

Diplomarbeit

Fourieranalyse mit *Mathematica*

Lars Denkewitz, HTWK-Leipzig
Betreuer: Prof. Dr. Wolfram Koepf

16. April 2000

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 4 |
| 1.1 | Allgemeines | 4 |
| 1.2 | Grundton, Obertöne, Klangfarbe, Harmonische | 4 |
| 1.3 | Dynamik des Klages | 7 |
| 1.4 | Klangverarbeitung im Gehirn | 7 |
| 1.5 | Merkmale einer Schwingung | 8 |
| 1.6 | Motivation und Ziel | 8 |
| 2 | Theoretische Grundlagen | 10 |
| 2.1 | 2π -periodische Funktionen | 10 |
| 2.2 | Bestimmung der Koeffizienten der trigonometrischen Reihe | 12 |
| 2.3 | Die Fourierreihe in trigonometrischer Darstellung | 14 |
| 2.4 | Symmetriebetrachtungen | 22 |
| 2.4.1 | Gerade Funktionen | 22 |
| 2.4.2 | Ungerade Funktionen | 26 |
| 2.5 | $2p$ -periodische Funktionen | 28 |
| 2.6 | Zusammenfassen der Summanden mit gleicher Frequenz | 31 |
| 2.7 | Die Fourierreihe in komplexer Darstellung | 33 |
| 2.7.1 | Eigenschaften der komplexen Formulierung | 34 |
| 2.8 | Konvergenzbetrachtungen | 40 |
| 2.8.1 | Besselsche Ungleichung, Parsevalsche Gleichung | 40 |
| 2.8.2 | Dirichlet-Kerne | 44 |
| 2.8.3 | Beweis des Satzes von Dirichlet | 46 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3 | Das <i>Mathematica</i>-Paket <i>FTOOLS.M</i> | 49 |
| 3.1 | Die Palette <i>FOURIERPALETTE.NB</i> | 49 |
| 3.2 | Exakte Berechnungen | 50 |
| 3.2.1 | Syntaxbeschreibung | 51 |
| 3.3 | Verwendung von <code>Calculus`FourierTransform`</code> | 76 |
| 3.3.1 | Syntaxbeschreibung | 77 |
| 3.4 | Interaktive Eingabe | 84 |
| 4 | Zusammenfassung und Ausblick | 86 |
| A | Fourier-Entwicklung einfacher periodischer Funktionen | 87 |
| | Literaturverzeichnis | 103 |
| | Index | 104 |
| | Eidesstattliche Erklärung | 106 |

1 Einleitung

1.1 Allgemeines

Mittels Fourierreihen werden technische Probleme z. B. in der Mechanik, Elektrotechnik, Signaltheorie, Nachrichten- und Regelungstechnik, Zeitreihenanalyse beschrieben, überall dort, wo periodische Vorgänge untersucht werden.

Klänge in einem Konzertsaal werden durch Überlagerung vieler Instrumente erzeugt. Ein Klang ist ein akustisches Signal, also eine akustische Botschaft. Diese muß, um zum menschlichen Ohr zu gelangen, geeignet übertragen werden. Über den Schall, der sich im Medium Luft ausbreitet, wird dies gemeinhin ermöglicht. *»Physikalisch gesehen ist ein Klang eine mehr oder weniger regelmäßige Luftdruckschwankung. Von einem gewissen Zeitpunkt an und während einer bestimmten Dauer startet sie von einer Quelle (einem Instrument oder Lautsprecher) ... und breitet sich in der Luft als Wellenzug aus. Dieser wird ... vom Hörer als Luftdruckschwankung mit dem Ohr wahrgenommen«*[Mazzola90, S. 15/16]. Dieser Wellenzug wird auch Schallwelle genannt, denn *»unter Schall verstehen wir alles, was mit dem menschlichen Hörorgan wahrgenommen werden kann«*[Herrman83, S. 3]. Das Ohr im Zusammenwirken mit dem Gehirn zerlegt die als periodische Schalldruckfunktionen ankommenden Klänge in Einzelschwingungen, was als Signalanalyse bezeichnet wird.

1.2 Grundton, Obertöne, Klangfarbe, Harmonische

Schalldruckfunktionen sind also aus Einzelschwingungen zusammengesetzt, ein Klang besteht prinzipiell aus einem Grundton und verschiedenen Obertönen (Partialtöne). Ein Grundton hat eine Sinusform, und was umgangssprachlich als Ton bezeichnet wird, entspricht somit einer Kombination mehrerer Sinustöne, dem Grundton und den Obertönen, also einem Klang. Eine Sinuswelle läßt sich anhand von drei Eigenschaften vollständig beschreiben: Amplitude, Periode und Phase. Bei Veränderungen der Amplitude oder der Periode bzw. der Frequenz kann dies unser Gehör gut wahrnehmen, Phasenänderungen bleiben jedoch so gut wie unbemerkt. Viele Untersuchungen beschäftigten sich mit dem Problem der Hörbarkeit der Phasenverschiebungen, wobei daraus recht kontroverse Ergebnisse entstanden. Bereits 1862 untersuchte Helmholtz die Hörbarkeit von Phasenver-

schiebungen, wobei er sich in dem Punkt irrte, »daß ... die relativen Phasen dieser Partialtöne für das Ohr bedeutungslos seien« [Pierce89, S. 156]. Einen Beitrag zur Klärung dieser Frage stellte auch Michael Huter in seiner Diplomarbeit zum Thema „Die Hörbarkeit von Phasenänderungen in synthetischen Klängen“ an [Huter94].

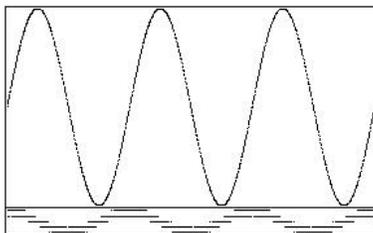
Aus musikalischer Betrachtung sind reine Sinustöne recht uninteressant, denn »tiefe Sinustöne erinnern an ein altes, brummendes Radiogerät, höhere an eintöniges, gleichmäßiges Pfeifen. Sie klingen für uns fremd und unnatürlich ... Zum Glück kommen Sinustöne fast nur in Büchern über Musik oder Psychologie, in Akustiklabors und manchmal auch bei schlechten Synthesizern vor« [Pierce89, S. 35], in der Natur jedenfalls selten einzeln.

