\pi l)-3\Big)\frac{\pi^2 l^2}{sinh^2(\pi l)} = \frac{1}{4}\ ,$$

nebst (für $k \to \infty$)

$$\sum_{l=0}^{2k}(-1)^l(2l-1)(4k-2l-1)\zeta(2l)\zeta(4k-2l) \approx (4k+2\pi\,coth(\pi)-3)\frac{\pi^2}{sinh^2\pi}\ .$$

Kombinieren der genannten Formeln für σ und σ^* liefert übrigens (z.B.)

$$\zeta(2) = \sqrt{24\pi\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}}{sinh(\pi l)\,l^3} - 7\pi^2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2\pi l\,coth(\pi l)+1}{sinh^2(\pi l)\,l^2}}\ .$$

Zahlreiche Analoga lassen sich mittels anderer Thetareihen gewinnen.

$$\Psi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{exp(\pi k^2 x)}$$

$$F(z) := \int_0^{\infty} \Psi'(z+t)\Psi'(t)\,dt$$
$$= \frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{exp(\pi l^2 z)} \frac{\pi l^3}{sinh\,\pi l}$$

$$\sigma(k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{sinh\,\pi l} \frac{\pi l}{l^{4k}}$$

$$\sigma^*(k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4k + 2\pi l\,coth(\pi l) - 3}{sinh^2 \pi l} \frac{\pi^2 l^2}{l^{4k}}$$

Lemma 7:
Für $m, n > 0$ und reelles t sei

$$J(m,n,t) := \int_0^\infty y \left(\frac{\cos my}{e^{ny}} + \frac{\cos ny}{e^{my}} \right) \cos y^2 t \, dy \ .$$

Dann ist für $t > 0$

$$J(m,n,t) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2t^3}} \left[(m{+}n) \cos\frac{m^2{-}n^2}{4t} + (m{-}n) \sin\frac{m^2{-}n^2}{4t} \right] e^{-\frac{mn}{2t}} \ .$$

Beweis:
Mittels $\cos y^2 t = \frac{1}{2}(e^{iy^2t} + e^{-iy^2t})$ läßt sich J zunächst als Summe zweier Integrale schreiben, in denen $y = (1{+}i)\tilde{y}$ bzw. $y = (1{-}i)\tilde{y}$ zu substituieren ist. Aufgrund der Holomorphie und des genügend starken Abklingverhaltens beider Integranden für $\tilde{y} \to \infty$ läßt sich der Integrationsweg wieder auf die reelle Achse drehen ('Cauchy-Integralsatz'). Es folgt

$$\begin{aligned}
J(m,n,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \, e^{(m-n)y} \sin(m{+}n)y \, e^{-2y^2 t} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2t}} \, e^{(m-n)\frac{y}{\sqrt{2t}}} \sin(m{+}n) \frac{y}{\sqrt{2t}} \, e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{2t}} \\
&= \frac{1}{2t} \int_{-\infty}^{\infty} y \sin(m{+}n) \frac{y}{\sqrt{2t}} \, e^{-(y-(m-n)\frac{1}{2\sqrt{2t}})^2} dy \cdot e^{\frac{(m-n)^2}{8t}} \\
&= \frac{e^{\frac{(m-n)^2}{8t}}}{2t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(y + \frac{m-n}{\sqrt{8t}} \right) \sin\left(\frac{m+n}{\sqrt{2t}} y + \frac{m^2-n^2}{4t} \right) e^{-y^2} dy \\
&= \frac{e^{\frac{(m-n)^2}{8t}}}{2t} \left[\cos\frac{m^2-n^2}{4t} \int_{-\infty}^{\infty} y \sin\left(\frac{m+n}{\sqrt{2t}} y \right) e^{-y^2} dy + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{m-n}{\sqrt{8t}} \sin\frac{m^2-n^2}{4t} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{m+n}{\sqrt{2t}} y \right) e^{-y^2} dy \right],
\end{aligned}$$

wegen $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ und aufgrund der Geradheit von $\cos(x)$, $x \sin(x)$ bzw. der Ungeradheit von $\sin(x)$, $x \cos(x)$.
Die noch auszuwertenden Integrale sind tabelliert ([Ryshik, Gradstein], 3.565, Gleichung 4; diese ist sowohl selbst, als auch nach 'p' differenziert zu verwenden).

Mittels Lemma 7 läßt sich nun gewinnen das interessante und zentrale

Lemma 8:
i) Ist für reelle t

$$\Sigma(t) := \frac{1}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{sinh\,\pi k}\, cos\,\pi k^2 t \ ,$$

so gilt für $t > 0$

$$\Sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2t^3}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l+1) cos\left(\pi\, \frac{k^2+k-l^2-l}{t}\right) + (k-l) sin\left(\pi\, \frac{k^2+k-l^2-l}{t}\right)}{exp\left(\pi\, \frac{(2k+1)(2l+1)}{2t}\right)} .$$

ii) Ferner gelten in $(0,1]$ die Abschätzungen

$$\Sigma(t) < \frac{1}{\sqrt{2t^3}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(k+l+1)^2 + (k-l)^2}}{exp\left(\pi\, \frac{(2k+1)(2l+1)}{2t}\right)} < \frac{e^{-\frac{\pi}{2t}}}{\sqrt{2t^3}} + \frac{19}{5} \frac{e^{-\frac{3\pi}{2t}}}{\sqrt{t^3}} \ ,$$

nebst

$$\Sigma(t) > \frac{e^{-\frac{\pi}{2t}}}{\sqrt{2t^3}} - \frac{1}{\sqrt{2t^3}} \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(k+l+1)^2 + (k-l)^2}}{exp\left(\pi\, \frac{(2k+1)(2l+1)}{2t}\right)} > \frac{e^{-\frac{\pi}{2t}}}{\sqrt{2t^3}} - \frac{19}{5} \frac{e^{-\frac{3\pi}{2t}}}{\sqrt{t^3}} .$$

iii) Für $t \in [0,1]$ sei

$$\tilde{\Sigma}_1(t) := \int_0^{min(t,1-t)} \Sigma(t+\tau)\Sigma(t-\tau)\, d\tau \ .$$

Dann gilt in $(0,1]$

$$max\left(0, \frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{4\, t^{\frac{3}{2}}} - 4\, \frac{e^{-\frac{7\pi}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}}\right) < \tilde{\Sigma}_1(t) < \frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{4\, t^{\frac{3}{2}}} + 4\, \frac{e^{-\frac{7\pi}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}} \ .$$

Beweis:
i) Als leichte Folgerung aus der geometrischen Summenformel gilt zunächst

$$\frac{y}{sinh\,\pi y} = 2y \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(2l+1)\pi y} \quad (y > 0) \ ;$$

zur eleganten Behandlung von Funktionen f mit hebbarer Definitionslücke sei ferner vereinbart

$$(f(x))^* := \lim_{\xi \to x} f(\xi) \ .$$

Mit Hilfe der Poissonschen Summenformel folgt damit einerseits

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{k}{sinh\,\pi k}\right)^{*}cos\,\pi k^2t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} cos\,\pi k\left(\frac{k}{sinh\,\pi k}\right)^{*} cos\,\pi k^2t$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} cos\,\pi y\frac{y}{sinh\,\pi y}cos\,\pi y^2t{\cdot}cos\,2\pi ky\,dy$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{sinh\,\pi y}\frac{cos(2k{+}1)\pi y + cos(2k{-}1)\pi y}{2}cos\,\pi y^2t\,dy$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{sinh\,\pi y}\,cos(2k{+}1)\pi y\,cos\,\pi y^2t\,dy$$

$$= 4\sum_{k=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}2y\sum_{l=0}^{\infty}e^{-(2l+1)\pi y}\,cos(2k{+}1)\pi y\,cos\,\pi y^2t\,dy$$

$$= 8\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}y\,\frac{cos(2k{+}1)\pi y}{exp(2l{+}1)\pi y}\,cos\,\pi y^2t\,dy\ ,$$

wobei die Vertauschung sich wie folgt rechtfertigen läßt:

$$\left|\int_{0}^{\infty}y\sum_{l=L}^{\infty}e^{-(2l+1)\pi y}\,cos(2k{+}1)\pi y\,cos\,\pi y^2t\,dy\right| \le \int_{0}^{\infty}y\sum_{l=L}^{\infty}e^{-(2l+1)\pi y}dy$$

$$= \int_{0}^{\infty}ye^{-\pi y}\sum_{l=L}^{\infty}\left(e^{-2\pi y}\right)^{l}dy = \int_{0}^{\infty}ye^{-\pi y}\frac{e^{-2\pi Ly}}{1-e^{-2\pi y}}dy < \frac{1}{6}\int_{0}^{\infty}e^{-2\pi Ly}dy\ ,$$

was mit $L \to \infty$ gegen Null geht, womit die Vertauschbarkeit folgt. Andererseits erhält man auf ähnliche – aber nicht gleiche – Weise

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{k}{sinh\,\pi k}\right)^{*}cos\,\pi k^2t = \frac{1}{\pi}{+}2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{sinh\,\pi k}\,cos\,\pi k^2t$$

$$= \frac{1}{\pi}{+}2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k{\cdot}2k\sum_{l=0}^{\infty}e^{-(2l+1)\pi k}cos\,\pi k^2t$$

$$= \frac{1}{\pi}{+}4\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k\,e^{-(2l+1)\pi k}cos\,\pi k^2t\ ,$$

denn die Doppelreihe konvergiert, wie man leicht sieht, absolut.

Anwenden der Poisson-Gleichung liefert nun

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{k}{sinh\,\pi k}\right)^{*}cos\,\pi k^2 t=\frac{1}{\pi}+2\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}cos\pi k\,|k|\,e^{-(2l+1)\pi|k|}cos\,\pi k^2 t$$

$$=\frac{1}{\pi}+2\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}cos\,\pi y\,|y|\,e^{-(2l+1)\pi|y|}cos\,\pi y^2 t\cdot cos\,2\pi ky\,dy$$

$$=\frac{1}{\pi}+2\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,e^{-(2l+1)\pi|y|}\frac{cos(2k+1)\pi y+cos(2k-1)\pi y}{2}\,cos\,\pi y^2 t\,dy$$

$$=\frac{1}{\pi}+8\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}y\,\frac{cos(2k+1)\pi y}{exp(2l+1)\pi y}\,cos\,\pi y^2 t\,dy\ .$$

Umbenennen der Indizes k, l hierin führt zusammengefaßt auf

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{k}{sinh\,\pi k}\right)^{*}cos\,\pi k^2 t=8\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}y\frac{cos(2k+1)\pi y}{exp(2l+1)\pi y}cos\,\pi y^2 t\,dy$$

$$=\frac{1}{\pi}+8\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}y\frac{cos(2l+1)\pi y}{exp(2k+1)\pi y}cos\,\pi y^2 t\,dy.$$

Addiert man nun die Hälften beider Gleichungen, so folgt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{k}{sinh\,\pi k}\right)^{*}cos\,\pi k^2 t=4\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}y\frac{cos(2k+1)\pi y}{exp(2l+1)\pi y}cos\,\pi y^2 t\,dy$$

$$+\frac{1}{2\pi}+4\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}y\frac{cos(2l+1)\pi y}{exp(2k+1)\pi y}cos\,\pi y^2 t\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}+4\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}y\left[\frac{cos(2k+1)\pi y}{exp(2l+1)\pi y}+\frac{cos(2l+1)\pi y}{exp(2k+1)\pi y}\right]cos\,\pi y^2 t\,dy\ .$$

Substituieren von $\tilde{y}=\pi y$ führt mittels Lemma 7 auf

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{k}{sinh\,\pi k}\right)^{*}cos\,\pi k^2 t$$

$$=\frac{1}{2\pi}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}y\left[\frac{cos(2k+1)y}{exp(2l+1)y}+\frac{cos(2l+1)y}{exp(2k+1)y}\right]cos\,\pi y^2\frac{t}{\pi}\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}J\left(2k+1,2l+1,\frac{t}{\pi}\right)\qquad\text{(vgl. Lemma 7).}$$

Die Definition von J liefert nun Übereinstimmung mit

$$\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi^4}{2t^3}}\left[2(k+l+1)cos\frac{(2k+1)^2-(2l+1)^2}{4t/\pi}+\right.$$

$$\left.+2(k-l)sin\frac{(2k+1)^2-(2l+1)^2}{4t/\pi}\right]exp\left(-\frac{(2k+1)(2l+1)}{2t/\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}+\frac{2}{\sqrt{2t^3}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(k+l+1)cos\,\pi\frac{k^2+k-l^2-l}{t}+(k-l)sin\,\pi\frac{k^2+k-l^2-l}{t}}{exp\left(\pi\frac{(2k+1)(2l+1)}{2t}\right)}\ .$$

Somit folgt – wegen $\lim\limits_{k\to 0}\frac{k}{sinh\,\pi k}=\frac{1}{\pi}$, nach Teilen durch 2 und Umstellen –

$$\Sigma(t):=\frac{1}{4\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{sinh\,\pi k}\,cos\,\pi k^2 t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2t^3}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(k+l+1)cos\,\pi\frac{k^2+k-l^2-l}{t}+(k-l)sin\,\pi\frac{k^2+k-l^2-l}{t}}{exp\left(\pi\frac{(2k+1)(2l+1)}{2t}\right)}\ ,$$

und das ist die Aussage von Lemma 8, (i).
ii) Mit

$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\,cos\left(x-arctan\frac{B}{A}\right)$$

$(A>0)$ und mit (i) folgt zunächst

$$\Sigma(t)=\frac{1}{\sqrt{2t^3}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{(k+l+1)^2+(k-l)^2}\frac{cos\left(\pi\,\frac{k^2+k-l^2-l}{t}-arctan\frac{k-l}{k+l+1}\right)}{exp\left(\pi\,\frac{(2k+1)(2l+1)}{2t}\right)},$$

und – wegen $|cos(x)|\leq 1$ $(x\in\mathbb{R})$ – also bereits die ersten beiden – die schärferen – der behaupteten Ungleichungen nach oben bzw. unten. Mittels der durch Ausmultiplizieren leicht einsehbaren Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(k+l+1)^2+(k-l)^2}<k+l+\sqrt{\frac{1}{2}}\quad(k,l\in\mathbb{N}_0)$$

und mittels – aufgrund absoluter Konvergenz zulässiger – Summation und Abschätzen längs der Diagonalen $k+l=const.=:m$ folgt ferner

$$\Sigma(t)<\frac{1}{\sqrt{t^3}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(m+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)(m+1)}{exp\left(\pi\,\frac{(2m+1)}{2t}\right)}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2t}}}{\sqrt{t^3}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(m^2+\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)m+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{\left(exp\left(\frac{\pi}{t}\right)\right)^m}\ .$$

Mittels Auswerten der auftretenden geometrischen Summen folgt nun

$$\Sigma(t) < \frac{e^{-\frac{\pi}{2t}}}{\sqrt{t^3}} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \left(2 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{\pi}{t}}}{\left(1-e^{-\frac{\pi}{t}}\right)^3} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2t}}}{\sqrt{2t^3}} \frac{1 + (\sqrt{8}-1)\, e^{-\frac{\pi}{t}}}{\left(1-e^{-\frac{\pi}{t}}\right)^3} ,$$

und hieraus schließlich die zweite – die schwächere – der unter (ii) behaupteten Ungleichungen nach oben mittels elementarer Kurvendiskussion; (hierbei ersetze man $x = e^{-\frac{\pi}{2t}}$ und führe die zu zeigende Ungleichung auf eine Abschätzung für eine gebrochen-rationale Funktion zurück.)