Bei Klängen, denen wir eine musikalische Tonhöhe zuordnen, schwingen die Obertöne mit ganzzahligen Vielfachen des Grundtones, d. h. sie haben die doppelte, dreifache, vierfache usw. Frequenz des Grundtones. Ein Teilton der Obertöne wird in der Musik auch als Harmonische bezeichnet. Empfinden wir einen Klang als hochtönig, ist dafür die Frequenz des Grundtones verantwortlich. Interessant ist, daß ein Ton nicht unbedingt hörbar sein muß, aus den Frequenzverhältnissen der Obertöne kann unser Gehirn einen fehlenden Grundton errechnen.

Beispiel 1.1

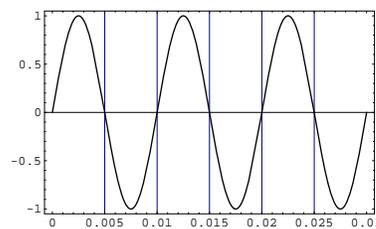
Mit *Mathematica 3.0* ist es leicht möglich, Töne zu erzeugen. Mittels der Funktion `Play[]` können wir beispielsweise den Zusammenhang von Frequenz und Tonhöhe eines reinen Sinustones überprüfen. Im folgenden sehen wir die mit *Mathematica* erzeugten Graphen einer Sinusschwingung mit 100 Hz, 200 Hz und 300 Hz. Die Addition der drei Sinustöne ergibt einen Klang (letztes Bildpaar) mit 100 Hz. Die Töne sind zeitlich etwas kurz angesetzt, jedoch ist so der Kurvenverlauf (linke Seite) gut erkennbar. Dem gegenüber (rechte Seite) sehen wir im Prinzip das gleiche Bild mit `Plot[]` erzeugt, hier können wir aber die Periodenwerte ablesen.

```
In[1]:= Play[Sin[2 * π * 100 * t],
             {t, 0, 0.03},
             SampleRate -> 44100]
```



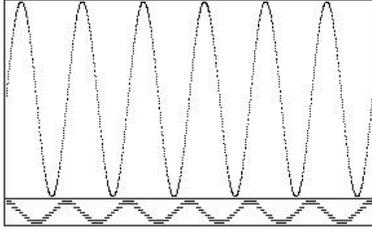
Out[1]= -Sound-

```
In[2]:= Plot[Sin[2 * π * 100 * t],
             {t, 0, 0.03}, Frame -> True,
             GridLines -> {Automatic,
                           None}]
```



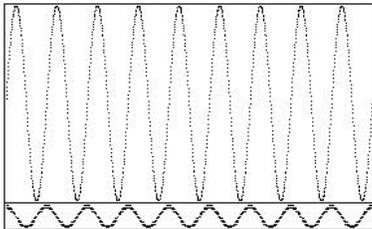
Out[2]= -Graphics-

```
In[3]:= Play[Sin[2 * π * 200 * t],
             {t, 0, 0.03},
             SampleRate -> 44100]
```



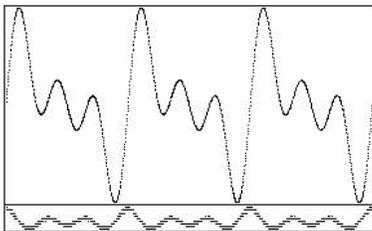
Out[3]= -Sound-

```
In[5]:= Play[Sin[2 * π * 300 * t],
             {t, 0, 0.03},
             SampleRate -> 44100]
```



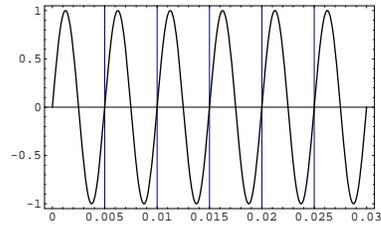
Out[5]= -Sound-

```
In[7]:= Play[Sin[2 * π * 100 * t] +
             Sin[2 * π * 200 * t] +
             Sin[2 * π * 300 * t],
             {t, 0, 0.03},
             SampleRate -> 44100]
```



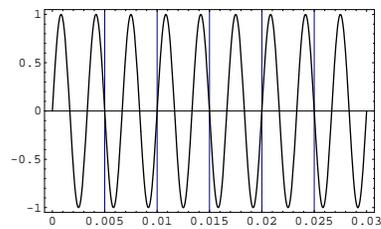
Out[7]= -Sound-

```
In[4]:= Plot[Sin[2 * π * 200 * t],
             {t, 0, 0.03}, Frame -> True,
             GridLines -> {Automatic,
                             None}]
```



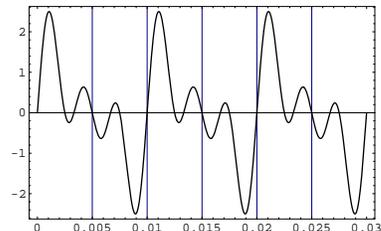
Out[4]= -Graphics-

```
In[6]:= Plot[Sin[2 * π * 300 * t],
             {t, 0, 0.03}, Frame -> True,
             GridLines -> {Automatic,
                             None}]
```



Out[6]= -Graphics-

```
In[8]:= Plot[Sin[2 * π * 100 * t] +
             Sin[2 * π * 200 * t] +
             Sin[2 * π * 300 * t],
             {t, 0, 0.03}, Frame -> True,
             GridLines -> {Automatic,
                             None}]
```



Out[8]= -Graphics-

Im Beispiel wurde eine `SampleRate`¹ (Abtaste) von 44100 benutzt, was der üblichen Abtaste von CD-Abspielgeräten entspricht.

Im Vergleich stellen wir fest, daß mit der Erhöhung der Frequenz auch die Tonhöhe steigt. Das Zusammenspiel der drei Töne ist bei dem Klang gut hörbar.

Das Lautstärkeverhältnis der einzelnen Obertöne ist bestimmend für die Klangfarbe, d. h. der Charakter des Klanges ergibt sich aus seinem Obertongehalt. Klänge »wirken hell oder gar schrill, wenn die hohen Frequenzkomponenten oder Partialtöne stärker vertreten sind als die niedrigen. Dominieren umgekehrt die tiefen Partialtöne, so wirkt die Klangfarbe eher dumpf und dunkel«[Pierce89, S. 30].

1.3 Dynamik des Klanges

Ein Klang ist nicht statisch, sondern dynamisch. Das bedeutet beispielsweise, daß ein auf dem Klavier angeschlagener Ton mit der Zeit verstummt. Die Anteile der einzelnen Obertöne am Gesamtklang verändern sich ständig. Diese Veränderung ist in der sogenannten Einschwingphase am stärksten und wird vom menschlichen Gehör am stärksten zur Erkennung eines Klanges ausgewertet.

Die Dynamik des Klanges ist für uns auch deswegen von Bedeutung, weil generell alle Reize dem sogenannten Ermüdungseffekt unterliegen. Dieser bewirkt, daß alle gleichbleibenden, also statischen Reize oft nach kurzer Zeit nicht mehr wahrgenommen werden.

1.4 Klangverarbeitung im Gehirn

Das Gehirn bewertet und sortiert die akustischen Signale nach bekannten Merkmalen um. »Es geht hier grundsätzlich um die Tatsache, daß wir nicht physikalische Klänge wahrnehmen, sondern Klassen von unterscheidbaren Klängen ...«[Mazzola90, S. 41]. So gelingt es uns auch Klänge zu erkennen, denen bestimmte Informationen fehlen oder die verlorengegangen sind. Ein schlechtes Transistorradio hat z. B. einen Lautsprecher, der die tiefen Töne gar nicht überträgt, und trotzdem könnten wir ein Cello oder einen Kontrabass heraushören. Wir hören also Klänge danach, wie unser Gehirn sie interpretiert, und nicht wie sie physikalisch aufgebaut sind.

Das Gehör kann aber bei weitem nicht alle Schwingungen wahrnehmen, Frequenzen kleiner als 16 Hz liegen außerhalb des hörbaren Bereichs. Die Wahrnehmung von Schwin-

¹»Allgemein gilt: Je größer die Abtaste, desto besser werden die Hochfrequenz-Anteile im Ton wiedergegeben«[Wolfram97a, S. 178].

gungen höherer Frequenz hängt vom Alter und Gesundheitszustand des Gehörs ab und reicht bis ca. 19000 Hz (junge Menschen).

1.5 Merkmale einer Schwingung

Eine Schwingung ist eine regelmäßig wiederkehrende Bewegung um einen Ruhepunkt mit der sogenannten Amplitude (Auslenkung), als maximale Auslenkung vom Ruhepunkt, und der Frequenz als Angabe, wie oft sich dieser Vorgang in einer Sekunde wiederholt. Addiert man zu einer Schwingung eine andere, ergibt sich eine neue Schwingung mit einer neuen Schwingungsform. Nach dem Physiker Fourier kann man jede noch so komplexe Schwingung durch viele geeignete sinusförmige Einzelschwingungen erzeugen. Die Untersuchung, welche das sein müssen, wird auch als Fourieranalyse bezeichnet.

- Die Schwingungsform bestimmt den Klang,
- die Amplitude steht für die Lautstärke und
- die Frequenz gibt die Tonhöhe an.

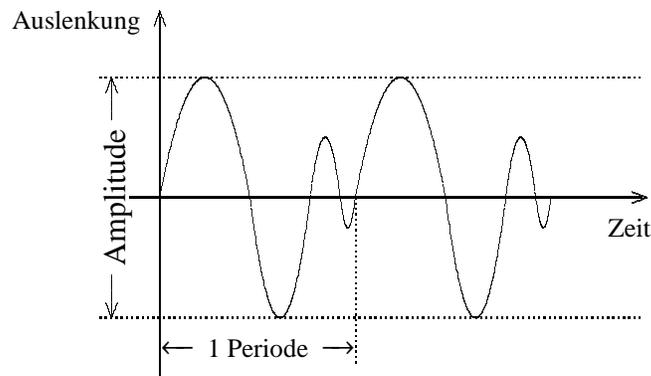


Abb. 1.1: Schwingungseigenschaften

Die Bewegung einer Schwingung ist hierbei nicht auf mechanische Bewegung begrenzt, es gibt auch magnetische, optische und elektrische Schwingungen.

1.6 Motivation und Ziel

Ziel der Fourieranalyse ist zu Untersuchungszwecken die Gesamtfunktion des Klanges in Grund- und Oberschwingung und den zugehörigen Amplituden mathematisch aufzuspalten.

In dieser Diplomarbeit stelle ich ein Paket² für das Computer-Algebra-System *Mathematica 3.0* vor. Es gestattet die bisher in *Mathematica 3.0* noch nicht implementierte

²Ein Paket (englisch: package) ist eine Sammlung von zusätzlichen Funktionen zur Erweiterung von *Mathematica*.

Möglichkeit zur *exakten* Berechnung von Fourierreihen und deren verschiedene grafische Darstellungsmöglichkeiten.

Im zweiten Kapitel werde ich die dem Paket zugrundeliegende Theorie der Fourieranalyse und im dritten Kapitel die Funktionen meines Paketes behandeln, wobei einige ausgewählte Beispiele die Funktionalität verdeutlichen sollen.

Schließlich befindet sich im Anhang eine mit dem Paket *ftools.m* rekonstruierte Tabelle aus [Stöcker97].

Auf der beiliegenden CD-ROM befinden sich das Paket (*ftools.m*), die Palette (*fourierpalette.nb*), sämtliche behandelten Beispiele incl. Anhang (*beispiele.nb*) und diese Diplomarbeit (*dipall.ps*).

2 Theoretische Grundlagen

2.1 2π -periodische Funktionen

Wir betrachten zunächst 2π -periodische Funktionen, also $f(t + 2\pi) = f(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$.