Die letzte noch zu zeigende Abschätzung nach unten ergibt sich nunmehr in fast trivialer Weise; denn jetzt ist ja gewonnen

$$\frac{1}{\sqrt{2t^3}} \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(k+l+1)^2 + (k-l)^2}}{exp\left(\pi\, \frac{(2k+1)(2l+1)}{2t}\right)} < \frac{19}{5} \frac{e^{-\frac{3\pi}{2t}}}{\sqrt{t^3}} .$$

Mit der bereits gezeigten ersten Abschätzung folgt sofort die Behauptung.

iii) Für $t \in [0,1]$ $(\Rightarrow min(t, 1-t) \leq t)$ ist Aussage (ii) zufolge

$$\tilde{\Sigma}_1(t) \leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t^2-\tau^2}^3} \left[\frac{1}{2} exp\left(-\frac{\pi\, t}{t^2-\tau^2}\right) + \frac{19}{5\sqrt{2}} exp\left(-\frac{\pi(2t+\tau)}{t^2-\tau^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{19}{5\sqrt{2}} exp\left(-\frac{\pi(2t-\tau)}{t^2-\tau^2}\right) + \frac{361}{25} exp\left(-\frac{3\pi\, t}{t^2-\tau^2}\right)\right] d\tau .$$

Die Substitution

$$\vartheta = \frac{\tau^2}{t^2-\tau^2} \Rightarrow \tau = t\sqrt{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}} \Rightarrow \frac{1}{t^2-\tau^2} = \frac{1+\vartheta}{t^2} , \; d\tau = \frac{t}{2} \frac{d\vartheta}{(1+\vartheta)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\vartheta}}$$

liefert nun

$$\tilde{\Sigma}_1(t) < \frac{1}{4t^2} \int_0^{\infty} \frac{exp\left(-\frac{\pi}{t}(1+\vartheta)\right)}{\sqrt{\vartheta}} d\vartheta + \frac{19}{10\sqrt{2}t^2} \int_0^{\infty} \frac{exp\left(-\frac{\pi}{t}\left(2+\sqrt{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}\right)(1+\vartheta)\right)}{\sqrt{\vartheta}} d\vartheta$$
$$+ \frac{19}{10\sqrt{2}t^2} \int_0^{\infty} \frac{exp\left(-\frac{\pi}{t}\left(2-\sqrt{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}}\right)(1+\vartheta)\right)}{\sqrt{\vartheta}} d\vartheta + \frac{361}{50t^2} \int_0^{\infty} \frac{exp\left(-\frac{3\pi}{t}(1+\vartheta)\right)}{\sqrt{\vartheta}} d\vartheta$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{4t^2} \int_0^{\infty} \frac{exp\left(-\frac{\pi}{t}\vartheta\right)}{\sqrt{\vartheta}} d\vartheta + \frac{19\, e^{-\frac{2\pi}{t}}}{10\sqrt{2}t^2} \int_0^{\infty} \frac{exp\left(-\frac{\pi}{t}\left(2\vartheta + \sqrt{\vartheta}\sqrt{1+\vartheta}\right)\right)}{\sqrt{\vartheta}} d\vartheta$$
$$+ \frac{19\, e^{-\frac{2\pi}{t}}}{10\sqrt{2}t^2} \int_0^{\infty} \frac{exp\left(-\frac{\pi}{t}\left(2\vartheta - \sqrt{\vartheta}\sqrt{1+\vartheta}\right)\right)}{\sqrt{\vartheta}} d\vartheta + \frac{361\, e^{-\frac{3\pi}{t}}}{50t^2} \int_0^{\infty} \frac{exp\left(-\frac{3\pi}{t}\vartheta\right)}{\sqrt{\vartheta}} d\vartheta .$$

Nun ist

$$I_t := \int\limits_0^\infty \frac{exp\Big(-\frac{\pi}{t}\Big(2\vartheta - \sqrt{\vartheta}\sqrt{1+\vartheta}\Big)\Big)}{\sqrt{\vartheta}}\, d\vartheta = 2\int\limits_0^\infty exp\Big(-\frac{\pi}{t}\Big(2\vartheta^2 - \vartheta\sqrt{1+\vartheta^2}\Big)\Big)\, d\vartheta\,,$$

wobei über ganz $I\!R^+ : 2\vartheta^2 - \vartheta\sqrt{1+\vartheta^2} > \vartheta^2 - \vartheta$ gilt; somit folgt

$$I_t < 2\int_0^\infty exp\left(-\frac{\pi}{t}(\vartheta^2 - \vartheta)\right) d\vartheta = e^{\frac{\pi}{4t}}\sqrt{t}\left(1 + erf\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}\right)\right) < 2\, e^{\frac{\pi}{4t}}\sqrt{t}\;,$$

wenn $erf : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die durch $erf(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2} dt$ erklärte Gaußsche Fehlerfunktion bezeichnet. Damit ist schließlich

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_1(t) &< \frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{4t^2}\sqrt{t} + \frac{19\, e^{-\frac{2\pi}{t}}}{10\sqrt{2}t^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\pi}{t}3\vartheta}}{\sqrt{\vartheta}}\, d\vartheta + \frac{19\, e^{-\frac{2\pi}{t}}}{5\sqrt{2}t^2} e^{\frac{\pi}{4t}}\sqrt{t} + \frac{361\, e^{-\frac{3\pi}{t}}}{50t^2}\sqrt{\frac{1}{3}t} \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{4t^{\frac{3}{2}}} + \frac{19\, e^{-\frac{2\pi}{t}}}{10\sqrt{6}t^{\frac{3}{2}}} + \frac{19\, e^{-\frac{7\pi}{4t}}}{5\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}} + \frac{361\, e^{-\frac{3\pi}{t}}}{50\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}} < \frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{4t^{\frac{3}{2}}} + 4\, e^{-\frac{7\pi}{4t}}\;,\end{aligned}$$

wie eine weitere elementare Kurvendiskussion zeigt.
Nun zum Nachweis der behaupteten Abschätzungen nach unten:
Als Folge aus der Definition von $\tilde{\Sigma}_1$ sind hier die Fälle $t \in (0, \frac{1}{2}]$ und $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ zu unterscheiden: Wie oben ergibt sich mittels (ii) für $t \in (0, \frac{1}{2}]$

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_1(t) > \frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{4t^2}\int_0^\infty \frac{exp\big(-\frac{\pi}{t}\vartheta\big)}{\sqrt{\vartheta}}\, d\vartheta - \frac{19\, e^{-\frac{2\pi}{t}}}{10\sqrt{2}t^2}\int_0^\infty \frac{exp\Big(-\frac{\pi}{t}\Big(2\vartheta + \sqrt{\vartheta(1+\vartheta)}\Big)\Big)}{\sqrt{\vartheta}}\, d\vartheta \\ - \frac{19\, e^{-\frac{2\pi}{t}}}{10\sqrt{2}t^2}\int_0^\infty \frac{exp\Big(-\frac{\pi}{t}\Big(2\vartheta - \sqrt{\vartheta(1+\vartheta)}\Big)\Big)}{\sqrt{\vartheta}}\, d\vartheta \;+\; 0\;.\end{aligned}$$

Der Rest, was das Intervall $(0, \frac{1}{2}]$ angeht – insbesondere auch $\tilde{\Sigma}_1(t) > 0$, folgt mittels einer weiteren Kurvendiskussion im wesentlichen wie oben.
Nun zu $t \in (\frac{1}{2}, 1]$; für $\tau \in [0, 0.3]$ gilt zunächst (Gewinnung der auftretenden Polynome mittels Minimierung der (Gauss'schen) Fehlerquadrate)

$$\frac{e^{-\frac{\pi}{2\tau}}}{\sqrt{2\tau^3}} > \frac{505\tau^4 - 67\tau^3}{100} \quad \text{nebst} \quad \frac{19}{5}\frac{e^{-\frac{3\pi}{2\tau}}}{\sqrt{\tau^3}} < \frac{\tau^6}{200}$$

und für $\tau \in [0.3, 1]$ entsprechend

$$\frac{e^{-\frac{\pi}{2\tau}}}{\sqrt{2\tau^3}} > \frac{-256\tau^2 + 512\tau - 110}{1000} \quad \text{nebst} \quad \frac{19}{5}\frac{e^{-\frac{3\pi}{2\tau}}}{\sqrt{\tau^3}} < \frac{101\tau^2 - 84\tau + 18}{1000}\;,$$

wie vier elementare Kurvendiskussionen zeigen. (Der Einfachheit halber weise man die mit $\tau^{\frac{3}{2}} =: \vartheta^3$ erweiterten Ungleichungen nach.)

Mit Hilfe der über $[0.3, 1]$ gültigen Abschätzung folgt nun

$$\tilde{\Sigma}_1(t) := \int_0^{1-t} \Sigma(t+\tau)\Sigma(t-\tau)d\tau > \int_0^{1-t} \frac{-357(t+\tau)^2+596(t+\tau)-128}{1000}\Sigma(t-\tau)d\tau \ ,$$

denn für $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ und $\tau \in [0, 1-t]$ ist stets $t+\tau \in (\frac{1}{2}, 1] \subset [0.3, 1]$. Hinzunahme der weiteren, über $[0, 0.3]$ gültigen liefert ferner

$$\tilde{\Sigma}_1(t) > \int_0^{t-0.3} \frac{-357(t+\tau)^2+596(t+\tau)-128}{1000} \cdot \frac{-357(t-\tau)^2+596(t-\tau)-128}{1000} d\tau$$

$$+ \int_{t-0.3}^{1-t} \frac{-357(t+\tau)^2+596(t+\tau)-128}{1000} \cdot \frac{-(t-\tau)^6/2+505(t-\tau)^4-67(t-\tau)^3}{100} d\tau,$$

für $t \in (\frac{1}{2}, 0.65]$, bzw. für $t \in (0.65, 1]$:

$$\tilde{\Sigma}_1(t) > \int_0^{1-t} \frac{-357(t+\tau)^2+596(t+\tau)-128}{1000} \cdot \frac{-357(t-\tau)^2+596(t-\tau)-128}{1000} d\tau.$$

Damit ist $\tilde{\Sigma}_1$ in den beiden betrachteten Teilintervallen durch Polynome abgeschätzt; daß diese – über den entsprechenden Intervallen – ihrerseits oberhalb sowohl von $e^{-\frac{\pi}{t}}/4t^{\frac{3}{2}} - 4e^{-\frac{7\pi}{4t}}/t^{\frac{3}{2}}$, als auch oberhalb von Null verlaufen, sieht man mittels zweier weiterer, wiederum elementarer Kurvendiskussionen ein.

Bemerkung:

Das nachfolgende Lemma 10, (viii) läßt sich verfeinern mit Hilfe des folgenden Zusatzes zu Lemma 8:

iv) Ist $\sigma_0 := \Sigma(1) := \frac{1}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{sinh\,\pi k} \approx 0,174$, und ferner für $t \in [0, 1]$

$$\tilde{\Sigma}_2(t) := \int_0^t \Sigma(\tau)\Sigma(1-t+\tau)d\tau \ ,$$

so gilt ebenda

$$max\left(0, \frac{\sigma_0}{\pi}\sqrt{2t}\left(1-\frac{t}{\pi}-14\,t^2\right)e^{-\frac{\pi}{2t}}\right) < \tilde{\Sigma}_2(t) < \frac{\sigma_0}{\pi}\sqrt{2t}\left(1-\frac{t}{\pi}+\frac{2}{5}\,t^2\right)e^{-\frac{\pi}{2t}} \ .$$

Der Beweis erfordert im wesentlichen lediglich die (mittels des Satzes von Taylor folgende) Abschätzung $\sigma_0 - \sigma_2 \cdot (t-1)^2 \leq \Sigma(t) \leq \sigma_0$, wenn σ_2 die Zahl $\sigma_2 := -\Sigma''(1)/2 \approx 1.251$ bezeichnet.

$$\Sigma(t) := \frac{1}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{sinh\,\pi k} cos\,\pi k^2 t$$

$$\frac{1}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\mathbf{2}} \frac{(-1)^k \cdot k}{sinh\,\pi k}\, cos\,\pi k^2 t$$

$$\sum_{k=0}^{\mathbf{1}} \sum_{l=0}^{\mathbf{1}} \frac{(k+l+1) cos\left(\pi \frac{k^2+k-l^2-l}{t}\right) + (k-l) sin\left(\pi \frac{k^2+k-l^2-l}{t}\right)}{\sqrt{2t^3}\, exp\left(\pi \frac{(2k+1)(2l+1)}{2t}\right)}$$

Bemerkung:
Lemma 8, (i) überführt die ohnehin gut (nämlich exponentiell schnell) konvergente Fourierreihe $\Sigma(t)$ in eine ebenso gut konvergente (Doppel-) Reihe über Summanden mit zudem nun durchweg wesentlichen Singularitäten bei $t = 0$, welche sich für kleine, positive t sämtlich in etwa wie $e^{-\frac{C}{t}}$, $(C > 0)$ verhalten. Diese andere Darstellung der Fourierreihe enthüllt somit eine interessante Eigenschaft von Σ, sich nämlich bei $t = 0$ "sehr stark" der t-Achse anzuschmiegen. Dieses Verhalten geht aus der Darstellung von Σ als Fourierreihe nicht einmal andeutungsweise hervor.

Bemerkung:
Σ ist – wie man leicht sieht – über ganz $I\!R$ unendlich oft stetig differenzierbar, aber an keiner Stelle holomorph; ein einfacheres Beispiel dieser Art ist

$$f(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{cos\, mx}{cosh\sqrt{m}} \quad (x \in I\!R) .$$

Bemerkung:
Aus dem beim Beweis von Teil (i) aufgetretenen Zwischenergebnis

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^{\infty} y\frac{cos(2k+1)\pi y}{exp(2l+1)\pi y}cos\pi y^2 t\, dy = \frac{1}{8\pi} + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} y\frac{cos(2k+1)\pi y}{exp(2l+1)\pi y}cos\pi y^2 t\, dy$$

geht in amüsanter Weise indirekt hervor, daß die beiden auftretenden Doppelreihen nicht absolut konvergent sein können, da sie zwar mittels Vertauschen der Summationsreihenfolge formal auseinander entstehen, sich indessen aber um die (konstante) Differenz $\frac{1}{8\pi}$ unterscheiden.

Bemerkung:
Eine andere Darstellung von Σ – gültig aber nur über $[-2, 2]$ – lautet

$$\Sigma(t) = \int_0^{\infty} x \,\frac{sin\, \pi x^2}{sinh\, \pi x \; sin\, \pi x}\, cos\, \pi(1-t)x^2\, dx \; ;$$

beachtet man, daß das hier auftretende Integral – im wesentlichen – die Fouriertransformierte der Funktion

$$\int_0^{2} \Sigma(\tau)\, cos\, t\tau\, d\tau \quad (t \in I\!R)$$

ist, und beachtet man ferner Lemma 8, (i), so sieht man, daß das genannte Integral ein Beispiel einer interessanten, weil keineswegs trivialen C_0^{∞}-Funktion darstellt; der Träger ist $[-2, 2]$.

Bemerkung:

Weitere Darstellungen (anderer Art) von $\tilde{\Sigma}_1$ und $\tilde{\Sigma}_2$ lassen sich ebenfalls angeben; diese sind aber sehr schwerfällig und daher kaum von Nutzen. $\tilde{\Sigma}_2$ etwa lautet umgeformt

$$\tilde{\Sigma}_2(t)=\frac{t}{16\pi^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^k k^2\frac{\cos\pi k^2 t}{\sinh^2\pi k}\,t+\frac{(-1)^k}{\pi}\,\frac{\sin\pi k^2 t}{\sinh^2\pi k}+\frac{1}{2\pi^2}\,\frac{\sin 4\pi k^2 t}{k\sinh 2\pi k}\right)$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot k}{\sinh\pi k}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+k}{\sinh\pi(2l+k)}\,\frac{(2l+k)^2\sin\pi(2l+k)^2 t-k^2\sin\pi k^2 t}{(2l+k)^4-k^4}\ .$$

Bemerkung:

Mittels Lemma 8, (i) gewinnt man nun leicht die im Anschluß an den Nachweis von Lemma 6 nur vermutete Aussage $\sigma(k)=0$ (für $k\in\mathbb{Z}$). Denn leitet man die Gleichung aus Lemma 8, (i) wiederholt (gliedweise) nach t ab und setzt dann $t=0$ ein, so folgt die genannte Vermutung in beinahe trivialer Weise.

Analog läßt sich auch die weitere Vermutung $\sigma^*(k)=0$ ($k\in\mathbb{Z}$) nachweisen; hierzu hat man allerdings zunächst eine zu Lemma 8 analoge Aussage für die Reihe

$$\Sigma^*(t):=-\frac{1}{4\pi^2}+\sum_{l=1}^{\infty}\Big[2\pi l^2 t\,\sin(\pi l^2 t)+(2\pi l\coth\pi l-3)\cos(\pi l^2 t)\Big]\frac{l^2}{\sinh^2\pi l}$$

zu zeigen. Darauf soll, da irrelevant, aber verzichtet werden.

Bemerkung:

Lemma 8, (ii) in Verbindung mit der 2-Periodizität von Σ liefert ohne Mühe auch die zum Nachweis von Lemma 10, (iv) erforderliche Gleichung $\Sigma(0)=0$, (bzw. allgemeiner $\Sigma(t)=0\Leftrightarrow t\in 2\mathbb{Z}$), und ferner auch die zur unter (iii) gezeigten Ungleichung $\tilde{\Sigma}_1(t)\geq 0$ analoge Aussage $\Sigma(t)\geq 0$ für $t\in\mathbb{R}$.

Die Aussage $\Sigma(0)=0$ allerdings war oben bereits gewonnen worden; ist sie doch gleichwertig mit der im direkten Anschluß an den Beweis von Lemma 6 bemerkten Gleichung

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{\pi l}{\sinh\pi l}=\frac{1}{4}\ .$$

Der Beweis von Aussage (ix) des schon mehrfach angesprochenen Lemmas 10 erfordert nun noch den weiteren Hilfssatz

Lemma 9:
i) Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \exists\, n \in \mathbb{N}^+ : |z-n| \leq \frac{1}{2}\}$. Es sei ferner $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in D holomorph und es existiere neben der Summe $\sum_{m=1}^{\infty} f(m)$ auch $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)dx$. Konvergiert zudem noch die Doppelreihe $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} f^{(2l)}(m)/(2l+1)!/4^l$ absolut, so gilt die Summationsformel

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(m) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)dx - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)! \cdot 4^l} \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2l)}(m) \, .$$

ii) Ist $\gamma := \gamma_{Euler} \approx 0.577...$ die Eulersche Konstante, so gilt für $z, k > -1$

$$z\Gamma(z) \geq k\Gamma(k) \cdot exp\left[\left(k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+k)} - \gamma\right)(z-k)\right] ,$$

wobei Gleichheit nur für $z = k$ eintritt.
iii) Für $k > -\frac{1}{2}$ ist

$$k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+k)} = log\left(k + \frac{1}{2}\right) + \gamma + r(k) \ ,$$

wobei für

$$r(k) := \sum_{m=1}^{\infty} \left[log\frac{m+\frac{1}{2}+k}{m-\frac{1}{2}+k} - \frac{1}{m+k} \right]$$

die folgende Abschätzung gilt:

$$0 < r(k) < \frac{1}{24\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} \, .$$

iv) Für $k > -\frac{1}{2}$ sei

$$h(k) := \left(k + \frac{1}{2}\right) e^{r(k)} - k \ .$$

Dann ist für $z > -1$ und $k > -\frac{1}{2}$

$$z\Gamma(z) \geq k\Gamma(k) \cdot (k + h(k))^{z-k} \ ,$$

wobei Gleichheit nur für $z = k$ eintritt.
Für $k \geq 1$ gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{2} < h(k) < \frac{1}{2} + \frac{1}{24\,k} \leq \frac{13}{24} \, .$$

Beweis:
i) Für $m \in I\!N^+$ und $|x| \le \frac{1}{2}$ gilt zunächst

$$f(m+x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l)}(m)}{l!}\, x^l\,, \quad \text{d.h.} \quad f(m) = f(m+x) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f^{(l)}(m)}{l!}\, x^l\,.$$

Integration über $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ und anschließende Summation über $m \in I\!N^+$ liefert sofort die Behauptung:

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(m) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(m+x)dx - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f^{(l)}(m)}{l!} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^l dx \right]$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)dx - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)! \cdot 4^l} \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2l)}(m)\,.$$

ii) Zunächst ist bekanntlich (vgl. etwa [Ryshik, Gradstein], 6.352)

$$(log(z\Gamma(z)))' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z}{m(m+z)} - \gamma \;\Rightarrow\; (log(z\Gamma(z)))'' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+z)^2}\,.$$