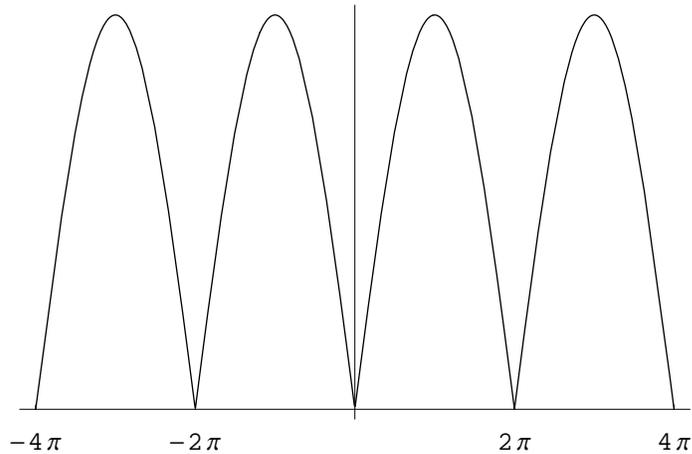


Abb. 2.1: Eine periodische Funktion mit Periode 2π

Ziel ist es, möglichst jede 2π -periodische Funktion als Summe von einfachen periodischen Funktionen (Sinus, Kosinus) zu approximieren. Es wird sich herausstellen, daß dies für die meisten in der Praxis auftretenden Funktionen gelingt. Zur Approximation von $f(t)$ gehen wir anfangs von folgendem einsehbaren Ansatz aus:

$$p(t) = \sum_{n=0}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \quad (2.1)$$

Ziehen wir den Summanden für $n = 0$ ($\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$) aus der Summe heraus, können wir (2.1) auch schreiben als

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \quad (2.2)$$

Wir definieren trotz (2.2), wobei uns der Faktor $\frac{1}{2}$ vor a_0 später noch verständlich wird:

Definition 2.1.1 Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $a_n, b_n, t \in \mathbb{R}$. Die Funktion

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ &= \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + \dots + (a_N \cos t + b_N \sin t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

heißt *trigonometrisches Polynom*. Es ist vom Grad N , falls a_n und b_n nicht zugleich verschwinden.

Es ist offensichtlich, daß $p(t)$ die Periode 2π besitzt. Für genügend große N approximiert $p(t)$ unsere 2π -periodische Funktion $f(t)$, wenn wir die Koeffizienten a_n und b_n günstig wählen. Die Koeffizienten sind dann eindeutig bestimmt, mit anderen Worten, zwei 2π -periodische, trigonometrische Polynome sind also genau dann gleich, wenn alle Koeffizienten beim Koeffizientenvergleich übereinstimmen. Es liegt nahe, von trigonometrischen Polynomen zu trigonometrischen Reihen überzugehen.

Definition 2.1.2 Es sei $a_n, b_n, t \in \mathbb{R}$. Die Reihe

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ &= \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + (a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

heißt *trigonometrische Reihe*.

Trigonometrische Reihen sind bei geeigneter Wahl der Koeffizienten a_n und b_n konvergent und nicht anders als trigonometrische Polynome periodisch mit der Periode 2π . Wir setzen absolute Konvergenz der Reihenglieder voraus und halten fest:

Satz 2.1.3 Konvergiert die trigonometrische Reihe (2.4), so besitzt sie die Periode 2π .

Beweis:

$$\begin{aligned} f(t + 2\pi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n(t + 2\pi) + b_n \sin n(t + 2\pi)) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

■

Die Bedingungen für die Konvergenz der trigonometrischen Reihen bzw. später der Fourierreihen werden wir noch untersuchen.

2.2 Bestimmung der Koeffizienten der trigonometrischen Reihe

Um die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe (2.4) zu bestimmen, nutzen wir die Orthogonalität von Sinus und Kosinus.

Definition 2.2.1 Ein Funktionensystem $S = \{f_0(t), f_1(t), f_2(t), \dots\}$ heißt *Orthogonal-System* auf $[a, b]$, wenn gilt

$$\int_a^b f_k(t)f_l(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l, \\ > 0 & \text{für } k = l. \end{cases} \quad (2.5)$$

Im Hinblick auf die trigonometrische Reihe betrachten wir das System

$$\begin{aligned} S &= \{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\} \\ &= \{1, \cos kt, \sin kt \mid k = 1, 2, 3, \dots\}, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Wir können folgenden Satz formulieren:

Satz 2.2.2 Sei $n, m \in \mathbb{Z}$. Das Funktionensystem (2.6) ist auf $[0, 2\pi]$ ein *Orthogonal-System*.

Beweis: Mit Hilfe der Beziehungen

- $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$
- $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$

zeigen wir

1.
 - $\int_0^{2\pi} 1 \cdot 1 dt = t|_0^{2\pi} = 2\pi$
 - $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin nt dt = -\frac{\cos nt}{n}|_0^{2\pi} = 0$
 - $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nt dt = \frac{\sin nt}{n}|_0^{2\pi} = 0$
2.
 - $\int_0^{2\pi} \sin nt \sin mt dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n-m)t - \cos(n+m)t}{2} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$
 - $\int_0^{2\pi} \sin nt \cos mt dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n-m)t + \sin(n+m)t}{2} dt = 0, \quad n = m, n \neq m$

$$\bullet \int_0^{2\pi} \cos nt \cos mt \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n-m)t + \cos(n+m)t}{2} \, dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

■

| | | |
|----|---|---|
| 1. | $\int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$ | |
| 2. | $\int_0^{2\pi} \sin nt \, dt = 0$ | für $n = 1, 2, 3, \dots$ |
| 3. | $\int_0^{2\pi} \cos nt \, dt = 0$ | für $n = 1, 2, 3, \dots$ |
| 4. | $\int_0^{2\pi} \cos nt \cos mt \, dt =$ | $\begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases}$ |
| 5. | $\int_0^{2\pi} \sin nt \sin mt \, dt =$ | $\begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases}$ |
| 6. | $\int_0^{2\pi} \sin nt \cos nt \, dt = 0$ | für $m, n = 1, 2, 3, \dots$ |

Tab. 2.1: Zusammenstellung der Orthogonalitätsrelationen von S

Wir wollen nun für die trigonometrische Reihe (2.4) unter Zuhilfenahme des Satzes 2.2.2 die Koeffizienten a_0 , a_n und b_n bestimmen. Die Multiplikation jeder einzelnen Funktion aus (2.6) und die anschließende gliedweise Integration im Intervall $[0, 2\pi]$ bringt folgende Ergebnisse:

$$1. \int_0^{2\pi} f(t) \cdot 1 \, dt = \underbrace{\frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} 1 \, dt}_{a_0 \cdot \pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{a_n \int_0^{2\pi} \cos nt \cdot 1 \, dt}_0 + \underbrace{b_n \int_0^{2\pi} \sin nt \cdot 1 \, dt}_0 \right)$$

Damit ergibt sich für a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, dt.$$

2.