(Die gliedweise Differentiation folgt sofort mittels der über jedem Intervall $[a,b]$ $(a > -1)$ vorliegenden gleichmäßigen Konvergenz der abgeleiteten Reihe; man vgl. etwa [Fichtenholz], Kap. XII, Nr. 436, Satz 8*.)
Hieraus geht $(log(z\Gamma(z)))'' > 0$ für $z > -1$ hervor, d.h. $log(z\Gamma(z))$ ist dort überall linksgekrümmt. Damit ist die Tangentialstelle $z = k$ der Tangente an $log(z\Gamma(z))$ in $z = k$ zugleich *einzige* Lösung der Gleichung $\left(k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+k)} - \gamma\right)(z-k) + log(k\Gamma(k)) = log(z\Gamma(z))$ für $z > -1$;
für alle übrigen $z > -1$ gilt "$<$" anstelle von "$=$".
iii) Für $k > -\frac{1}{2}$ zeigt eine triviale Nulladdition

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k}{m(m+k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m+k} \right]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+k} dt - log\frac{m+\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}} + log\frac{m+\frac{1}{2}+k}{m-\frac{1}{2}+k} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+k} \right]$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{k}{t(t+k)} dt - \sum_{m=1}^{\infty} \left[log\frac{m+\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}} - \frac{1}{m} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[log\frac{m+\frac{1}{2}+k}{m-\frac{1}{2}+k} - \frac{1}{m+k} \right].$$

Die zuletzt vorgenommene Umformung läßt sich legitimieren mittels Nachweis der (absoluten) Konvergenz der entstandenen Reihen: Die absolute Konvergenz von $\sum_{m=1}^{\infty}\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}...dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty}...dt$ ist klar; dieselbe folgt für die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}[log((m+\frac{1}{2})/(m-\frac{1}{2}))-1/m]$ sofort aufgrund der Entwicklung $log((m+\frac{1}{2})/(m-\frac{1}{2})) = log(1+1/(m-\frac{1}{2})) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}/[l\,(m-\frac{1}{2})^l]$; die absolute Konvergenz der dritten Reihe schließlich ergibt sich (trivialerweise) aus jener der gerade betrachteten Reihe, da sie sich von dieser nur um endlich viele – nämlich k – Summanden unterscheidet.
Für die ersten beiden Summanden in letztgenannter Gleichung gilt nun

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{k}{t(t+k)}dt = \left[log\frac{t}{t+k}\right]_{\frac{1}{2}}^{\infty} = -log\frac{\frac{1}{2}}{k+\frac{1}{2}} = log\,2 + log\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\,;$$

ferner ist (explizit)

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\left[log\frac{m+\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}}-\frac{1}{m}\right] &= \lim_{\mathcal{M}\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{\mathcal{M}}\left[log\Big(m+\frac{1}{2}\Big)-log\Big(m-\frac{1}{2}\Big)\right]-\sum_{m=1}^{\mathcal{M}}\frac{1}{m}\right]\\ &= \lim_{\mathcal{M}\to\infty}\left[log\Big(\mathcal{M}+\frac{1}{2}\Big)-log\frac{1}{2}-\sum_{m=1}^{\mathcal{M}}\frac{1}{m}\right]\\ &= log\,2-\lim_{\mathcal{M}\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{\mathcal{M}}\frac{1}{m}-log\,\mathcal{M}\right] = log\,2-\gamma\,.\end{aligned}$$

Anwenden der unter (i) genannten Summationsformel auf die Funktion $\lambda_m(k) := log[(m+\frac{1}{2}+k)/(m-\frac{1}{2}+k)]-1/(m+k)$ liefert nun schließlich mittels Auswerten von $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\lambda_\mu(k)d\mu$ und mittels Verwenden von

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^{2l}\lambda_\mu(k)\Bigg|_{\mu=m} = \frac{(2l-1)!\cdot 4^l}{(2k+1)^{2l}}-(2l)!\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+k)^{2l+1}}$$

für den dritten Summanden zunächst die rasch konvergente Entwicklung

$$r(k) = 0\,+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)\cdot 4^l}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+k)^{2l+1}}\,.$$

Abtrennen des den Hauptbeitrag ausmachenden ersten Summandens und Abschätzen der übrigen Reihen über m durch Integrale führt sofort auf

$$r(k) < \frac{1}{12}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+k)^3}+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)\cdot 4^l}\left[\frac{1}{(k+1)^{2l+1}}+\frac{1}{2l\cdot(k+1)^{2l}}\right].$$

Hierin ist nun – wiederum aufgrund von (i) –

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+k)^3} = \frac{2}{(2k+1)^2} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l+1}{4^l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+k)^{2l+3}}$$
$$< \frac{2}{(2k+1)^2} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l+1}{4^l} \left[\frac{1}{(k+1)^{2l+3}} + \frac{1}{(2l+2)(k+2)^{2l+2}} \right]$$
$$= -\frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2k+5} + \frac{2}{(2k+3)^2} + \frac{1}{2(k+2)^2} + \frac{1}{(k+1)^3}\,,$$

und ferner

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)\cdot 4^l} \left[\frac{1}{(k+1)^{2l+1}} + \frac{1}{2l\cdot(k+1)^{2l}} \right]$$
$$= 1 - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{24(k+1)^2} - \frac{1}{12(k+1)^3} - k\, log \frac{2k+3}{2k+1} + \frac{1}{2}\, log \frac{(2k+2)^2}{(2k+1)(2k+3)}\,.$$

Es folgt

$$r(k) < 1 - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{12(2k+3)} + \frac{1}{12(2k+5)} - \frac{1}{24(k+1)^2} + \frac{1}{6(2k+3)^2}$$
$$+ \frac{1}{24(k+2)^2} - k\, log \frac{2k+3}{2k+1} + \frac{1}{2}\, log \frac{(2k+2)^2}{(2k+1)(2k+3)} =: R(k).$$

Eine elementare Kurvendiskussion zeigt nun schließlich das Bestehen der Ungleichung $R(k) < 1/[24(k+\frac{1}{2})^2]$, womit die Behauptung gewonnen ist. (Zum Nachweis der genannten Ungleichung betrachte man die gebrochen-rationale Funktion $\delta(k) := (1/[24(k+\frac{1}{2})^2] - R(k))''$, die von der Form $\delta(k) = \Delta(k)/(2k+5)^3/(k+1)^4/(k+2)^4/(2k+1)^4/(2k+3)^4$ ist, worin Δ ein Polynom *mit durchweg positiven Koeffizienten* bezeichnet.)

iv) Mit $k + h(k) = \left(k+\frac{1}{2}\right) e^{r(k)}$ ist (iii) zufolge

$$k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+k)} - \gamma = log\left(k+\frac{1}{2}\right) + r(k) = log(k+h(k))\,,$$

womit sofort die behauptete Abschätzung für $z\Gamma(z)$ gewonnen ist.

Für $h(k)$ folgt schließlich mittels (iii)

$$\frac{1}{2} = \left(k+\frac{1}{2}\right) exp\,(0) - k < h(k) < \left(k+\frac{1}{2}\right) exp\left(\frac{1}{24\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\right) - k\,,$$

bzw. (nach weiterer Abschätzung nach oben; etwa mittels Taylorentwicklung von e^x um $x=0$) die behaupteten Ungleichungen für $h(k)$ und $k \geq 1$.

Bemerkung:
Lemma 9, welches in der Literatur über die Gammafunktion wahrscheinlich bereits vorhanden ist, sich vom Autor aber nicht auffinden ließ, läßt sich ergänzen durch eine Abschätzung nach oben:
v) Für $z \geq 0$ und für $k \geq 3.65$ gilt

$$z\Gamma(z) \leq k\Gamma(k) \cdot (k + h(k))^{z-k} \cdot e^{\frac{(z-k)^2}{k}} \ ,$$

wobei Gleichheit nur für $z = k$ eintritt.
Zum Beweis, der nur skizziert werden soll, betrachte man für reelles $k > 0$

$$P_k(z) := \frac{(z-k)^2}{k} + \left(k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+k)} - \gamma\right)(z-k) + log(k\Gamma(k))$$

und die Ableitungen P'_k nebst $P''_k(z) = 2/k$. Für $D_k(z) := P_k(z) - log(z\Gamma(z))$ folgt dann: D''_k ist in $z > 0$ streng monoton steigend und besitzt ferner für $k > 12/\pi^2$ in $z > 0$ genau eine Nullstelle. Es folgt (genauer): D'_k besitzt genau einen Tiefpunkt, da D''_k an der besagten (einzigen) Nullstelle einen Nulldurchgang mit Vorzeichenwechsel von Minus nach Plus aufweist.
Da nun

$$\begin{aligned} D'_k(z) &= \frac{2}{k}(z-k) + \left(k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+k)} - \gamma\right) - \left(z \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+z)} - \gamma\right) \\ &= \frac{2}{k}(z-k) - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m+k} - \frac{1}{m+z}\right] = \left[\frac{2}{k} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+k)(m+z)}\right](z-k) \end{aligned}$$

ist und ferner

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+k)^2} < \frac{1}{(1+k)^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{(t+k)^2} dt < \frac{2}{k} \Rightarrow \frac{2}{k} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+k)^2} > 0$$

ist, folgt: $D'_k(z)$ hat in $z = k$ eine einfache Nullstelle (mit – was hier irrelevant ist – Nulldurchgang von Minus nach Plus).
Damit ist klar: D'_k nimmt negative Werte an, sodaß der genannte (einzige!) Tiefpunkt von D'_k unterhalb der z-Achse liegen muß. Nun ist

$$D'_k(0) = \left[\frac{2}{k} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+k)}\right] \cdot (-k) = -2 + k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+k)} \ ,$$

wobei aus (iii) die Abschätzung $k \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+k)} > log(k+\frac{1}{2}) + \gamma$ bekannt ist.

Also ist klar: Für $-2+log(k+\frac{1}{2})+\gamma>0 \Leftrightarrow k>e^{2-\gamma}-\frac{1}{2}\approx 3.6486$ ist $D_k'(0)>0$. Für solche k besitzt D_k' also genau zwei Nullstellen und genau einen Tiefpunkt, der sich zwischen diesen beiden Nullstellen befindet.
Da nun noch
$$D_k'''(z)=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+z)^3}>0$$
in ganz $z>0$ ist, folgt, daß D_k' dort linksgekrümmt ist; die (im Falle $k>3.65$: beiden) Nullstellen von D_k' sind also einfach.
D_k selbst besitzt im Falle $k>3.65$ mithin genau einen Hoch- und genau einen Tiefpunkt und sonst keine weiteren stationären Stellen;
der Tiefpunkt, der sich rechts vom Hochpunkt befindet, liegt bei $z=k$.
Nun ist, wie eine kurze Rechnung zeigt,
$$\begin{aligned}D_k(0)&=k-k\left(k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+k)}-\gamma\right)+log(k\Gamma(k))\\&=k(\gamma+1)-k\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m}-log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]-\sum_{m=1}^{\infty}\left[log\left(1+\frac{k}{m}\right)-\frac{k}{m+k}\right].\end{aligned}$$
Hierin läßt sich die erste Reihe geschlossen auswerten; die zweite läßt sich mit Hilfe eines kleinen Tricks (ausreichend) gut abschätzen; es folgt
$$D_k(0)=k-\sum_{m=1}^{\infty}\left[\int_0^1\frac{k}{m+t\,k}dt-\frac{k}{m+k}\right]=k-k\int_0^1\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m+t\,k}-\frac{1}{m+k}\right]dt.$$
Hierin ist
$$\begin{aligned}d_k(t):=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m+t\,k}-\frac{1}{m+k}\right]&=(1-t)k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+t\,k)(m+k)}\\&<(1-t)k\left[\frac{1}{(1+t\,k)(1+k)}+\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+t\,k)(x+k)}dx\right]\\&=(1-t)k\left[\frac{1}{(1+t\,k)(1+k)}+\frac{log(1+t\,k)-log(1+k)}{k(t-1)}\right].\end{aligned}$$
Damit ist, wie man mittels Integration sofort sieht,
$$\int_0^1 d_k(t)dt<k\int_0^1(1-t)\left[\frac{1}{(1+t\,k)(1+k)}+\frac{log(1+t\,k)-log(1+k)}{k(t-1)}\right]dt=\frac{k}{1+k}.$$
Damit folgt $D_k(0)>\frac{k}{1+k}$, d.h. $D_k(0)>0$ für alle $k>0$ und insbesondere für alle $k>3.65$. Da (schließlich) $\lim_{z\to\infty}D_k(z)=\infty$, was eine einfache Abschätzung zeigt, so folgt die Behauptung.

Bemerkung:
Zum Beweis von Teilaussage (iv) des nun nachfolgenden, bereits wiederholt angekündigten Lemmas 10 erforderlich ist die erste der beiden folgenden, für $t \neq 0$ gültigen analogen Beziehungen

$$\frac{1}{t^{2m+2}}\left(sin\, t - \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}\right) = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \int_0^1 (1-x)^{2m+1} sin\, xt\, dx \ ,$$

$$\frac{1}{t^{2m+1}}\left(cos\, t - \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}\right) = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!} \int_0^1 (1-x)^{2m} sin\, xt\, dx \ ,$$

die mittels Taylorscher Formel (mit Restglied in integraler Form) folgen.

Nunmehr zu

Lemma 10:
i) Die durch

$$q(w) := \frac{sinh\, w}{cosh\sqrt{2\pi w} - cos\sqrt{2\pi w}}$$

für zunächst nur $cosh\sqrt{2\pi w} \neq cos\sqrt{2\pi w}$ definierte (gerade) Funktion q ist – nach stetiger Ergänzung in den Definitionslücken – ganz.
ii) Die Koeffizienten α_{2m} der (i) zufolge in ganz $\mathbb{C}$ gültigen Taylorentwicklung

$$q(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m} w^{2m}$$

lauten

$$\alpha_{2m} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{m} \left[\frac{(-1)^k}{(2m-2k+1)!\, \pi^{2k}} \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l \left(1 - \frac{2}{4^l}\right)\left(1 - \frac{2}{4^{2k-l}}\right) \zeta(2l)\zeta(4k-2l) \right].$$

iii) Eine andere Darstellung der α_{2m} ist

$$\alpha_{2m} = 2\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{l}{sinh\, \pi l} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2m-2k+1)!} \frac{1}{(\pi l^2)^{2k}} \ .$$

iv) Eine weitere lautet

$$\alpha_{2m} = \frac{2}{(2m)!} \int_0^1 t^{2m} \left(\frac{1}{4\pi} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{sinh\, \pi l} \, cos\, \pi l^2 t \right) dt = \frac{2}{(2m)!} \int_0^1 (1-t)^{2m} \Sigma(t) dt.$$

v) Die durch $\tilde{q}(w) := q(w)^2$ definierte Funktion $\tilde{q} : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ ist ganz.
vi) Die Koeffizienten $\tilde{\alpha}_{2m}$ der (v) zufolge in ganz $\mathbb{C}$ gültigen Taylorentwicklung

$$\tilde{q}(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{2m} w^{2m}$$

lauten

$$\tilde{\alpha}_{2m} = \frac{2^{2m+1}}{\pi^2} \sum_{k=0}^{m} \left[\frac{(-1)^k \cdot (2\pi)^{-2k}}{(2m-2k+2)!} \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l (2l-1)(4k-2l-1)\zeta(2l)\zeta(4k-2l) \right].$$

vii) Eine andere Darstellung der $\tilde{\alpha}_{2m}$ ist

$$\tilde{\alpha}_{2m} = \frac{2}{(2m)!} \int_0^1 \int_0^1 \left[(2-t-\tau)^{2m} + (t-\tau)^{2m} \right] \Sigma(t)\Sigma(\tau) dt\, d\tau \, .$$

viii) Es gilt die Abschätzung

$$\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{(2m)!} \left(1 + \frac{5/6}{\sqrt{2m+1}} \right) \frac{2^{2m+1}}{e^{2\sqrt{\pi(2m+1)}}} < \tilde{\alpha}_{2m} < \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{(2m)!} \left(1 + \frac{10/9}{\sqrt{2m+1}} \right) \frac{2^{2m+1}}{e^{2\sqrt{\pi(2m+1)}}} .$$

ix) Die durch

$$Q(w) := \tilde{q}(w) \cdot \frac{sinh\sqrt{2\pi w}\, sin\sqrt{2\pi w}}{w} = \frac{\varphi_+(w)}{2\sqrt{2\pi}} \frac{sinh^2 w}{w^2}$$

für (zunächst nur) $w \neq 0$ definierte Funktion Q ist nach stetiger Ergänzung in ihrer Definitionslücke bei $w = 0$ ganz.
x) Die Koeffizienten β_{2m} der (ix) zufolge in ganz $\mathbb{C}$ gültigen Taylorentwicklung

$$Q(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2m} w^{2m}$$

lauten

$$\beta_{2m} = \frac{2}{\pi} 4^m \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{2k}} \frac{(4k-1)\zeta(4k)}{(2m-2k+2)!} \, .$$

xi) Es gilt die Abschätzung

$$|\beta_{2m}| < 20 \frac{4^m}{(2m+1)!} exp\left(-(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)} \right) .$$

xii) Für $sinh\, w \neq 0$ gilt die Reihenentwicklung

$$\varphi_+(w) = 2\sqrt{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m} \frac{w^{2m+2}}{sinh^2 w} \, .$$

Beweis:
i) Die (ganze) Zählerfunktion $sinh\, w$ besitzt (durchweg einfache) Nullstellen genau bei $w = \pi k\, i$ ($k \in \mathbb{Z}$); die (aufgrund der Geradheit von $cosh$ und cos offenbar zu einer ganzen Funktion fortsetzbare) Nennerfunktion

$$cosh\sqrt{2\pi w} - cos\sqrt{2\pi w} = 2sin(1+i)\sqrt{\frac{\pi w}{2}}sin(1-i)\sqrt{\frac{\pi w}{2}}$$

besitzt (gleichfalls sämtlich einfache) Nullstellen genau bei

$$(1 \pm i)\sqrt{\frac{\pi w}{2}} = \pi k \Leftrightarrow \pm i\pi w = \pi^2 k^2 \Leftrightarrow w = \pm i\pi k^2 \ \ (k \in \mathbb{Z})\,.$$