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos kt \, dt = \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cos kt \, dt}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{a_n \int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \cos kt \, dt}_{\substack{0, n \neq k \\ a_k \cdot \pi, n = k}} + \underbrace{b_n \int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \cos kt \, dt}_0 \right) \quad (2.7)$$

Damit ergibt sich für a_k :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

3.

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin kt \, dt = \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \sin kt \, dt}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{a_n \int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \sin kt \, dt}_0 + \underbrace{b_n \int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \sin kt \, dt}_{\substack{0, n \neq k \\ b_k \cdot \pi, n = k}} \right) \quad (2.8)$$

Damit ergibt sich für b_k :

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

2.3 Die Fourierreihe in trigonometrischer Darstellung

Wir haben nun für eine 2π -periodische Funktion $f(t)$ die Koeffizienten a_0 , a_k und b_k formal bestimmt. Die trigonometrische Reihe für eine 2π -periodische Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ bezeichnen wir nun als Fourierreihe $\mathcal{F}(f)(t)$:

Definition 2.3.1 Es sei $a_n, b_n, t \in \mathbb{R}$. Die Reihe

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (2.9)$$

heißt *Fourierreihe* von $f(t)$ mit den *Fourierkoeffizienten*:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \quad (2.10)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.12)$$

Bemerkung 2.3.2 Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten gemäß Abschnitt 2.2 benötigen wir die gliedweise Integration von (2.4), was nicht selbstverständlich ist. Es sei an die Begriffe der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen erinnert [Brigola97]:

Definition 2.3.3 Eine Folge von Funktionen $f_N : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert *punktweise* gegen eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, wenn $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t) = f(t)$ für jedes $t \in I$ gilt. Sie konvergiert *auf I gleichmäßig* gegen f , wenn der *Maximalfehler* $\sup_{t \in I} |f_N(t) - f(t)|$ auf I für $N \rightarrow \infty$ gegen Null geht.

Zusammenfassend ergeben sich daraus einige wichtige Gegebenheiten:

1. Eine punktweise konvergente Folge $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ kann eine unstetige Grenzfunktion f besitzen, auch wenn alle Funktionen f_N stetig sind. Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen f_N aber gleichmäßig gegen eine Funktion f , dann ist auch f stetig.
2. Besonders wichtig ist die gleichmäßige Konvergenz bei Funktionenreihen, mit denen wir uns ja beschäftigen. Eine Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf einem Intervall I gleichmäßig gegen eine Funktion f , wenn die Folge $\sum_{n=1}^N f_n$ ihrer Partialsummen für $N \rightarrow \infty$ auf I gleichmäßig gegen f konvergiert. Die zentrale Aussage lautet nun: Eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen f_n darf gliedweise integriert werden:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt \quad (a, b \in I).$$

Bemerkung 2.3.4 Betrachten wir die Fourierkoeffizienten, dann wird uns jetzt klar, warum der einzige konstante Koeffizient a_0 den Faktor $\frac{1}{2}$ besitzt. Dadurch ergibt sich für alle Fourierkoeffizienten eine gemeinsame Formel. In der Literatur findet man aber auch häufig die alternative Schreibweise (siehe auch 2.2) für die Fourierreihe (2.9):

$$\mathcal{F}(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

und im Vergleich zu (2.10) für a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

Die Berechnungsformeln für a_k und b_k bleiben gemäß (2.11) und (2.12) erhalten.

Bemerkung 2.3.5 Interessant ist, daß sich beim Übergang von $\mathcal{F}_N(f)$ zu $\mathcal{F}_{N+1}(f)$ die Fourierkoeffizienten a_n , $n = 0, 1, \dots, N$ und b_n , $n = 1, 2, \dots, N$ nicht ändern.

Bemerkung 2.3.6 Bei der periodischen Fortsetzung einer Funktion $f(t)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ auf \mathbb{R} gilt für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t) dt. \quad (2.13)$$

Durch eine Verschiebung der Integralgrenzen kann eine Minderung des Aufwandes bei der Berechnung der Integrale bei den Fourierkoeffizienten erreicht werden, wobei häufig $\alpha = -\pi$ gewählt wird. Will man zum Beispiel die Fourierreihe der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & \text{für } t \leq \pi \\ (t - 2\pi)^2, & \text{für } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

bestimmen, empfiehlt es sich, anstelle von $f(t)$ die Funktion

$$g(t) = t^2, \quad \text{für } -\pi \leq t \leq \pi$$

zur Berechnung der Fourierkoeffizienten heranzuziehen.

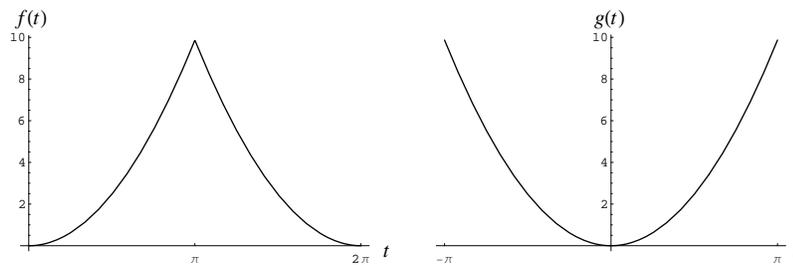


Abb. 2.2: Die Graphen der Funktionen $f(t)$ und $g(t)$

Die Berechnung der Fourierkoeffizienten beider Funktionen führt zu identischen Ergebnissen und damit zu derselben Fourierreihe (vgl. S. 11):

$$\mathcal{F}(f)(t) = \mathcal{F}(g)(t).$$

Degradieren wir die Fourierreihe zu einem trigonometrischen Polynom (2.3) bzgl. der Anzahl der Summanden, d. h. berechnen wir nicht die unendliche Summe der Fourierreihe, sondern lediglich bis zu einem bestimmtem $N \in \mathbb{N}$, so bezeichnen wir sie als N -te Teilsumme der Fourierreihe bzw. als abgebrochene Fourierreihe der Ordnung N .