Damit ist klar: q ist meromorph über ganz $\mathbb{C}$ und hat ferner keine Polstellen, da $sinh\, w$ sämtliche Nullstellen des Nenners behebt. Also ist q nach stetiger Ergänzung in den Definitionslücken ganz.
ii) Mit

$$\frac{x}{sin\, x} =: \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(4^k-2)x^{2k} \ \ (|x| < \pi)$$

(B_{2m}: die $2m$-te Bernoullische Zahl) folgt zunächst("Cauchy-Produkt")

$$\frac{w}{cosh\sqrt{2\pi w} - cos\sqrt{2\pi w}} = \frac{1}{2\pi}\frac{(1+i)\sqrt{\frac{\pi w}{2}}}{sin(1+i)\sqrt{\frac{\pi w}{2}}}\cdot\frac{(1-i)\sqrt{\frac{\pi w}{2}}}{sin(1-i)\sqrt{\frac{\pi w}{2}}}$$

$$= +\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}(4^k-2)\left(2i\cdot\frac{\pi w}{2}\right)^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}(4^k-2)\left(-2i\cdot\frac{\pi w}{2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\frac{B_{2l}}{(2l)!}(4^l-2)(i\pi)^l\cdot(-1)^{k-l}\frac{B_{2k-2l}}{(2k-2l)!}(4^{k-l}-2)(-i\pi)^{k-l}\right]w^k$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}i^k\pi^k\left[\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\frac{(4^l-2)(4^{k-l}-2)\,B_{2l}B_{2k-2l}}{(2l)!\,(2k-2l)!}\right]w^k.$$

Wegen Geradheit verschwindet hierin nun jeder zweite Summand, und zusammen mit $B_{2l} = 2(-1)^{l+1}\zeta(2l)/(2^{2l}\pi^{2l})$ folgt also Übereinstimmung mit

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\pi^{2k}\sum_{l=0}^{2k}(-1)^l\frac{(4^l-2)(4^{2k-l}-2)\,B_{2l}B_{4k-2l}}{(2l)!\,(4k-2l)!}\,w^{2k}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\sum_{l=0}^{2k}(-1)^l\left(1-\frac{2}{4^l}\right)\left(1-\frac{2}{4^{2k-l}}\right)\zeta(2l)\zeta(4k-2l)\right]\left(\frac{w}{\pi}\right)^{2k}\,.$$

Multipliziert man jetzt noch $sinh\, w/w = \sum_{m=0}^{\infty} w^{2m}/(2m+1)!$ heran, so folgt mittels Koeffizientenvergleich die Behauptung.

iii) Formt man den soeben für die α_{2m} gefundenen Ausdruck mit Hilfe von Lemma 6 um, so gewinnt man – nach (trivialer) Vertauschung einer Summationsreihenfolge – sofort die Behauptung.
iv) Mittels (iii) und einer Bemerkung im Anschluß an Lemma 9 folgt

$$\begin{aligned}
\alpha_{2m} &= 2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{l}{sinh\,\pi l}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m-k}}{(2k+1)!}\,\frac{1}{(\pi l^2)^{2m-2k}} \\
&= 2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{l}{sinh\,\pi l}\cdot\frac{(-1)^m}{(\pi l^2)^{2m}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,(\pi l^2)^{2k} \\
&= 2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{l}{sinh\,\pi l}\cdot(-1)^{l+1}\frac{\pi l^2}{(2m+1)!}\int_0^1 t^{2m+1} sin\,\pi l^2 t\,dt \\
&= \frac{2\pi}{(2m+1)!}\int_0^1 t^{2m+1}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l^3}{sinh\,\pi l}\,sin\,\pi l^2 t\right)dt \\
&= \frac{2}{(2m)!}\int_0^1 t^{2m}\left(\frac{1}{4\pi}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{sinh\,\pi l}\,cos\,\pi l^2 t\right)dt\,,
\end{aligned}$$

nach partieller Integration und – zur Berechnung der Randwerte – mittels einer Bemerkung im Anschluß an Lemma 8.
Die Vertauschbarkeit von Integration und Summation ist sofort klar, da für $L \to \infty$ ($L \in I\!N$): $|\int_0^1 t^{2m+1}\sum_{l=L}^{\infty}...dt| < \sum_{l=L}^{\infty} l^3/sinh(\pi l) \to 0$ gilt.
Die im Zusammenhang mit der partiellen Integration ("versteckt") auftretende weitere gliedweise Integration rechtfertigt sich völlig analog.
v) Mit q ist natürlich auch q^2 ganz.
vi) Mit

$$\frac{x^2}{sin^2 x} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}4^m(2m-1)B_{2m}}{(2m)!}x^{2m} \quad (|x| < \pi)$$

folgt hier (wie unter (ii)) zunächst

$$\frac{w^2}{(cosh\sqrt{2\pi w}-cos\sqrt{2\pi w})^2} = \frac{w^2}{4\pi^2 w^2}\frac{\left((1+i)\sqrt{\frac{\pi w}{2}}\right)^2}{sin^2(1+i)\sqrt{\frac{\pi w}{2}}}\cdot\frac{\left((1-i)\sqrt{\frac{\pi w}{2}}\right)^2}{sin^2(1-i)\sqrt{\frac{\pi w}{2}}}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m4^m(2m-1)B_{2m}}{(2m)!}(i\pi w)^m\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m4^m(2m-1)B_{2m}}{(2m)!}(-i\pi w)^m.$$

Wenige weitere Umformungen, wie sie ganz analog im Beweis von (ii) vorgenommen wurden, führen mit $sinh^2 w/w^2 = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2w)^{2n}/(2n+2)!$ und mit $B_{2l} = 2(-1)^{l+1}\zeta(2l)/(2^{2l}\pi^{2l})$ (s.o.) schließlich auf die Behauptung.

vii) Mittels (iv) und der binomischen Formel folgt sofort die Behauptung.
viii) U.a. werden benötigt die folgenden drei über ganz $I\!R^+$ gültigen Ungleichungen, welche sich mittels dreier elementarer Kurvendiskussionen (unter Verwendung des Taylorschen Satzes; Entwicklungsstelle: $t = 0$; man beachte die Holomorphie der abzuschätzenden Funktion ebenda) nachweisen lassen:

$$e^{-\frac{\pi}{2}}\Big(1+\frac{9-\pi}{12}\,t\Big) < e^{\frac{\pi}{t}-\frac{\pi}{1-e^{-t}}}\sqrt{\frac{t}{1-e^{-t}}}^{\,3} < e^{-\frac{\pi}{2}}\Big(1+\frac{9-\pi}{12}\,t+\frac{63-18\pi+\pi^2}{288}\,t^2\Big),$$

$$e^{\frac{7\pi}{4t}-\frac{7\pi}{4(1-e^{-t})}}\sqrt{\frac{t}{1-e^{-t}}}^{\,3} < \frac{1}{15}+\frac{t}{60}+\frac{t^2}{3400}\,.$$

Mit (vii) folgt nun zunächst einerseits

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{2m} &< \frac{2}{(2m)!}\left[2^{2m}\int_0^1\int_0^1\left(1-\frac{t+\tau}{2}\right)^{2m}\Sigma(t)\Sigma(\tau)dt\,d\tau+\Sigma(1)^2\right] \\
&< \frac{2}{(2m)!}\left[2^{2m}\int_0^1\int_{-min(t,1-t)}^{min(t,1-t)}(1-t)^{2m}\Sigma(t+\tau)\Sigma(t-\tau)\,2d\tau\,dt+\frac{1}{30}\right] \\
&= \frac{2}{(2m)!}\left[2^{2m+2}\int_0^1(1-t)^{2m}\int_0^{min(t,1-t)}\Sigma(t+\tau)\Sigma(t-\tau)\,d\tau\,dt+\frac{1}{30}\right] \\
&= \frac{2}{(2m)!}\left[2^{2m+2}\int_0^1(1-t)^{2m}\tilde{\Sigma}_1(t)\,dt+\frac{1}{30}\right] \\
&< \frac{2}{(2m)!}\left[2^{2m+2}\int_0^1(1-t)^{2m}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{4t^{\frac{3}{2}}}+4\,\frac{e^{-\frac{7\pi}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}}\right)dt+\frac{1}{30}\right],
\end{aligned}$$

aufgrund von Lemma 8, (iii).
Mittels Substitution $1-t \leftrightarrow e^{-t}$ folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{2m} &< \frac{2}{(2m)!}\left[2^{2m+2}\int_0^\infty e^{-2mt}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{1-e^{-t}}}}{4(1-e^{-t})^{\frac{3}{2}}}+4\,\frac{e^{-\frac{7\pi}{4(1-e^{-t})}}}{(1-e^{-t})^{\frac{3}{2}}}\right)e^{-t}dt+\frac{1}{30}\right] \\
&= \frac{2}{(2m)!}\Bigg[2^{2m}\int_0^\infty e^{-(2m+1)t-\frac{\pi}{t}}\cdot e^{\frac{\pi}{t}-\frac{\pi}{1-e^{-t}}}\sqrt{\frac{t}{1-e^{-t}}}^{\,3}\frac{dt}{\sqrt{t^3}} \\
&\quad +2^{2m+4}\int_0^\infty e^{-(2m+1)t-\frac{7\pi}{4t}}\cdot e^{\frac{7\pi}{4t}-\frac{7\pi}{4(1-e^{-t})}}\sqrt{\frac{t}{1-e^{-t}}}^{\,3}\frac{dt}{\sqrt{t^3}}+\frac{1}{30}\Bigg].
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der eingangs genannten Abschätzungen folgt nun

$$\tilde{\alpha}_{2m} < \frac{2}{(2m)!}\left[2^{2m}\int_0^\infty e^{-(2m+1)t-\frac{\pi}{t}}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{9-\pi}{12}\,t+\frac{63-18\pi+\pi^2}{288}\,t^2\right)\frac{dt}{\sqrt{t^3}}\right.$$

$$\left.+2^{2m+4}\int_0^\infty e^{-(2m+1)t-\frac{7\pi}{4t}}\cdot\left(\frac{1}{15}+\frac{t}{60}+\frac{t^2}{3400}\right)\frac{dt}{\sqrt{t^3}}+\frac{1}{30}\right]$$

$$=\frac{2^{2m+1}}{(2m)!}\left[e^{-\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{9-\pi}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2m+1}}+\frac{63-18\pi+\pi^2}{576(2m+1)}\left(2\pi+\sqrt{\frac{\pi}{2m+1}}\right)\right)e^{-2\sqrt{\pi(2m+1)}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{16}{15}\sqrt{\frac{4}{7}}+\frac{4}{15}\sqrt{\frac{\pi}{2m+1}}+\frac{1}{425(2m+1)}\left(\sqrt{7}\pi+\sqrt{\frac{\pi}{2m+1}}\right)\right)e^{-\sqrt{7\pi(2m+1)}}+\frac{4^{-m}}{30}\right].$$

Mittels einer weiteren, wiederum elementaren Kurvendiskussion ergeben sich für $m\geq 20$ hieraus die behaupteten Abschätzungen nach oben; jene für $m\in\{0,1,2,...,19\}$ zeigt man – etwa unter Zuhilfenahme eines Mathematik-Programms (z.B. Maple) – leicht einzeln mittels (vi). Entsprechend ergeben sich die genannten Abschätzungen nach unten:

$$\tilde{\alpha}_{2m} > \frac{2}{(2m)!}\int_0^1\int_0^1(2-t-\tau)^{2m}\Sigma(t)\Sigma(\tau)\,dt\,d\tau=\frac{2^{2m+3}}{(2m)!}\int_0^1(1-t)^{2m}\tilde{\Sigma}_1(t)dt,$$

wobei nun wiederum Lemma 8, (iii) heranzuziehen ist; man erhält

$$\tilde{\alpha}_{2m} > \frac{2^{2m+3}}{(2m)!}\int_0^1(1-t)^{2m}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{4t^{\frac{3}{2}}}-4\,\frac{e^{-\frac{7\pi}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}}\right)dt$$

$$=\frac{2^{2m+3}}{(2m)!}\int_0^\infty\left[\frac{e^{-(2m+1)t-\frac{\pi}{t}}}{4}e^{\frac{\pi}{t}-\frac{\pi}{1-e^{-t}}}-4e^{-(2m+1)t-\frac{7\pi}{4t}}e^{\frac{7\pi}{4t}-\frac{7\pi}{4(1-e^{-t})}}\right]\sqrt{\frac{t}{1-e^{-t}}}^{\,3}\frac{dt}{\sqrt{t^3}}.$$

Mit Hilfe der eingangs genannten Abschätzungen und (wiederum) mittels geschlossener Auswertung der auftretenden Integrale folgt hier nun

$$\tilde{\alpha}_{2m} > \frac{2^{2m+1}}{(2m)!}\left[e^{-\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{9-\pi}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2m+1}}\right)e^{-2\sqrt{\pi(2m+1)}}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{16}{15}\sqrt{\frac{4}{7}}+\frac{4}{15}\sqrt{\frac{\pi}{2m+1}}+\frac{1}{425\,(2m+1)}\left(\sqrt{7}\pi+\sqrt{\frac{\pi}{2m+1}}\right)\right)e^{-\sqrt{7\pi(2m+1)}}\right],$$

woraus sich für $m\geq 20$, erneut mittels elementarer Kurvendiskussion, die behaupteten Abschätzungen nach unten ergeben; $m\in\{0,1,2,...,19\}$ erledigt man (wie oben) wieder leicht einzeln mittels (vi).

ix) Die Behauptung folgt hier sofort aus (vi) und aus der Ganzheit von

$$\frac{sinh\sqrt{2\pi w}\, sin\sqrt{2\pi w}}{w} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+2)!}\,(4\pi)^{2k+1} w^{2k}\ .$$

x) Hier benötigt man neben $sinh^2 w/w^2 = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2w)^{2n}/(2n+2)!$ (s.o.) nur die Taylorentwicklung von φ_+ um $w = 0$ (vgl. Beweis von Lemma 4):

$$\varphi_+(w) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\zeta(4l)(4l-1)\left(\frac{w}{\pi}\right)^{2l} \quad (|w| < \pi)\,.$$

xi) Mit der bereits unter (ix) genannten Taylorentwicklung der Funktion $sinh\sqrt{2\pi w}\, sin\sqrt{2\pi w}/w$ um $w = 0$ und ferner mittels (viii) folgt für $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
|\beta_{2m}| &= \left|\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{(4\pi)^{2k+1}}{(4k+2)!}\tilde{\alpha}_{2m-2k}\right| < \sum_{k=0}^{m}\frac{(4\pi)^{2k+1}}{(4k+2)!}\tilde{\alpha}_{2m-2k} \\
&< \sum_{k=0}^{m}\frac{(4\pi)^{2k}}{(4k+2)!}\cdot\frac{8\pi}{e^{\frac{\pi}{2}}}\,\frac{2^{2m-2k}}{(2m-2k)!}\left(1+\frac{10/9}{\sqrt{2m-2k+1}}\right)e^{-2\sqrt{\pi(2m-2k+1)}} \\
&< \frac{152\pi}{9\,e^{\frac{\pi}{2}}}\cdot 4^m \sum_{k=0}^{m}\frac{(2\pi)^{2k}}{(4k+2)!}\,\frac{e^{-2\sqrt{\pi(2m-2k+1)}}}{(2m-2k)!}\ .
\end{aligned}$$

Eine Nebenrechnung, die für den hier erfolgenden Beweis allerdings gänzlich irrelevant ist[3], zeigt nun, daß für große m die (betraglich) größten Summanden in der zu betrachtenden Summe von jenen Indizes k geliefert werden, die sich in nächster Umgebung von

$$k_0 := k_0(m) := \sqrt{\frac{\pi m}{4}} + \frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1) - \frac{5}{8}$$

befinden. Ist noch ferner

$$k_1 := k_1(m) := 2m-2k_0(m) = 2m-\sqrt{\pi m}-\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)+\frac{5}{4} \quad (> 1 \ \text{ für } m \geq 1),$$

so folgt mittels Lemma 9, (iii)

$$(2m-2k)! \geq k_1\Gamma(k_1)(k_1+h(k_1))^{2m-2k-k_1},$$

und damit

$$|\beta_{2m}| < \frac{152\pi}{9\,e^{\frac{\pi}{2}}}\cdot 4^m\,\frac{(k_1+h(k_1))^{k_1-2m}}{k_1\Gamma(k_1)}\sum_{k=0}^{m}\frac{(2\pi(k_1+h(k_1)))^{2k}}{(4k+2)!}\,e^{-2\sqrt{\pi(2m-2k+1)}}.$$

[3]Die Ursache der Unbedeutenheit des Ursprungs der folgenden Ausdrücke liegt in der Beliebigkeit (bzw. Unabhängigkeit von 'z') der Tangentialstelle ('k') in Lemma 9.

Mit Hilfe der ("Stirling"-)Ungleichungen $\gamma(x) < ln(x\Gamma(x)) < \gamma(x) + 1/10x$ ($\gamma(x) := ln(2\pi x)/2 + x\,ln(x/e);\ x > 0$) und einer weiteren elementaren Kurvendiskussion ergibt sich nun für alle $m \geq 0$:

$$\frac{(k_1+h(k_1))^{k_1-2m}}{k_1\Gamma(k_1)} \leq \frac{(k_1+0)^{-\sqrt{\pi m}-\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)+\frac{5}{4}}}{k_1\Gamma(k_1)} < \frac{20/9}{(2m)!}\,.$$

Somit folgt für $m \geq 1$

$$|\beta_{2m}| < \frac{152\pi}{9\,e^{\frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{20}{9} \frac{4^m}{(2m)!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(2\pi(k_1+h(k_1)))^{2k}}{(4k+2)!}\, e^{-2\sqrt{\pi(2m-2k+1)}}$$

$$< \frac{3040\pi}{81\,e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{4^m}{(2m)!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(2\pi(k_1+h(k_1)))^{2k}}{(4k+2)!}\, e^{-2\sqrt{\pi}\left(\sqrt{2m+1}-\frac{\sqrt{2m+1}-1}{m}\,k\right)}$$

$$< \frac{3040\pi}{81\,e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{4^m}{(2m)!} e^{-2\sqrt{\pi(2m+1)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} \left(2\pi\left(k_1+\frac{13}{24}\right) e^{\sqrt{\frac{2\pi}{m+\sqrt{3}+1}}}\right)^{2k},$$

denn für $m \geq 1$ ist $(\sqrt{2m+1}-1)/m \leq \sqrt{2/(m+\sqrt{3}+1)}$ nebst $k_1 > 1$ (s.o.) und (Lemma 9, (iii) zufolge) somit $h(k_1) < 13/24$.
Für $m \geq 1$ ist ferner

$$2\pi\left(k_1 + \frac{13}{24}\right) exp\left(\sqrt{\frac{2\pi}{m+\sqrt{3}+1}}\right) > 38$$

und zusammen mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(4k+2)!} = \frac{cosh\sqrt{z} - cos\sqrt{z}}{2\,z} < \frac{25}{99} \frac{exp(\sqrt{z})}{z} \quad \text{(für } z > 19\text{)}$$

folgt also

$$|\beta_{2m}| < \frac{3040\pi}{81\,e^{\frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{25}{99} \frac{4^m}{(2m)!} \cdot e^{-2\sqrt{\pi(2m+1)}} \frac{exp\left(\sqrt{2\pi\left(k_1+\frac{13}{24}\right) exp\left(\sqrt{\frac{2\pi}{m+\sqrt{3}+1}}\right)}\right)}{2\pi\left(k_1+\frac{13}{24}\right) exp\left(\sqrt{\frac{2\pi}{m+\sqrt{3}+1}}\right)}\,.$$

Eine abschließende Kurvendiskussion zeigt für $m \geq 1$ nun noch

$$\sqrt{2m+1} < \sqrt{\left(k_1+\frac{13}{24}\right) exp\left(\sqrt{\frac{2\pi}{m+\sqrt{3}+1}}\right)} < \sqrt{2m+1} + \frac{7}{6}\,,$$

womit sich Zähler und Nenner im hinteren Quotienten des letztgenannten Ausdrucks abschätzen lassen. Da $exp[\sqrt{2\pi} \cdot 7/6] < 20$ und desweiteren $38.000/(8019\,e^{\frac{\pi}{2}}) < 1$, ist (für $m \geq 1$) die Behauptung gewonnen;
den Fall $m=0$ klärt $|\beta_0| = \frac{1}{2\pi} < 2 < \frac{20}{3^2} < \frac{20}{e^2} = \frac{20}{e^{1\cdot 2}} < \frac{20}{e^{(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi}}}$.
xii) Die Aussage folgt sofort aus der Definition von Q (und der β_{2m}).

Bemerkung:

Die Konstanten in den genannten (und allen folgenden) Ungleichungen lassen sich hier und dort mit einigem Aufwand verschärfen; meist steht dieser aber in keinem sinnvollen Verhältnis zum Gewinn und soll daher unterbleiben.

So lassen sich etwa die unter Lemma 10, (viii) genannten Abschätzungen für die $\tilde{\alpha}_{2m}$ mit Hilfe der Taylorentwicklung um $t = 0$ der (nach $t = 0$, wie bereits bemerkt, analytisch fortsetzbaren) Funktion

$$e^{\frac{\pi}{t}-\frac{\pi}{1-e^{-t}}}\sqrt{\frac{t}{1-e^{-t}}}^{\,3}$$

"beliebig genau(!) machen"; genauer: die Verwendung dieser Taylorentwicklung führt auf eine asymptotische Entwicklung der $\tilde{\alpha}_{2m}$ für $m \to \infty$, deren "Anfang" man ohne große Mühe bereits aus dem Beweis von Lemma 10, (viii) gewinnen kann; er liefert die (präzisierte) Abschätzung

$$\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{(2m)!}\left(1+\frac{9-\pi}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2m+1}}+\frac{K_1}{2m+1}\right)\frac{2^{2m+1}}{e^{2\sqrt{\pi(2m+1)}}} < \tilde{\alpha}_{2m}$$

$$< \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{(2m)!}\left(1+\frac{9-\pi}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2m+1}}+\frac{K_2}{2m+1}\right)\frac{2^{2m+1}}{e^{2\sqrt{\pi(2m+1)}}} \;,$$

für geeignete, reelle K_1, K_2.

Die Ursache für den (hier sehr) hohen Aufwand liegt im wesentlichen darin, daß die zu entwickelnde Funktion für $t \to \infty$ wie $t^{\frac{3}{2}}$ wächst. Damit nämlich liefern die höheren Partialsummen der Taylorentwicklung nur Abschätzungen über beschränkten Teilintervallen von $\mathbb{R}^+$.

Bemerkung:

Die unter (ix) genannte Abschätzung für die β_{2m} ist wahrscheinlich nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ deutlich verbesserbar;

Numerisches Auswerten der etwa ersten 300 Werte (β_0 bis β_{600}) läßt sogar vermuten, daß eine Beziehung besteht der Form

$$\beta_{2m} \approx \frac{2^{2m+1}}{(2m+1)!}\,\frac{cos\left(\sqrt{\pi(2m+1)}-\frac{\pi}{4}\right)}{exp\left(\sqrt{\pi(2m+1)}\right)} \quad (m \to \infty) \;,$$

die sich – falls zutreffend – aber nicht einfach nachweisen zu lassen scheint.

Bemerkung:
Ganz analog zur Gewinnung der Abschätzungen für die $\tilde{\alpha}_{2m}$ in Lemma 10, (viii) lassen sich auch solche für die etwas einfacher beschaffenen α_{2m} bestimmen; so gilt (für alle $m \geq 0$)

$$\frac{2e^{-\frac{\pi}{4}}}{(2m)!}\left(1+\frac{3/4}{\sqrt{2m+1}}\right)e^{-\sqrt{2\pi(2m+1)}} < \alpha_{2m} < \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}}}{(2m)!}\left(1+\frac{8/7}{\sqrt{2m+1}}\right)e^{-\sqrt{2\pi(2m+1)}}.$$

Bemerkung:
Eine weitere, allerdings recht schwache Abschätzung für die α_{2m} (und analog auch für die $\tilde{\alpha}_{2m}$) läßt sich in hübscher und einfacher Weise mit Hilfe der Weierstraßschen Produktdarstellung des *sinh* gewinnen:
Es gilt

$$0 \leq \alpha_{2m} \leq \frac{1}{2\pi(2m+1)!}\,.$$

Nachweis: Bereits gewonnen war

$$q(w) = \frac{1}{2\pi} \prod_{n\in I\!N,\, n\neq\Box} \left(1+\frac{w^2}{\pi^2 n^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m} w^{2m}\,;$$

bekannt ist

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\sinh w}{w} = \frac{1}{2\pi} \prod_{n\in I\!N} \left(1+\frac{w^2}{\pi^2 n^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi(2m+1)!}\, w^{2m}\,.$$

Da die zweite Gleichung aus der ersten hervorgeht durch Multiplikation von Faktoren mit lauter positiven Koeffizienten, folgt die Behauptung.

Bemerkung:
Für die β_{2m} läßt sich mittels der Lemmata 3 und 10, (x) auch ein übersichtlicher, allerdings kaum handhabbarer Integralausdruck angeben:

$$\begin{aligned}
\beta_{2m} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{(4k-1)\zeta(4k)}{\pi^{2k}}\,\frac{2^{2m-2k+2}}{(2m-2k+2)!} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{1}{4k\,\Gamma(2k)}\int_0^\infty x^{2k}\Phi(x)\,dx\cdot\frac{2^{2m-2k+2}}{(2m-2k+2)!} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \sum_{k=0}^{m} \frac{(ix)^{2k}\,2^{2k-2m+2}}{(2k)!(2m-2k+2)!}\,\Phi(x)\,dx \\
&= \frac{1}{4\pi(2m+2)!}\left[Re\int_0^\infty (2+ix)^{2m+2}\Phi(x)\,dx + (-1)^m\Xi(2m+2)\right].
\end{aligned}$$

Letztes zum Nachweis von Satz 3 erforderliches Hilfsmittel ist

Lemma 11:
i) Ist $m \in \mathbb{N}_0$, so gilt für reelle x

$$\int_0^\infty \frac{w^{2m+2}}{sinh^2 w}\, cos(wx)\, dw = (-1)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^{2m+2} \left(\frac{\pi\, x}{e^{\pi x}-1}\right).$$

ii) Für $|x| < 2$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt die Taylorentwicklung

$$(-1)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^{2m+2} \left(\frac{\pi\, x}{e^{\pi x}-1}\right) = \frac{1}{2^{2m+1}} \sum_{l=0}^\infty (-1)^l \frac{(2l+2m+2)!}{(2l)!} \frac{\zeta(2l+2m+2)}{2^{2l}}\, x^{2l}.$$

iii) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt die weitere Entwicklung

$$\Phi_+(x) = 4 \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \beta_{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^{2m+2} \left(\frac{\pi\, x}{e^{\pi x}-1}\right).$$

iv) Für $x \in (-2, 2)$ ist ferner

$$\Phi_+(x) = 2 \sum_{m=0}^\infty \frac{\beta_{2m}}{2^{2m}} \sum_{l=0}^\infty (-1)^l \frac{(2l+2m+2)!}{(2l)!} \frac{\zeta(2l+2m+2)}{2^{2l}}\, x^{2l}.$$

v) Für beliebiges $l \in \mathbb{N}_0$ gilt schließlich

$$\sum_{m=0}^\infty \frac{\beta_{2m}}{2^{2m}} (2l+2m+2)! \cdot \zeta(2l+2m+2) = 0.$$

Beweis:
i) Zunächst ist

$$J(x) := \int_0^\infty \frac{w^2}{sinh^2 w}\, cos(wx)\, dw$$

holomorph im Kreis $|x| < 2$, denn $sinh^2 w = \mathcal{O}(e^{2w})$ und $cos(wx) = \mathcal{O}(e^{w|x|})$ für $w \to \infty$. Damit existiert eine Taylorentwicklung von J um $x = 0$:

$$J(x) = \int_0^\infty \frac{w^2}{sinh^2 w} \sum_{l=0}^\infty (-1)^l \frac{(wx)^{2l}}{(2l)!}\, dw = \sum_{l=0}^\infty (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \int_0^\infty \frac{w^{2l+2}}{sinh^2 w}\, dw,$$

wobei die vorgenommene gliedweise Integration leicht mit Hilfe der (trivialen) Abschätzung $|\sum_{l=0}^\infty (-1)^l (wx)^{2l}/(2l)!| \le \sum_{l=0}^\infty |wx|^{2l}/(2l)! = cosh|wx|$ in Verbindung (erneut) mit [Fichtenholz], Kap. XIV, Nr. 518, Folgerung aus Satz 1 sich rechtfertigen läßt.

Mittels [Ryshik, Gradstein], 7.511, Gl. 2 und dem Satz über das gliedweise Ableiten von Potenzreihen (vgl. [Fichtenholz], Kap. XII, Nr. 456) folgt

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \cdot (-1)^l B_{2l+2}\pi^{2l+2} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_{2l}}{(2l)!}(\pi x)^{2l} \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(\frac{\pi\, x}{e^{\pi x}-1} + \frac{\pi x}{2}\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(\frac{\pi\, x}{e^{\pi x}-1}\right) . \end{aligned}$$

Die Behauptung erhält man nun mittels $2m$-fachem Ableiten nach x, bzw. – alternativ – mittels der Regel $\mathcal{F}[(-it)^n f(t)](w) = \mathcal{F}^{(n)}[f](w)$ für Fouriertransformationen von Schwartz-Funktionen f.

ii) Die Behauptung folgt sofort, wenn die (im Beweis von (i) bereits aufgetretene) Taylorentwicklung von $\pi x/(e^{\pi x}-1)$ um $x=0$ und der eben bereis genannte Satz aus [Fichtenholz] herangezogen werden; ferner ist noch $B_{2l} = 2\cdot(-1)^{l+1}(2l)!\cdot\zeta(2l)/(2\pi)^{2l}$ zu verwenden.

iii) Zunächst ist für $m>0$ und geeignetes $C>0$ – z.B. für $C=2500$ –

$$\frac{(2m+2)(2m+3)(2m+4)}{e^{(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)}}} \cdot m < C\,,$$

d.h. für $m \geq M \in I\!N^+$:

$$e^{-(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)}} < \frac{C}{M}\,\frac{1}{(2m+2)(2m+3)(2m+4)}\,.$$

Aus Lemma 10, (xi) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} R_M(w,x) &:= \left|\sum_{m=M}^{\infty} \beta_{2m}\frac{w^{2m+2}}{sinh^2 w}\,cos\,wx\right| < 20\cdot\frac{C}{M}\,\frac{w^2}{sinh^2 w}\sum_{m=M}^{\infty}\frac{(2w)^{2m}}{(2m+4)!} \\ &\leq \frac{20C}{M}\,\frac{w^2}{16\,w^4 sinh^2 w}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(2w)^{2m}}{(2m)!} = \frac{5C}{4M}\cdot\frac{cosh\,2w-1-\frac{(2w)^2}{2}}{w^2 sinh^2 w} \leq \frac{5C}{4M}\cdot\frac{7/3}{w^2+1}\,; \end{aligned}$$

letzteres aufgrund einer weiteren elementaren Kurvendiskussion. Es folgt

$$\int_0^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\beta_{2m}\frac{w^{2m+2}}{sinh^2 w}\,cos\,wx\,dw = \left[\sum_{m=0}^{M-1}\beta_{2m}\int_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\sum_{m=M}^{\infty}\beta_{2m}\right]\frac{w^{2m+2}}{sinh^2 w}\,cos\,wx\,dw\,,$$

wobei, wie gesehen,

$$\left|\int_0^{\infty}\sum_{m=M}^{\infty}\beta_{2m}\frac{w^{2m+2}}{sinh^2 w}\,cos\,wx\,dw\right| \leq \int_0^{\infty} R_M(w,x)dw < \frac{3C}{M}\int_0^{\infty}\frac{1}{w^2+1}\,dw = \frac{3C}{M}\cdot\frac{\pi}{2}\,,$$

was für $M\to\infty$ offenbar gegen Null geht.

Zusammen mit Lemma 10, (xii) und Lemma 4 folgt also

$$\Phi_+(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi_+(w)\, cos\, wx\, dw = 4\int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty \beta_{2m} \frac{w^{2m+2}}{sinh^2 w}\, cos\, wx\, dw$$
$$= 4\sum_{m=0}^\infty \beta_{2m} \int_0^\infty \frac{w^{2m+2}}{sinh^2 w}\, cos\, wx\, dw\,,$$

denn $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))=f$ für gerade Schwartz-Funktionen f. Den Rest klärt (i).
iv) Die Aussage folgt sofort mittels (ii) und (iii).
v) Für $\mu \in I\!N_0$ und $x > 0$ gilt (i) zufolge

$$\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^{2\mu+2}\left(\frac{\pi\, x}{e^{\pi x}-1}\right)\right| \le \int_0^\infty \frac{w^{2\mu+2}}{sinh^2 w} dw = \frac{(2\mu+2)!\zeta(2\mu+2)}{2^{2\mu+1}} < \frac{(2\mu+2)!}{2^{2\mu}}\,.$$

Damit folgt – man setze $\mu = l+m$ –

$$\left| 4\sum_{m=0}^\infty (-1)^m \beta_{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l+2m+2} \left(\frac{\pi\, x}{e^{\pi x}-1}\right)\right| < 4\sum_{m=0}^\infty |\beta_{2m}| \frac{(2l+2m+2)!}{2^{2l+2m}}\,,$$

wobei die Majorante Lemma 10, (xi) zufolge absolut konvergent ist; die zuletzt abgeschätzte Reihe konvergiert also *gleichmäßig* in $[-2+\varepsilon, 2-\varepsilon]$. Da sie andererseits aber die (zunächst nur formale, da gliedweise) Ableitung der Ordnung $2l$ nach x des in (iii) auftretenden Reihenausdrucks für $\Phi_+(x)$ ist, folgt: (iii) *darf über $I\!R^+$ $2l$-mal gliedweise nach x differenziert werden*; vgl. [Fichtenholz], Kap. XII, Nr. 435, Satz 7.
Aufgrund der (genannten) gliedweisen Differenzierbarkeit von Potenzreihen folgt nun, daß in $(-2, 2)$ auch (iv) gliedweise differenziert werden darf:

$$\Phi_+^{(2l)}(x) = 2\sum_{m=0}^\infty \frac{\beta_{2m}}{2^{2m}} \sum_{\lambda=l}^\infty (-1)^\lambda \frac{(2\lambda+2m+2)!}{(2\lambda-2l)!}\, \frac{\zeta(2\lambda+2m+2)}{2^{2\lambda}}\, x^{2\lambda-2l}$$
$$= 2\sum_{m=0}^\infty \frac{\beta_{2m}}{2^{2m}} \sum_{\lambda=0}^\infty (-1)^{\lambda+0} \frac{(2\lambda+2l+2m+2)!}{(2\lambda)!}\, \frac{\zeta(2\lambda+2l+2m+2)}{2^{2\lambda+2l}}\, x^{2\lambda}.$$

Nun ist – wegen $\Phi(x) = \Phi_+(x)$ für $x > 0$ – aus Lemma 2 die Funktionalgleichung $|x|^{\frac{5}{4}}\Phi_+(x) = |x|^{-\frac{5}{4}}\Phi_+(1/x)$ bekannt, und zusammen mit der Definition von Φ bzw. Φ_+ folgt einerseits zunächst $\lim_{x\downarrow 0} \Phi_+^{(2l)}(x) = 0$.
Aufgrund der schon gezeigten gleichmäßigen Konvergenz der Reihe über die m gilt aber andererseits zunächst $\lim_{x\downarrow 0} \sum_{m=0}^\infty ... = \sum_{m=0}^\infty \lim_{x\downarrow 0} ...$; vgl. [Fichtenholz], Kap. XII, Nr. 433, Satz 4. Da (in $[-2+\varepsilon, 2-\varepsilon]$) schließlich auch die Potenzreihe über die λ gleichmäßig konvergiert, folgt ferner $\lim_{x\downarrow 0} \sum_{\lambda=0}^\infty ... = \sum_{\lambda=0}^\infty \lim_{x\downarrow 0} ...$ (für $x \in (-2, 2)$), womit alles gezeigt ist.