Definition 2.3.7 Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $a_n, b_n, t \in \mathbb{R}$. Die Reihe

$$\mathcal{F}_N(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (2.14)$$

heißt *abgebrochene Fourierreihe der Ordnung N* (siehe Abbildung 2.3).

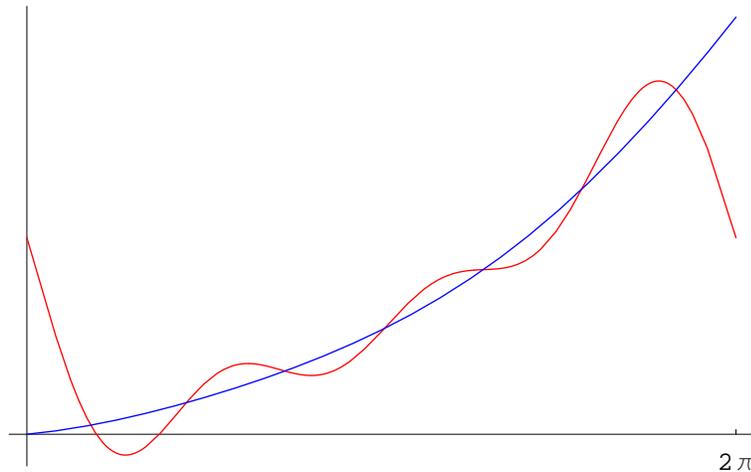


Abb. 2.3: Die Graphen einer Funktion und deren zugehörige abgebrochene Fourierreihe

Nun ist noch nicht klar, ob die Fourierreihe $\mathcal{F}(f)(t)$ für jede Funktion $f(t)$ konvergiert und, falls ja, diese darstellt. Wie eingangs bereits erwähnt, ist dies für die meisten in der Praxis auftretenden Funktionen der Fall, und es gilt:

$$\mathcal{F}(f)(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}_N(f)(t) = f(t).$$

Da es auch stetige, 2π -periodische Funktionen gibt, deren Fourierreihe an unendlich vielen Stellen eines Periodenintervalls divergiert [Westermann97, Brigola97], wollen wir uns überlegen, unter welchen Bedingungen die Fourierreihe konvergiert und mit $f(t)$ übereinstimmt. Wir definieren zunächst [StGaVo97]:

Definition 2.3.8 Die Funktion

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt *stückweise stetig differenzierbar oder stückweise glatt*, wenn es eine Partition von $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle gibt, so daß im Inneren jedes Teilintervalles die Funktion f stetig differenzierbar ist, und in jedem Punkt aus $[a, b]$, insbesondere an den Trennstellen der Teilintervalle, die einseitigen Grenzwerte von f und f' existieren.

Bemerkung 2.3.9 Notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle t_0 ist die Stetigkeit an dieser Stelle. Existieren die links- und rechtsseitige Ableitung, d. h. existieren die beiden Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

sind jedoch voneinander verschieden, ist die Funktion nicht differenzierbar in t_0 . In diesem Fall bezeichnet man aber in der Literatur (z. B. [Werner97]) die Funktion häufig auch als links- und rechtsseitig differenzierbar im Punkt t_0 . Anschaulich hat der Graph der Funktion bei Stetigkeit an dieser Stelle einen Knick, d. h. die Steigung der Tangente ändert sich an der Knickstelle sprunghaft. Stimmen links- und rechtsseitige Ableitung in t_0 überein, dann ist auch die hinreichende Bedingung für Differenzierbarkeit erfüllt. Ist die Funktion an einem Punkt links- und rechtsseitig differenzierbar jedoch unstetig, ist dies als Sprung im Graph der Funktion zu erkennen.

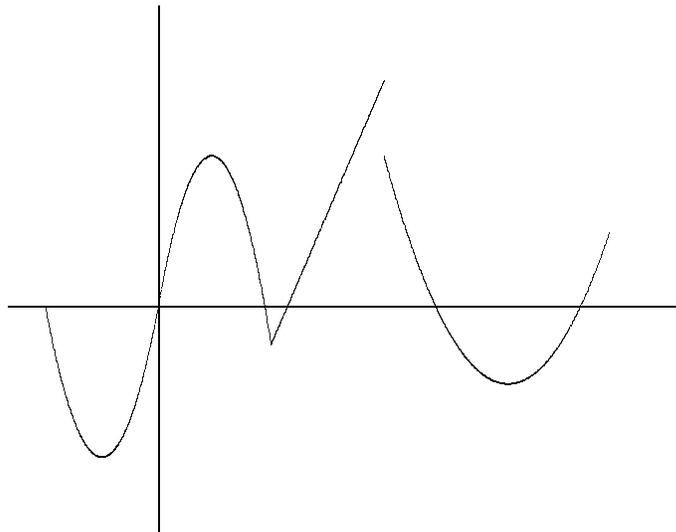


Abb. 2.4: Eine stückweise stetig differenzierbare Funktion

In einem Teilpunkt t_0 besitzt also eine stückweise stetig differenzierbare Funktion eine links- und rechtsseitige Ableitung, f' ist demnach beschränkt:

$$f'_-(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f'(t)$$

$$f'_+(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f'(t).$$

Dies ergibt sich aus dem Mittelwertsatz: Es existiert ein $c^- \in (a, t_0)$ bzw. ein $c^+ \in (t_0, b)$ mit

$$\frac{f(a) - f(t_0)}{a - t_0} = f'(c^-)$$

$$\frac{f(b) - f(t_0)}{b - t_0} = f'(c^+).$$

In dem Teilpunkt t_0 existiert der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert:

$$f_-(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t)$$

$$f_+(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t).$$

Falls für die Fourierreihe gilt:

$$\mathcal{F}(f)(t_0) = \frac{f_-(t_0) + f_+(t_0)}{2},$$

bezeichnen wir dies als Mittelwertigkeit. Wir können nun einen Satz formulieren, der auf Dirichlet zurückgeht [Brigola97]:

Satz 2.3.10 *Ist $f(t)$ auf $[a, b]$ stückweise stetig differenzierbar, dann konvergiert die Fourierreihe $\mathcal{F}(f)(t)$ an jeder Stelle t gegen $\frac{f_-(t) + f_+(t)}{2}$, an Stetigkeitsstellen t also gegen $f(t)$.*

Der exakt rechnerisch durchgeführte Beweis dieses Satzes wird in Abschnitt 2.8.3 auf S. 46 gezeigt.