Nun zum Hauptresultat der vorliegenden Arbeit; zu

Satz 3:

i) Ist $s =: \sigma + i\tau$, so gilt für beliebiges $L \in I\!N_0$ und für $-2-4L < \sigma < 3+4L$

$$\Xi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=L}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l+2m+2)!}{(2l)!} \frac{\zeta(2l+2m+2)}{2^{2l}} \left[\frac{1}{4l+3-s} + \frac{1}{4l+2+s}\right];$$

die (Doppel-) Reihe ist beliebig oft gliedweise nach s differenzierbar.

ii) Für $\Lambda, L, M \in I\!N_0$, $\Lambda \geq L$ gilt (*gleichmäßig* bzgl. τ)

$$\Bigg| \Xi^{(n)}(s) - n! \sum_{m=0}^{M} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=L}^{\Lambda} (-1)^l \frac{(2l+2m+2)!}{(2l)!} \frac{\zeta(2l+2m+2)}{2^{2l}}$$
$$\cdot \left[\frac{1}{(4l+3-s)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(4l+2+s)^{n+1}}\right] \Bigg|$$
$$< \frac{9 \cdot n!}{4^{\Lambda}} \frac{(2\Lambda+2M+4)!}{(2\Lambda+2)!} \left[\frac{1}{(7-\sigma+4\Lambda)^{n+1}} + \frac{1}{(6+\sigma+4\Lambda)^{n+1}}\right]$$
$$+ \frac{90 \cdot n!}{4^L} \frac{\rho(L,M)}{(2L)!} \left[\frac{1}{(3-\sigma+4L)^{n+1}} + \frac{1}{(2+\sigma+4L)^{n+1}}\right],$$

wenn gesetzt wird

$$\rho(L,M) := \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{(2L+2m+2)!}{(2m+1)!} exp\Big(-(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)}\Big).$$

Beweis:

Zum Nachweis sowohl von (i) als auch von (ii) wird eine Abschätzung benötigt der für $L, m, n \in I\!N_0$, $\sigma > -4L$ wie folgt definierten Funktion

$$R_{L,m,n}(s) := \sum_{l=L}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l+2m+2)!}{(2l)!} \frac{\zeta(2l+2m+2)}{2^{2l+2m}} \frac{1}{(4l+s)^{n+1}}.$$

Es gilt

$$R_{L,m,n}(s) = \frac{4}{n!} \int_0^{\infty} \frac{t^n}{e^{st}} \sum_{l=L}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l+2m+2)!}{(2l)!} \frac{\zeta(2l+2m+2)}{(2e^{2t})^{2l} \cdot 2^{2m+2}} dt,$$

denn $1/\alpha^{n+1} = 1/n! \cdot \int_0^{\infty} t^n e^{-\alpha t}\, dt$, wobei die Vertauschung wieder (leicht) mittels [Fichtenholz], Kap. XIV, Nr. 518, Folgerung aus Satz 1 folgt. Weiter ist wegen $\zeta(j) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^j$ und aufgrund absoluter Konvergenz

$$R_{L,m,n}(s) = \frac{4}{n!} \int_0^{\infty} \frac{t^n}{e^{st}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^{2m+2}} \sum_{l=L}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l+2m+2)!}{(2l)!} \frac{1}{(2k\, e^{2t})^{2l}}\, dt.$$

Nun ist – was zunächst den Fall $L=0$ angeht – für $x<1$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{(2l+2m+2)!}{(2l)!}\,x^{2l}=\frac{(2m+2)!}{2}\left[\frac{1}{(1+ix)^{2m+3}}+\frac{1}{(1-ix)^{2m+3}}\right],$$

wie man leicht mittels Induktion sieht, und somit

$$R_{0,m,n}(s)=2\frac{(2m+2)!}{n!}\int_0^\infty\frac{t^n}{e^{st}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{(2k)^{2m+3}}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{i}{2k\,e^{2t}}\right)^{2m+3}}+\frac{1}{\left(1-\frac{i}{2k\,e^{2t}}\right)^{2m+3}}\right]dt$$

$$=2\frac{(2m+2)!}{n!}\int_0^\infty\frac{t^n}{e^{st}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2k}{\left(2k+\frac{i}{e^{2t}}\right)^{2m+3}}+\frac{2k}{\left(2k-\frac{i}{e^{2t}}\right)^{2m+3}}\right]dt\,.$$

Hierin ist nun

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2k}{\left(2k+\frac{i}{e^{2t}}\right)^{2m+3}}+\frac{2k}{\left(2k-\frac{i}{e^{2t}}\right)^{2m+3}}\right]\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2k}{\left(2k+\frac{i}{e^{2t}}\right)^{2m+3}}+\frac{2k}{\left(2k-\frac{i}{e^{2t}}\right)^{2m+3}}\right|$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2k}{\left|2k+\frac{i}{e^{2t}}\right|^{2m+3}}+\frac{2k}{\left|2k-\frac{i}{e^{2t}}\right|^{2m+3}}\right]\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\cdot 2}{(2k)^{2m+3}}=\frac{\zeta(2m+2)}{2^{2m+1}}\,.$$

Also folgt zum einen

$$|R_{0,m,n}(s)|<\frac{(2m+2)!}{n!}\,\frac{\zeta(2m+2)}{2^{2m}}\int_0^\infty t^n e^{-\sigma t}dt=\frac{\zeta(2m+2)}{2^{2m}}\,\frac{(2m+2)!}{\sigma^{n+1}}\,.$$

Im Falle $L\ge 1$ ist hingegen ferner, wie man mittels Taylorscher Formel (mit Restglied in integraler Form) sieht, für $|x|<1$

$$\sum_{l=L}^{\infty}(-1)^l\frac{(2l+2m+2)!}{(2l)!}x^{2l}=\frac{(-1)^L}{2}\,\frac{(2L+2m+2)!}{(2L-1)!}x^{2L}\int_0^1(1-\tau)^{2L-1}$$
$$\cdot\left[\frac{1}{(1+ix\tau)^{2L+2m+3}}+\frac{1}{(1-ix\tau)^{2L+2m+3}}\right]d\tau\,,$$

und damit – wie im Falle $L=0$ –

$$R_{L,m,n}(s)=\frac{4}{n!}\int_0^\infty\frac{t^n}{e^{st}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^{2L+1}}{(2k)^{2L+2m+3}}\cdot\frac{(-1)^L}{2}\,\frac{(2L+2m+2)!}{(2L-1)!}$$
$$\cdot\frac{1}{(2k\,e^{2t})^{2L}}\int_0^1(1-\tau)^{2L-1}\cdot\left[\frac{1}{\left(1+\frac{i\tau}{2k\,e^{2t}}\right)^{2L+2m+3}}+\frac{1}{\left(1-\frac{i\tau}{2k\,e^{2t}}\right)^{2L+2m+3}}\right]d\tau\,dt\,.$$

Mit der (leicht) nachweisbaren gleichmäßigen Konvergenz (bzgl. τ) der nach Vertauschen unter dem Integral entstehenden Reihe (über k) folgt

$$R_{L,m,n}(s) = (-1)^L \cdot \frac{2}{n!} \cdot \frac{(2L+2m+2)!}{(2L-1)!} \int_0^\infty \frac{t^n}{e^{st}} e^{-4Lt} \int_0^1 (1-\tau)^{2L-1}$$

$$\cdot \sum_{k=1}^\infty \frac{2k}{(2k)^{2L+2m+3}} \left[\frac{1}{\left(1+\frac{i\tau}{2k\,e^{2t}}\right)^{2L+2m+3}} + \frac{1}{\left(1-\frac{i\tau}{2k\,e^{2t}}\right)^{2L+2m+3}} \right] d\tau\, dt$$

$$= (-1)^L \frac{2}{n!} \frac{(2L+2m+2)!}{(2L-1)!} \int_0^\infty \frac{t^n}{e^{(s+4L)t}} \int_0^1 (1-\tau)^{2L-1}$$

$$\cdot \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{2k}{\left(2k+\frac{i\tau}{e^{2t}}\right)^{2L+2m+3}} + \frac{2k}{\left(2k-\frac{i\tau}{e^{2t}}\right)^{2L+2m+3}} \right] d\tau\, dt.$$

Erneut wie oben folgt

$$|R_{L,m,n}(s)| \le \frac{(2L+2m+2)!\,\zeta(2L+2m+2)}{n!\,(2L-1)!\,2^{2L+2m}} \int_0^\infty \frac{t^n}{e^{(\sigma+4L)t}} dt \int_0^1 (1-\tau)^{2L-1} d\tau$$

$$= \frac{\zeta(2L+2m+2)}{2^{2L+2m}} \frac{(2L+2m+2)!}{(2L)!} \frac{1}{(\sigma+4L)^{n+1}} \qquad (*)\,,$$

welche Abschätzung, wie ein Vergleich mit dem entsprechenden, soeben bereits gewonnenen Ergebnis zeigt, offenbar also auch im Falle $L = 0$ gilt.
Nun zu den Beweisen von (i) und (ii):
i) Einer Bemerkung im Anschluß an den Beweis von Lemma 3 und Lemma 11, (iii) zufolge gilt für (zunächst nur) $0 \le \sigma \le 1$

$$\Xi(s) = 4\int_0^1 \left(x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}}\right) \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \beta_{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^{2m+2} \left(\frac{\pi\,x}{e^{\pi x}-1}\right) dx.$$

Die Reihe konvergiert, wie im Beweis von Lemma 11, (v) gesehen, gleichmäßig (bzgl. x), wodurch die folgende Vertauschung legitimiert ist:

$$\Xi(s) = 4\sum_{m=0}^\infty (-1)^m \beta_{2m} \int_0^1 \left(x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}}\right) \left(\frac{d}{dx}\right)^{2m+2} \left(\frac{\pi\,x}{e^{\pi x}-1}\right) dx.$$

Mit Lemma 11 (ii) folgt nun weiter – man beachte $[0,1] \subset [0,2)$ –

$$\Xi(s) = 2\sum_{m=0}^\infty \frac{\beta_{2m}}{4^m} \int_0^1 \left(x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}}\right) \sum_{l=0}^\infty (-1)^l \zeta(2l+2m+2) \frac{(2l+2m+2)!}{(2l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} dx,$$

womit nach – wieder wegen gleichmäßiger Konvergenz der Potenzreihe im Integrationsintervall $[0,1]$: zulässiger – gliedweiser Integration die behauptete Entwicklung für Ξ im Falle $L = 0$ gewonnen ist.

Die Gültigkeit jener Entwicklung im Falle eines beliebigen $L \in I\!N_0$ ergibt sich leicht mittels Lemma 11, (v):
Mittels sukzessivem Abtrennen der den Summationsindizes $l = 0$, $l = 1$, usw. entsprechenden Summanden (in der Reihe über l) folgt damit nacheinander (für zunächst nur $0 \leq \sigma \leq 1$)

$$\Xi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \left(\frac{(2m+2)!}{0!} \frac{\zeta(2m+2)}{2^0} \left[\frac{1}{3-s} + \frac{1}{2+s} \right] + \sum_{l=1}^{\infty} ... \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=1}^{\infty} ...$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \left(\frac{(2m+4)!}{2!} \frac{\zeta(2m+4)}{2^2} \left[\frac{1}{7-s} + \frac{1}{6+s} \right] + \sum_{l=2}^{\infty} ... \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=2}^{\infty} ..., \text{etc.}$$

Zum Nachweis der Fortsetzbarkeit der gewonnenen Entwicklung in den erweiterten Streifen $-2 - 4L < \sigma < 3 + 4L$ soll nun *ihre gleichmäßige Konvergenz* in jedem Streifen $-2 - 4L + \varepsilon \leq \sigma \leq 3 + 4L - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ bel.) nachgewiesen werden. Da die Reihen $R_{L,m,0}(s)$ in $\sigma > -4L$ holomorph sind, wie man (leicht) mit Hilfe des bekannten Satzes von Weierstrass über die Holomorphie des Grenzelements gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen einsieht, zieht die gleichmäßige Konvergenz der in Rede stehenden Reihe über die $R_{L,m,0}(s)$ – aufgrund desselben Satzes von Weierstrass – schließlich auch die Holomorphie dieser Entwicklung im genannten Streifen $-2 - 4L + \varepsilon \leq \sigma \leq 3 + 4L - \varepsilon$ nach sich. Da sie ferner in $0 \leq \sigma \leq 1$ – wie gesehen – mit $\Xi(s)$ übereinstimmt, so folgt aufgrund der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung die Übereinstimmung der genannten Entwicklung mit $\Xi(s)$ in $-2 - 4L < \sigma < 3 + 4L$.
Die zu zeigende gleichmäßige Konvergenz der in $0 \leq \sigma \leq 1$ mit $\Xi(s)$ übereinstimmenden Reihe $\xi_L(s) := 4\sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m}(R_{L,m,0}(3-s) + R_{L,m,0}(2+s))$ im Streifen $-2 - 4L + \varepsilon \leq \sigma \leq 3 + 4L - \varepsilon$ folgt mit Hilfe der eingangs gewonnenen (recht scharfen; in gewissem Sinne sogar optimalen) Ungleichung $(*)$ für die $R_{L,m,0}$ – und ferner mittels Lemma 10, (xi) – nun aber in fast trivialer Weise:

$$\Big|\beta_{2m}(R_{L,m,0}(3-s) + R_{L,m,0}(2+s))\Big| \leq |\beta_{2m}| \Big[|R_{L,m,0}(3-s)| + |R_{L,m,0}(2+s)| \Big]$$

$$< 20 \, \frac{4^m}{(2m+1)!} exp\Big(-(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)} \Big)$$

$$\cdot \frac{\zeta(2L+2m+2)}{2^{2L+2m}} \frac{(2L+2m+2)!}{(2L)!} \left[\frac{1}{|(3-\sigma+4L)^1|} + \frac{1}{|(2+\sigma+4L)^1|} \right].$$

Da nun nach Voraussetzung $|(3-\sigma+4L)| \geq \varepsilon$, $|(2+\sigma+4L)| \geq \varepsilon$ und ferner $\zeta(2L+2m+2) \leq \zeta(2) = \pi^2/6$ ist, ist dies wiederum kleiner als

$$\frac{70}{4^L \cdot (2L)! \cdot \varepsilon} \cdot \frac{(2L+2m+2)!}{(2m+1)!} \, exp\Big(-(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)}\Big).$$

Die (evidente) Konvergenz der zugehörigen, von s unabhängigen Majorantenreihe sichert nun die zu zeigende gleichmäßige Konvergenz – allerdings erst im (geschmälerten) Streifen $-2-4L+\varepsilon \leq \sigma \leq 3+4L-\varepsilon$. Die Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ aber erledigt den Rest.
In ganz analoger Weise läßt sich mittels $(*)$ auch die gleichmäßige Konvergenz der durch (zunächst nur) formales gliedweises n-maliges Ableiten (nach s) der Entwicklung für Ξ entstehenden (Doppel-) Reihe nachweisen, womit schließlich auch die letzte Teilaussage von (i) folgt;
(einziger Unterschied: anstelle von $2/\varepsilon$ tritt $2/\varepsilon^{n+1}$ auf).
ii) Ausgehend von (i) sind die beiden in

$$\left|\Xi^{(n)}(s) - n!\sum_{m=0}^{M} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=L}^{\Lambda} \ldots\right| = \left| n!\sum_{m=0}^{M} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=\Lambda+1}^{\infty} \ldots + n!\sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=L}^{\infty} \ldots\right|$$

$$\leq 4\cdot n! \left|\sum_{m=0}^{M} \beta_{2m}\Big(R_{\Lambda+1,m,n}(3-s) + (-1)^n R_{\Lambda+1,m,n}(2+s)\Big)\right|$$

$$+ 4\cdot n! \left|\sum_{m=M+1}^{\infty} \beta_{2m}\Big(R_{L,m,n}(3-s) + (-1)^n R_{L,m,n}(2+s)\Big)\right|$$

auftretenden Summanden abzuschätzen: zunächst ist (vgl. Beweis von (i))

$$4\cdot n! \left|\sum_{m=0}^{M} \beta_{2m}\Big(R_{\Lambda+1,m,n}(3-s) + (-1)^n R_{\Lambda+1,m,n}(2+s)\Big)\right|$$

$$< 4\cdot n! \sum_{m=0}^{M} 20 \, \frac{4^m}{(2m+1)!} exp\Big(-(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)}\Big)$$

$$\cdot \frac{\zeta(2\Lambda+2m+4)}{2^{2\Lambda+2m+2}} \frac{(2\Lambda+2m+4)!}{(2\Lambda+2)!} \left[\frac{1}{(7-\sigma+4\Lambda)^{n+1}} + \frac{1}{(6+\sigma+4\Lambda)^{n+1}}\right]$$

$$< \frac{n!}{4^\Lambda} \frac{(2\Lambda+2M+4)!}{(2\Lambda+2)!} \left[\frac{1}{(7-\sigma+4\Lambda)^{n+1}} + \frac{1}{(6+\sigma+4\Lambda)^{n+1}}\right]$$

$$\cdot 20\zeta(4) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{exp\Big(-(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)}\Big)}{(2m+1)!},$$

wobei für die rechts stehende Reihe $20\zeta(4)\sum_{m=0}^{\infty} \ldots < 9$ gilt.