Eine stückweise stetige differenzierbare Funktion besitzt auf $[a, b]$ ein Minimum und ein Maximum, ist also beschränkt und damit über $[a, b]$ Riemann-integrierbar [Stöcker97]. Die Funktionswerte in endlich vielen Unstetigkeitsstellen haben bekanntlich keinen Einfluß auf das Integral über $[a, b]$.

Beispiel 2.1

Für unser erstes Beispiel wählen wir für $t \in [0, 2\pi]$:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{wenn } t \leq \pi \\ t - 2\pi & \text{wenn } \pi < t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Die Funktion ist an sich nicht periodisch, dies können wir aber durch eine periodische Fortsetzung auf ganz \mathbb{R} erreichen. Wir wollen das Zeichnen des Graphen der Funktion $f(t)$ *Mathematica* überlassen und laden zunächst das Paket.

```
In[9]:= << eigene`ftools`
```

Nach Bemerkung 2.3.6 auf S. 16 können wir für $\alpha = -\pi$ die Funktion einfacher definieren als

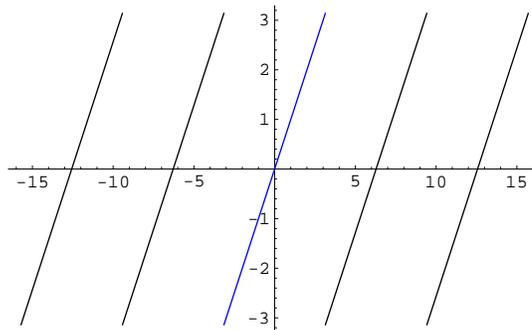
```
In[10]:= f = t;
```

in dem Definitionsbereich

```
In[11]:= d = {t, -π, π};
```

Wir schauen uns den Plot an:

```
In[12]:= PlotPeriodicalContinuation[f, d, 2]
```



```
Out[12]= -Graphics-
```

Man bezeichnet solche Funktionen dem Aussehen nach auch als „Sägezahnfunktion“. Der blau gezeichnete Kurvenabschnitt stellt die definierte Funktion f dar, der schwarz gezeichnete die periodische Fortsetzung. Wir berechnen die Fourierkoeffizienten und erhalten für a_n , $n \geq 0$:

```
In[13]:= FourierCosSeriesCoefficientExact[f, d, n]
```

```
Out[13]= 0
```

und für b_n , $n > 0$ (da $b_0 = 0$, $\forall f$):

```
In[14]:= FourierSinSeriesCoefficientExact[f, d, n]
```

```
Out[14]= If[n == 0, 0, -2(-1)^n/n]
```

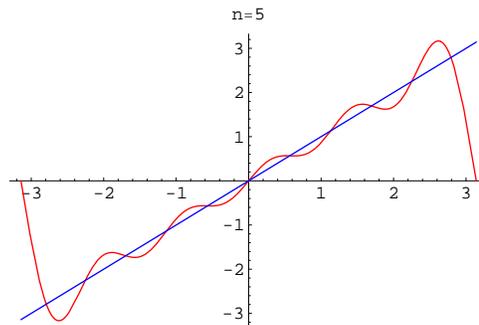
Wir haben nun die Fourierreihe exakt bestimmt, nämlich $\mathcal{F}(f)(t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nt$. Dies können wir uns auch von *Mathematica* ausgeben lassen:

```
In[15]:= FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
```

```
Out[15]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n \text{Sin}[nt]}{n}
```

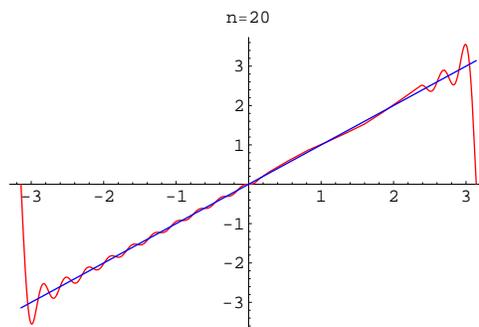
Weiterhin wollen wir uns den Graph der Näherung, also den Graph der abgebrochenen Fourierreihe der Ordnung $N = 5$ und $N = 20$ ansehen.

```
In[16]:= PlotFourierImageExact[f, d, n, 5]
```



```
Out[16]= -Graphics-
```

```
In[17]:= PlotFourierImageExact[f, d, n, 20]
```



```
Out[17]= -Graphics-
```

Die rot gezeichnete Funktion ist der Graph der abgebrochenen Fourierreihe für die oben definierte Funktion $f(t)$. Die Fourierkoeffizienten b_n der Fourierreihe verhalten sich proportional zu $\frac{1}{n}$. Durch die periodische Fortsetzung von $f(t)$ existieren an den Periodenintervallgrenzen Sprungstellen. In der Nähe dieser Unstetigkeitsstellen überschwingt die abgebrochene Fourierreihe die darzustellende Funktion, wobei die Amplitude der hochfrequenten Anteile der Fourierreihe auch bei einem höherem Grad N erhalten bleibt. Lediglich die Anzahl der Oszillationen erhöht sich, also die Breite des überschwingenden Anteils wird mit zunehmendem N kleiner. Man bezeichnet dieses Überschwingen auch als Gibbsches Phänomen. Ein Nachweis des Gibbs-Phänomens am Beispiel der Sägezahnfunktion findet sich in [Brigola97, S. 20].