Erklärt man $\rho(L,M)$ wie oben, so gewinnt man schließlich entsprechend

$$4\cdot n!\left|\sum_{m=M+1}^{\infty}\beta_{2m}\Big(R_{L,m,n}(3-s)+(-1)^nR_{L,m,n}(2+s)\Big)\right|$$

$$<4\cdot n!\sum_{m=M+1}^{\infty}20\,\frac{4^m}{(2m+1)!}exp\Big(-(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)}\Big)$$

$$\cdot\frac{\zeta(2L+2m+2)}{2^{2L+2m}}\,\frac{(2L+2m+2)!}{(2L)!}\left[\frac{1}{(3-\sigma+4L)^{n+1}}+\frac{1}{(2+\sigma+4L)^{n+1}}\right]$$

$$<\frac{90\cdot n!}{4^L\cdot(2L)!}\left[\frac{1}{(3-\sigma+4L)^{n+1}}+\frac{1}{(2+\sigma+4L)^{n+1}}\right]\cdot\rho(L,M)\,.$$

Bemerkung:

Satz 3, (i) liefert einen neuartigen Reihenausdruck zur Gewinnung von Entwicklungen einiger mit der Funktion Ξ in Beziehung stehender Konstanten; Satz 3, (ii) ermöglicht darüber hinaus eine numerische Fehlerabschätzung. Insbesondere für einige Funktionswerte von Ξ, Ξ' und Ξ'' bei $s\in\{0,\frac{1}{2},1,2,3\}$ sollen – mit Hilfe das Rechenprogramms Maple – Näherungen mit einem Fehler von (ca.) 10^{-4} angegeben werden.
Hervorzuheben ist freilich, daß die Ermittlung numerischer Näherungen für $\Xi^{(n)}(s)$ auf diese Weise nicht sehr effizient ist, da die Genauigkeit dieses Verfahrens etwa mittels geeigneter Integralquadraturverfahren in jedem Einzelfall deutlich übertroffen werden kann. So läßt sich (z.B.) die aus der Funktionalgleichung von Φ und aus der im Anschluß an den Beweis von Lemma 3 bemerkten Beziehung $\Xi(s)=\int_0^1(x^{(1-s)/2}+x^{s/2})\,\Phi(x)dx$ leicht folgende (und offenbar rasch konvergente) Entwicklung

$$\Xi^{(n)}(s)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}2\pi k^2\int_0^1\Big(log\,x\Big)^n\Big[(-1)^nx^{\frac{1-s}{2}}+x^{\frac{s}{2}}\Big]\,\frac{2\pi k^2-3x}{x^{\frac{7}{2}}\,exp\,(\pi k^2/x)}\,dx$$

heranziehen, um gute Näherungen zu gewinnen; (die hierin auftretenden Integrale sind jedoch *nicht geschlossen auswertbar* und die genannte Beziehung ist somit nur vom numerischen Standpunkt von Interesse.)
Eine Alternative zur Gewinnung schärferer Schranken besteht übrigens auch in der Möglichkeit, die (Doppel-) Reihe aus Satz 3, (i) einer geeigneten Reihentransformation mit dem Ziel einer Konvergenzbeschleunigung zu unterwerfen. Die Frage allein nach der Existenz einer solchen "geeigneten" Transformation und alles Weitere aber soll hier nicht erörtert werden und daher wird Satz 3, (ii) (fast) unverändert zugrundegelegt.

Um nicht mit zu umfangreichen Partialsummen rechnen zu müssen, soll allerdings zunächst noch eine (deutlich) verbesserte Abschätzung für die Werte von β_0 bis β_{600} angegeben werden, deren Gültigkeit man leicht mittels Lemma 10, (x) und einem Rechenprogramm verifiziert:
Für $m \in \{0, ..., 300\}$ gilt (vgl. eine Bemerkung im Anschluß an den Beweis von Lemma 10)

$$|\beta_{2m}| < \frac{2^{2m+1}}{(2m+1)!}\, exp\Big(-\sqrt{\pi(2m+1)}\Big)\,.$$

Hiermit folgt – analog wie bei der Herleitung von Satz 3, (ii) –, daß die dort angegebene obere Schranke für $|\Xi^{(n)}(s) - n! \sum_{m=0}^{M} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=L}^{\Lambda} ...|$ im Falle $M \in \{0, ..., 600\}$ ersetzt werden kann durch den Ausdruck

$$\frac{9\cdot n!}{4^\Lambda}\frac{(2\Lambda+2M+4)!}{(2\Lambda+2)!}\left[\frac{1}{(7-\sigma+4\Lambda)^{n+1}}+\frac{1}{(6+\sigma+4\Lambda)^{n+1}}\right]$$
$$+\frac{9\cdot n!}{4^L(2L)!}\left[\frac{1}{(3-\sigma+4L)^{n+1}}+\frac{1}{(2+\sigma+4L)^{n+1}}\right]$$
$$\cdot\left[\sum_{m=M+1}^{600}\frac{(2L+2m+2)!}{(2m+1)!}e^{-\sqrt{\pi(2m+1)}}+10\sum_{m=601}^{\infty}\frac{(2L+2m+2)!}{(2m+1)!}e^{-(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)}}\right].$$

<u>Zu $\Xi(0) = \Xi(1)$:</u>

Zwar ist $\Xi(0) = \Xi(1) = 1$ ("exakt") bekannt, doch läßt sich dieser Wert – gewissermaßen als Probe – auch mittels Satz 3 approximieren:
Wählt man $s = 0$, $n = 0$, $M = 50$, $L = 0$, so ist

$$\Delta_{L,M,n}(s) := \frac{9\cdot n!}{4^L(2L)!}\left[\frac{1}{(3-\sigma+4L)^{n+1}}+\frac{1}{(2+\sigma+4L)^{n+1}}\right]$$
$$\cdot\left[\left(\sum_{m=M+1}^{600}e^{-\sqrt{\pi(2m+1)}}+10\sum_{m=601}^{\infty}e^{-(2-\sqrt{2})\sqrt{\pi(2m+1)}}\right)\frac{(2L+2m+2)!}{(2m+1)!}\right]<0.88\cdot 10^{-4},$$

und wählt man noch $\Lambda = 520$, so fällt desweiteren

$$\tilde{\Delta}_{\Lambda,L,M,n}(s) := \frac{9\cdot n!}{4^\Lambda}\frac{(2\Lambda+2M+4)!}{(2\Lambda+2)!}\left[\frac{1}{(7-\sigma+4\Lambda)^{n+1}}+\frac{1}{(6+\sigma+4\Lambda)^{n+1}}\right]$$

$< 0.07 \cdot 10^{-4}$ aus; somit ist

$$\left|\Xi(0) - \sum_{m=0}^{50}\frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}}\sum_{l=0}^{520}...\right| \approx \Big|\Xi(0) - 1.0000000288\Big| < 0.95\cdot 10^{-4}.$$

(Zum Vergleich: $\sum_{m=0}^{10} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=0}^{520} ... \approx 0.99970177(70)$,
$\sum_{m=0}^{30} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=0}^{520} ... \approx 1.000000330(4)$.)

Zu $\Xi(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}\zeta(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})/\pi^{\frac{1}{4}} \approx$ 0.994241556(4):

Wählt man $s = \frac{1}{2}$, $n = 0$, $M = 50$, $L = 0$, so ist $\Delta_{L,M,n}(s) < 0.85 \cdot 10^{-4}$; bei Wahl (wiederum) von $\Lambda = 520$ ist ferner $\tilde{\Delta}_{\Lambda,L,M,n}(s) < 0.07 \cdot 10^{-4}$, und somit

$$\left|\Xi\left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{m=0}^{50} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=0}^{520} ...\right| \approx \left|\Xi\left(\frac{1}{2}\right) - 0.994241644(3)\right| < 0.92 \cdot 10^{-4}.$$

(Zum Vergleich: $\sum_{m=0}^{10} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=0}^{520} ... \approx 0.993531406(8)$,
$\sum_{m=0}^{30} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=0}^{520} ... \approx 0.994242313(5)$.)

Zu $\Xi(2) = \pi/3 \approx$ 1.047197551(2):

Bei Wahl von $s = 2$, $n = 0$, $M = 52$, $L = 0$ ist $\Delta_{L,M,n}(s) < 0.982 \cdot 10^{-4}$; im Falle $\Lambda = 545$ ferner $\tilde{\Delta}_{\Lambda,L,M,n}(s) < 0.011 \cdot 10^{-4}$ und damit

$$\left|\Xi(2) - \sum_{m=0}^{52} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=0}^{545} ...\right| \approx \left|\Xi(2) - 1.04719429(40)\right| < 1.0 \cdot 10^{-4}.$$

(Zum Vergleich: $\sum_{m=0}^{10} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=0}^{545} ... \approx 1.057653230(9)$,
$\sum_{m=0}^{30} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=0}^{545} ... \approx 1.04718747(40)$.)

Zu $\Xi(3) = 3\zeta(3)/\pi \approx$ 1.147879788(1):

Ist $s = 3$, $n = 0$, $M = 130$ und (diesmal) $L = 1$, so $\Delta_{L,M,n}(s) < 1.98 \cdot 10^{-4}$, und im Falle $\Lambda = 1535$ ferner $\tilde{\Delta}_{\Lambda,L,M,n}(s) < 0.00006 \cdot 10^{-4}$. Somit folgt

$$\left|\Xi(3) - \sum_{m=0}^{130} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=1}^{1535} ...\right| \approx \left|\Xi(3) - 1.1478797754\right| < 2.0 \cdot 10^{-4}.$$

(Zum Vergleich: $\sum_{m=0}^{10} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=1}^{1535} ... \approx 1.0255363187$,
$\sum_{m=0}^{30} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=1}^{1535} ... \approx 1.1479021424$,
$\sum_{m=0}^{100} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=1}^{1535} ... \approx 1.147880098(4)$.)

(Im Falle größerer L findet (offenbar) schlechtere Konvergenz statt.)

Zu $\Xi'(0) = -\Xi'(1) = \ln(2\sqrt{\pi}) - 1 - \gamma/2 \approx$ −0.02309570(90):

Ist $s = 0$ und $n = 1$, so findet man entsprechend

$$\left|\Xi'(0) - \sum_{m=0}^{43} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=0}^{445} ...\right| \approx \left|\Xi'(0) + 0.0230962367\right| < 0.97 \cdot 10^{-4}.$$

(Zum Vergleich: $\sum_{m=0}^{10} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=0}^{445} ... \approx -0.024985696(3)$,
$\sum_{m=0}^{30} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=0}^{445} ... \approx -0.023093747(4)$.)

Zu Ξ'($\frac{1}{2}$):

Im Falle $s = \frac{1}{2}$, $n = 1$ erübrigt sich jede Fehlerabschätzung, da $\Xi'(\frac{1}{2}) = 0$ (und auch jede Partialsumme $\sum_{m=0}^{M} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=0}^{L} ... = 0$) ist.

Zu Ξ"(0) = Ξ"(1) = Ξ'(0)^2+π^2/8−γ^2−2γ_1−1 ≈ 0.046687729(1):

Ist schließlich $s = 0$ und $n = 2$, so gilt

$$\left|\Xi''(0) - \sum_{m=0}^{43} \frac{\beta_{2m}}{4^{m-1}} \sum_{l=0}^{435} ...\right| \approx \left|\Xi''(0) - 0.046691159(4)\right| < 1.0 \cdot 10^{-4}.$$

(Zum Vergleich: $\sum_{m=0}^{10} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=0}^{435} ... \approx 0.0525176804$,
$\sum_{m=0}^{30} \beta_{2m}/4^{m-1} \sum_{l=0}^{435} ... \approx 0.0466816716$.)

Eine Näherung für $\Xi^{(n)}(s)$ für $s \notin \{0, 1\}$ und für $n \geq 2$ gibt das Rechenprogramm Maple übrigens nicht aus, während Satz 3 unabhängig von s und n stets Approximationen liefert; die Anzahl der zu erfassenden Summanden wächst freilich bei Wahl größerer s und n deutlich an.

(Die angeführten Näherungen wurden mit Hilfe des genannten Programms stets auf 10 Nachkommastellen genau angegeben, wobei durch Aufrunden in der elften Stelle veränderte Ziffern in Klammern gesetzt wurden.)

Bemerkung:

Satz 3, (i) läßt sich entnehmen die bedingte Konvergenz der gewonnenen Entwicklung für Ξ; genauer: (formales) Vertauschen der Summationsreihenfolge führt auf einen Ausdruck, der Satz 3, (i) zufolge $\equiv 0$ ist.
Ein amüsantes Beispiel für eine weitere Doppelreihe mit dieser bemerkenswerten Eigenschaft liefert die wie folgt definierte ("Doppel"-) Folge:

$$a_{m,n} := \begin{cases} \dfrac{1}{2^m} & \text{für } n = 0\,, \\ \dfrac{4^n - 1}{3 \cdot 2^{m+n}} & \text{für } m \geq n > 0\,, \\ -\dfrac{2 \cdot 4^m + 1}{3 \cdot 2^{m+n}} & \text{für } m < n\,. \end{cases}$$

Für diese Folge gilt, wie man sehr leicht mittels geometrischer Summenformel sieht, $\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,0} = 1$, während $\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = 0$ für jedes $n \geq 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = 0$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ ist.
Damit aber folgt sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = 1$, als auch $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = 0$.

Bemerkung:

Abschließend noch ein Wort zur Möglichkeit der Übertragung von Satz 3 (incl. der zugehörigen Hilfssätze) auf beliebige L-Reihen $L(s,\chi)$ (χ: ein Dirichletscher Charakter $mod\, f$), bzw. auf die "vervollständigten L-Funktionen"

$$\xi(s,\chi) := \left(\frac{f}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s,\chi)$$

($\delta := 0$ bzw. 1, falls $\chi(-1) = 1$ bzw. -1; vgl. [Barner], Par. 15, Gl.'en (5) und (29)): Eine Lemma 4 analoge Aussage läßt sich zunächst auch für die dem Charakter χ ($mod\, f$) zugeordnete Thetareihe

$$F(x,\chi) := \sum_{k=1}^{\infty} \chi(k)\, k^{\delta} e^{-\frac{\pi k^2 x}{f}} \qquad (Re\, x > 0)$$

(vgl. [Barner], Par. 15, Gl. (16)) gewinnen, was grob skizziert werden soll. So gilt im Falle $\delta = 0$ für die Fouriercosinustransformierte φ_+ von F:

$$\begin{aligned}\varphi_+(w,\chi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(x,\chi)\, cos\, wx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{w^{2l}}{(2l)!} \int_0^{\infty} x^{2l} F(x,\chi)\, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{f}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{wf}{\pi}\right)^{2l} L(4l+2,\chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{f}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{wf}{\pi}\right)^{2l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^{4l+2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{f}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^2} \frac{(\pi\, m^2)^2}{(wf)^2 + (\pi\, m^2)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f \sum_{k=1}^{f} \chi(k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(fl+k)^2}{(wf)^2 + \pi^2 (fl+k)^4}.\end{aligned}$$

Mittels Partialbruchzerlegung letztgenannten Quotientens gelingt schließlich die geschlossene Summation der Reihe (über m) (vgl. Beweis von Lemma 4), womit $\varphi_+(w,\chi)$ auf eine endliche Summe zurückgeführt ist. (Im Falle $\delta = 1$ verläuft die Rechnung im wesentlichen analog, wobei die Rechtfertigung der Vertauschung $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty}$ – wegen nur bedingter Konvergenz – allerdings aufwendiger zu zeigen ist.)

Nunmehr betrachte man $Q(w,\chi) := \varphi_+(w,\chi) \cdot sinh(fw)/w$, welche Funktion sich nach stetiger Ergänzung in den Definitionslücken als *ganze* Funktion erweist (vgl. Lemma 10, (ix)). Somit existiert eine in ganz $\mathbb{C}$ gültige (und Lemma 10, (x) analoge) Entwicklung $Q(w,\chi) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m}^{(\chi)} w^{2m}$, sodaß $F(x,\chi) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m}^{(\chi)} \mathcal{F}(w^{2m+1}/sinh(fw))$ folgt (vgl. Lemma 11, (iii)).

Eine detaillierte Erörterung der aufgeworfenen Frage, insbesondere jener nach Übertragbarkeit der Lemmata 6 und 8 auf den allgemeineren Fall, ist aber mit erheblichem Aufwand verbunden und soll daher unterbleiben.

Abschnitt III

Im Folgenden soll es um das angekündigte charakterisierende Kriterium für über $\mathbb{R}_0^+$ nicht verschwindende Polynome nebst Verwandtem gehen:

<u>**Definition:**</u>
Sind f, g beliebige ganze Funktionen, so sollen sie einander 'positivierend' heißen, wenn alle Koeffizienten der Taylorentwicklung von $f(x) \cdot g(x)$ um $x = 0$ reell und nichtnegativ sind und $f(0) \cdot g(0) > 0$ ist.

<u>**Lemma 12:**</u>
Ist $p_2(x) := x^2 + a\,x + b$ ein reelles quadratisches Polynom mit Nullstellen $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}_0^+$, so existiert ein p_2 positivierendes Polynom q. Ist ferner $x_0 \in \mathbb{R}^+$ beliebig, so ist bei genügend großer Wahl von $n \in \mathbb{N}$ das durch $q_{n,x_0}(x) := (x + x_0)^n$ definierte Polynom q_{n,x_0} ein p_2 positivierendes.

<u>**Beweis:**</u>
Die Nullstellen $x_{1/2}$ von p_2 lauten zunächst $x_{1/2} = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}$. Wäre darin $b \le 0$, so implizierte dies sofort die Existenz einer Nullstelle in $\mathbb{R}_0^+$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $b > 0$ anzunehmen.
<u>1. Fall:</u> $a \ge 0$. Dann ist $q_{0,x_0}(x) \equiv 1$ ein p_2 positivierendes Polynom.
<u>2. Fall:</u> $a < 0$. Wäre $b \le a^2/4$, so auch $x_2 = -a/2 + \sqrt{a^2/4 - b} \ge -a/2 > 0$ erneut im Widerspruch zur Voraussetzung. Es folgt $x_{1/2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Nun ist für (vorerst) beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$p_2(x) q_{n,x_0}(x) = (x^2 + a\,x + b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} x^k$$

$$= b\,x_0^n + (a\,x_0^n + b\,n\,x_0^{n-1})x + (n\,x_0 + a)x^{n+1} + x^{n+2}$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \frac{n!\,x_0^{n-k}}{k!(n-k+2)!} \Big[k(k-1)x_0^2 + a\,k(n-k+2)x_0 + b(n-k+2)(n-k+1)\Big] x^k.$$

Hierbei gilt für die Koeffizienten vor x^0, x^1, x^{n+1}: $b\,x_0^n > 0$, desweiteren $a\,x_0^n + b\,n\,x_0^{n-1} \ge 0$ für $n \ge -a\,x_0/b$ und $n\,x_0 + a \ge 0$, falls $n \ge -a/x_0$.

Ferner ist

$f_{n,x_0,a,b}(k) := k(k-1)x_0^2 + a\,k(n-k+2)x_0 + b(n-k+2)(n-k+1)$
$= (x_0^2 - a\,x_0 + b)k^2 + (2\,a\,x_0 + a\,x_0\,n - x_0^2 - 2\,b - 2\,b\,n)k + (b\,n^2 + 2\,b + 3\,b\,n)$
eine quadratische Form in k mit der Diskriminante

$\delta_{n,x_0,a,b} := (2\,a\,x_0 + a\,x_0\,n - x_0^2 - 3\,b - 2\,b\,n)^2 - 4(x_0^2 - a\,x_0 + b)(b\,n^2 + 2\,b + 3\,b\,n)$
$= x_0^2(a^2 - 4\,b)\,n^2 + x_0(4\,a^2 - 2\,a\,b - 2\,a\,x_0^2 - 8\,b\,x_0)\,n$
$\qquad + (4\,a^2 x_0^2 + b^2 + x_0^4 - 4\,a\,x_0\,b - 4\,a\,x_0^3 - 2\,b\,x_0^2).$
Nun hat die Diskriminante *dieser* quadratischen Form *in* n den Wert

$$\Delta_{x_0,a,b} := 16\,b\,x_0^2(x_0^2 - a\,x_0 + b)^2 \ ,$$

womit sofort $\Delta_{x_0,a,b} > 0$ geklärt ist, denn es gilt $a < 0$, $b > 0$ und $x_0 > 0$ nach Voraussetzung. Daher ist auch $x_0^2 - a\,x_0 + b > 0$.
Somit existieren zwei *reelle* n_1, n_2 $(n_1 \neq n_2)$ mit $\delta_{n_1,x_0,a,b} = \delta_{n_2,x_0,a,b} = 0$; sie lauten

$$n_{1/2} = \frac{2\,a^2 - a\,b - a\,x_0^2 - 4\,b\,x_0 \pm 2\sqrt{b}\,(x_0^2 - a\,x_0 + b)}{x_0(4\,b - a^2)} \ .$$

Da der Koeffizient vor n^2 in der Form $\delta_{n,x_0,a,b}$, nämlich $x_0^2(a^2 - 4\,b)$, negativ ist (s.o.), nimmt $\delta_{n,x_0,a,b}$ im Intervall (n_1, n_2) positive Werte an, während in $(-\infty, n_1) \cup (n_2, \infty)$ die Werte von $\delta_{n,x_0,a,b}$ negativ ausfallen. Insbesondere also ist die Form $f_{n,x_0,a,b}(k)$ für alle $n > n_2$ *ausschließlich* positiver Werte fähig, da sie dann sowohl eine negative Diskriminante (und somit keine reellen Nullstellen) besitzt als auch ihr führender Koeffizient, nämlich der Faktor $(x_0^2 - a\,x_0 + b)$ vor k^2, wie gesehen, positiv ist. Kurzum :

$$f_{n,x_0,a,b}(k) \geq 0 \quad \text{für alle } k \in I\!R,$$

wenn $n \geq n_2(x_0, a, b) := (2a^2 - ab - ax_0^2 - 4bx_0 + 2\sqrt{b}\,(x_0^2 - ax_0 + b))/(x_0(4b - a^2))$.
Ist nun schließlich

$$n_0 := max\left(-\frac{a}{b}\,x_0 \ , \ -\frac{a}{x_0} \ , \ n_2(x_0, a, b)\right) \ ,$$

so ist für alle $n \in I\!N$ mit $n \geq n_0 : p_2(x) \cdot q_{n,x_0}(x) = (x^2 + a\,x + b)(x + x_0)^n$ ein Polynom mit ausschließlich nichtnegativen Koeffizienten, d.h. $(x + x_0)^n$ ein p_2 positivierendes Polynom. Damit ist Lemma 12 gezeigt.

Bemerkung:
Lemma 12 sichert die Existenz einer gleich überabzählbaren Menge von p_2 positivierenden Polynomen q_{n,x_0}. Zunächst lediglich *ein einziges* p_2 positivierendes Polynom q, jedoch eines von gänzlich anderer Struktur, läßt sich mittels einer durch eine homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten rekursiv definierten Zahlenfolge konstruieren: Im allein interessanten Fall $a < 0$, $b > 0$ ($\Rightarrow a^2 - 4\,b < 0$, s.o.) sei die Folge $\{u_n\}_{n \in I\!N}$ rekursiv definiert vermöge

$$u_0 := 1 \ \ , \ u_1 := -\frac{a}{b} \ \ , \ u_n := \frac{-au_{n-1} - u_{n-2}}{b} \quad (n \geq 2) \ .$$

Der Ansatz $u_n = \lambda^n$ liefert $\lambda_{1/2} = (-a \pm \sqrt{a^2-4b})/2b \Rightarrow u_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ (vgl. [Meschkowski]; Kap. I, 3), wobei sich C_1, C_2 aus $u_0 = 1$, $u_1 = -a/b$ bestimmen lassen zu $C_{1/2} = 1/2 \pm a\,i/2\sqrt{4b - a^2}$.
Mit

$$\left|\lambda_{1/2}\right| = \sqrt{\frac{1}{b}} \ , \qquad \varphi := arg\,(\lambda_1) \ = \ arctan\sqrt{\frac{4b}{a^2} - 1}$$

folgt sofort

$$u_n = b^{-\frac{n}{2}} \left[cos\, n\varphi \ - \ \frac{a}{\sqrt{4b - a^2}} sin\, n\varphi \right] .$$

Nun sei $n_0 := min\{n \in I\!N | u_n > 0\,,\, u_{n+1} \leq 0\}$, welche Zahl im vorliegenden Falle $a < 0$ ($\Rightarrow 4b > a^2$, s.o.) existiert und somit wohldefiniert ist, denn aus der letztgenannten *reellen* Darstellung von u_n geht hervor: u_n wechselt (sogar unendlich oft) das Vorzeichen.
Das Polynom $q(x) := \sum_{n=0}^{n_0} u_n x^n$ ist nun ein p_2 positivierendes!
Begründung: $q(x) \cdot p_2(x) = (u_0 + u_1 x + \ \ldots \ u_{n_0} x^{n_0})(b + a\,x + x^2)$ ist ein Polynom vom Grad $n_0 + 2$, dessen Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots \ , \alpha_{n_0}$ vor den Monomen $x^1, x^2, \ \ldots \ , x^{n_0}$ durchweg gleich Null sind, denn für diese gilt $\alpha_1 = b\,u_1 + a\,u_0 = b \cdot (-a/b) + a \cdot 1 = 0$, bzw. $\alpha_n = b\,u_n + a\,u_{n-1} + u_{n-2} = 0$ für $n = 2, ..., n_0$ nach Voraussetzung. Für die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_{n_0+1}, \alpha_{n_0+2}$ vor den Monomen $x^0, x^{n_0+1}, x^{n_0+2}$ von $q(x) \cdot p_2(x)$ hingegen gilt

$$\begin{aligned} & \alpha_0 \quad = u_0 b = b > 0, \\ & \alpha_{n_0+1} = a\,u_{n_0} + u_{n_0-1} \geq b \cdot u_{n_0+1} + a\,u_{n_0} + u_{n_0-1} = 0 \\ & \text{(da nach Definition von } n_0 : u_{n_0+1} \leq 0 \text{ ist)}, \\ \text{bzw.} \quad & \alpha_{n_0+2} = u_{n_0} > 0, \text{ ebenfalls nach Definition von } n_0, \end{aligned}$$

womit in der Tat q als weiteres p_2 positivierendes Polynom erkannt ist.

Eine interessante Folgerung aus Lemma 12 beinhaltet

Korollar 1:
Ist p ein beliebiges Polynom vom Grad n mit Nullstellen $x_1, \dots, x_n \notin I\!R_0^+$, so existiert ein p positivierendes Polynom q.

Beweis:
Besitzt $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ keine Nullstellen in $I\!R_0^+$, so auch weder das "konjugierte" Polynom $\overline{p}(x) := (x-\overline{x}_1)(x-\overline{x}_2)\dots(x-\overline{x}_n)$, noch das Produkt

$$p(x) \cdot \overline{p}(x) = \prod_{i=1}^{n} \Big(x^2 - (x_i + \overline{x}_i)x + x_i\overline{x}_i \Big)$$

der beiden, und damit besitzt auch keines der hierin auftretenden quadratischen Polynome (mit *reellen* Koeffizienten) Nullstellen in $I\!R_0^+$, womit – Lemma 12 zufolge – zu jedem dieser n quadratischen Polynome ein positivierendes Polynom q_i $(i = 1, ..., n)$ existiert. Das Produktpolynom all dieser q_i mit $\overline{p}$, also

$$q(x) := \overline{p}(x) \cdot \prod_{i=1}^{n} q_i(x)$$

ist dann ein $p(x)$ positivierendes Polynom, womit das Korollar gezeigt ist.

Hieraus ergibt sich desweiteren sehr einfach das folgende Korollar, welches in Satz 4 (s.u.) eine Verallgemeinerung auf eine gewisse Klasse *ganzer* Funktionen erfahren wird:

Korollar 2:
Ein Polynom p besitzt genau dann keine Nullstellen in $I\!R_0^+$, wenn ein p positivierendes Polynom q existiert.

Beweis:
Besitzt p keine Nullstellen in $I\!R_0^+$, so existiert Korollar 1 zufolge ein p positivierendes Polynom q.
Existiert aber ein p positivierendes Polynom q, so führt die Annahme der Existenz einer Nullstelle $x_0 \geq 0$ von p sofort zum Widerspruch, da auch $p(x_0) \cdot q(x_0) = 0$ wäre, obwohl doch $p(0) \cdot q(0) > 0$ nebst $p \cdot q : I\!R \mapsto I\!R$ wäre und $p \cdot q$ über $I\!R^+$ monoton anstiege.

Zwei Beispiele:
1.) $p(x) := x^4 - 2x^3 + 2$ scheint – wie ein Blick auf den Funktionsgraphen vermuten läßt – keine Nullstellen in $\mathbb{R}_0^+$ zu haben und mithin müßte ein p positivierendes Polynom exisieren.
In der Tat ist (z.B.) $q(x) := (x+1)^{148}$ ein solches, wie man leicht (erneut) etwa mittels des Programms Maple verifiziert.
2.) $p(x) = 5+6x+3x^2-4x^3+2x^4+x^5$ scheint gleichfalls über $\mathbb{R}_0^+$ nicht zu verschwinden; hier ist $q(x) := x^2+x+2$ ein p positivierendes Polynom, wie man leicht bestätigt: $p(x)q(x) = x^7+3x^6+0\,x^5+3x^4+x^3+17x^2+17x+10$.
(Ein p positivierendes *lineares* Polynom kann übrigens *nicht* existieren, da $p(x)$ mit $(x+k)$ multipliziert ein Polynom ergibt, dessen Koeffizienten vor x^3 bzw. x^4 : $-4k+3$ bzw. $2k-2$ lauten, welche beiden Ausdrücke für gegebenes $k \in \mathbb{R}$ niemals zugleich ≥ 0 werden. Der Minimalgrad aller p positivierenden Polynome ist also 2.)

Bemerkung:
Es liegt nahe, zu fragen, ob sich Korollar 1 (bzw. 2) auf beliebige *ganze* Funktionen ausweiten läßt. Klar – weil trivial – ist von vornherein die Implikation "Existenz einer f positivierenden Funktion $g \Rightarrow f(x) \neq 0$ in $\mathbb{R}_0^+$".
Bevor mit Satz 4 eine Teilantwort auf die Frage nach der *Umkehrung* gegeben wird, sollen aber zunächst noch zwei weitere solcher Möglichkeiten der Verallgemeinerung angesprochen werden:
1.) Es läßt sich fragen, ob analoge Aussagen auch für Polynome p gelten, die z.B. über beliebigen Halbgeraden in $\mathbb{C}$ nicht verschwinden.
Ist etwa $\gamma(t) := z_0 + e^{i\varphi}t$ $(z_0 \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}_0^+,\ \varphi \in [0, 2\pi))$ die Parametrisierung einer solchen Halbgeraden, so braucht anstelle von p lediglich das vermöge $p_\gamma(x) := p(\gamma(x)) := p(z_0 + e^{i\varphi}x)$ (nun $x \in \mathbb{C}$) erklärte Polynom p_γ betrachtet werden, auf welches nun die gewonnenen Resultate anwendbar sind. (Und anstelle von Halbgeraden lassen sich ferner auch Wege in $\mathbb{C}$ von viel allgemeinerer Form betrachten.)
2.) Bisher wurden stets lediglich Polynome $p : \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}$ verwendet; doch auch $\mathbb{C}^n$ mit $n > 1$ läßt sich als Urbildraum zugrundelegen.

Im folgenden aber soll der eingangs genannten Frage nachgegangen werden; zum Nachweis des Korollar 1 auf eine gewisse Klasse von ganzen Funktionen verallgemeinernden Satzes 4 ist zuvor noch zu zeigen

Lemma 13:
Unter den Voraussetzungen des Lemmas 12 existiert $c := 1/(2\sqrt{b}+a)$; ferner ist $g(x) := e^{cx}$ eine p_2 positivierende Funktion.

Beweis:
Im allein interessanten Fall $a < 0$ ist $2\sqrt{b}+a > 0$, da $a^2/4 < b$.
Für die Taylorkoeffizienten γ_k von $p_2(x)e^{cx}$ bei Entwicklung um $x=0$ gilt nun $\gamma_0 = b > 0$, $\gamma_1 = b\,c + a = ... = (\sqrt{b}+a)^2/(2\sqrt{b}+a) \geq 0$, nebst $\gamma_k = ... = c^{k-2}/k! \cdot \Big(k - b/(2\sqrt{b}+a)\Big)^2 \geq 0$ (für $k \geq 2$), denn $2\sqrt{b}+a > 0$ (und somit auch $c > 0$) war bereits geklärt worden.

Nun schließlich zu

Satz 4:
Für beliebiges $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ sei $K_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, arg\, z \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \cup \{0\}$ der (in Null zentrierte und offene) Winkelbereich mit Öffnungswinkel 2ε.
Ist ferner f eine ganze Funktion mit (nach wachsendem Betrag geordneten) Nullstellen $x_1, x_2, ... \in \mathbb{C}$ derart, daß $S_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x_k|}$ konvergiert und $x_k \notin K_\varepsilon$ (für $k = 1, 2, ...$) ist, so existiert eine f positivierende Funktion g.

Beweis:
Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x_k|}$ impliziert zunächst: f ist – etwa [Smirnow], Kap. III, Abschnitt 69 zufolge – von der Form $f(x) = e^{g(x)} \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x/x_k)$; g ganz. Es folgt $f(x)\overline{f(\overline{x})} = e^{2g(x)} \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - (1/x_k + 1/\overline{x}_k)x + x^2/(x_k\overline{x}_k)\Big)$, wobei die gliedweise Multiplikation (analog zur für beliebige konvergente Reihen gültigen Gleichung $\sum a_k + \sum b_k = \sum(a_k + b_k)$; s.o.) klar ist.
Nun liefert Lemma 13: $h_k(x) = exp\Big(x/[2\sqrt{x_k\overline{x}_k} - (x_k + \overline{x}_k)]\Big)$ positiviert das Polynom $1 - (1/x_k + 1/\overline{x}_k)x + x^2/(x_k\overline{x}_k)$. Damit aber ist die Funktion $e^{-2g(x)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} h_k(x) = exp\Big(-2g(x) + \sum_{k=1}^{\infty} x/[2\sqrt{x_k\overline{x}_k} - (x_k + \overline{x}_k)]\Big)$ eine $f(x)\overline{f(\overline{x})}$ positivierende, sofern die genannte Reihe konvergiert.
Nun ist $|2\sqrt{x_k\overline{x}_k} - (x_k + \overline{x}_k)| = |2(|x_k| - Re\, x_k)| \geq 2(1 - cos\varepsilon)|x_k|$, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} x/(2\sqrt{x_k\overline{x}_k} - (x_k + \overline{x}_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} x/[2(1 - cos\varepsilon)|x_k|] =: S_\infty \cdot x/[2(1 - cos\varepsilon)]$.
Damit ist $G(x) := \overline{f(\overline{x})} \cdot exp\Big(-2g(x) + S_\infty \cdot x/[2(1 - cos\varepsilon)]\Big)$ als f positivierende Funktion erkannt und Satz 4 gezeigt.

Literaturverzeichnis

[**Barner**] : K. Barner, Einführung in die Analytische Zahlentheorie, Skriptum zur Vorlesung "Analytische Zahlentheorie" des Autors, gehalten im Wintersemester 1989/90 an der Gesamthochschule (Universität) Kassel.

[**Coppo**] : M.A. Coppo, Nouvelles expressions des constantes de Stieltjes, Expositiones Mathematicae 17, No. 4, 349-358 (1999).

[**Dilcher**] : K. Dilcher, On generalized gamma functions related to the Laurent coefficients of the Riemann zeta function, Aequationes Mathematicae 48, No. 1, 55-85 (1994).

[**Fichtenholz**] : G.M. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung, Teil II, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964.

[**Lerch**] : M. Lerch, Über die Bestimmung der Koeffizienten in der Potenzreihe für die Funktion $\zeta(s)$, Časopis 43, 511-522 (1914).

[**Meschkowski**] : H. Meschkowski, Differenzengleichungen, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1959.

[**Ryshik, Gradstein**] : I.M. Ryshik, I.S. Gradstein, Summen-, Produkt- und Integral-Tafeln, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957.

[**Smirnow**] : W.I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik, Teil III/2, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main 1995.

Inhalt

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren verwendet worden.