2.4 Symmetriebetrachtungen

Besitzt die Funktion $f(t)$ Symmetrieeigenschaften, können die Koeffizienten vereinfacht dargestellt werden, wobei wir folgende Eigenschaften gerader und ungerader Funktionen kennen müssen:

| $f(t)$ | $g(t)$ | $f(t) \cdot g(t)$ |
|----------|----------|-------------------|
| gerade | gerade | gerade |
| gerade | ungerade | ungerade |
| ungerade | gerade | ungerade |
| ungerade | ungerade | gerade |

Tab. 2.2: Symmetriestimmung von multiplikativ zusammengesetzten Funktionen

2.4.1 Gerade Funktionen (Graph symmetrisch zur Ordinate)

Wir bezeichnen eine Funktion als gerade, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

$$f(-t) = f(t), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

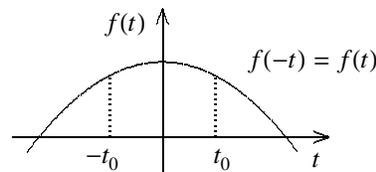


Abb. 2.5: Eine gerade Funktion

Aus Bemerkung 2.3.6 und aus (2.10) sowie Tabelle 2.2 erhalten wir für gerade Funktionen:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \, dt \quad (2.15)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (2.16)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt = 0. \quad (2.17)$$

Beispiel 2.2

Wir wählen uns die Funktion

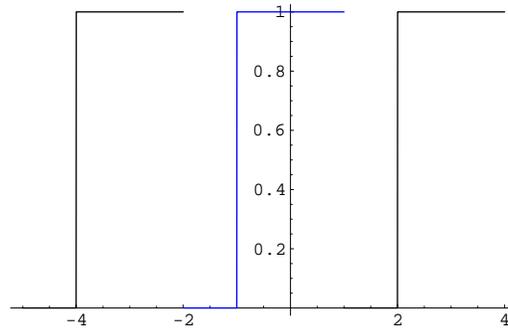
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } -2 < t \leq -1, \\ 1 & \text{wenn } -1 < t \leq 1 \end{cases}$$

und definieren sie in *Mathematica* mit Hilfe der `UnitStep[]`-Funktion:

```
In[18]:= f = UnitStep[t + 1];
         d = {t, -2, 1};
```

Durch die periodische Fortsetzung auf ganz \mathbb{R} ergibt sich eine gerade Funktion (senkrechte Striche gehören nicht zum Graph der Funktion).

```
In[19]:= PlotPeriodicalContinuation[f, d, 1]
```



```
Out[19]= -Graphics-
```

Wir berechnen die Fourierkoeffizienten und erhalten für a_n :

```
In[20]:= FourierCosSeriesCoefficientExact[f, d, n]
```

```
Out[20]= If[n == 0, 2/3, 2 Sin[2nπ/3]/(nπ)]
```

Das bereits existierende Paket `Calculus`FourierTransform`` enthält die Funktion `FourierCosSeriesCoefficient[]`, die für bestimmte n_0 die Fourierkoeffizienten a_{n_0} berechnen kann. Diese beruht auf der in Bemerkung 2.3.4 auf S. 15 vorgestellten alternativen Darstellung der Fourierreihe. Um beide Funktionen für bestimmte n_0 direkt vergleichen zu können, wurde diese Darstellung auch für die `Exact`-Form gewählt.

```
In[21]:= FourierCosSeriesCoefficient[f, d, 0]
```

```
Out[21]= 2/3
```

Für b_n erhalten wir:

```
In[22]:= FourierSinSeriesCoefficientExact[f, d, n]
```

```
Out[22]= 0
```

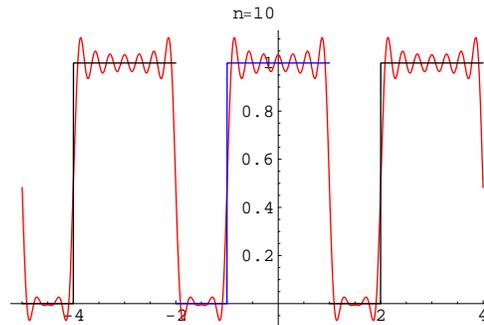
Damit ergibt sich als Fourierreihe:

```
In[23]:= FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
```

```
Out[23]= 2/3 + Sum[2 Cos[2nπt/3] Sin[2nπ/3]/(nπ), {n, 1, ∞}]
```

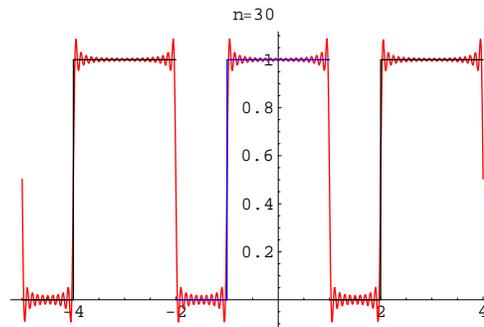
Die Graphen der Funktion und ihrer Approximation 10. und 30. Ordnung erhalten wir durch:

```
In[24]:= PlotFourierImageExact[f, d, n, 10, FourierContinue->1]
```



```
Out[24]= -Graphics-
```

```
In[25]:= PlotFourierImageExact[f, d, n, 30, FourierContinue->1]
```



```
Out[25]= -Graphics-
```

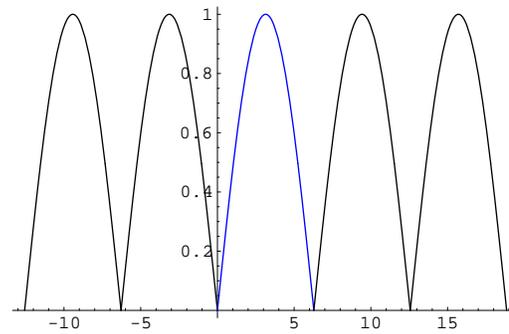
Man erkennt, daß ebenfalls viele Summenglieder der Fourierreihe berechnet werden müssen, um die Funktion halbwegs gut anzunähern. Die Fourierkoeffizienten a_n der Fourierreihe verhalten sich wieder proportional zu $\frac{1}{n}$. Auch hier ist das Gibbs'sche Phänomen gut erkennbar.

Beispiel 2.3

Wir wählen uns eine weitere gerade Funktion, wie sie in Abbildung 2.1 auf S. 10 dargestellt wird. Sie ist die periodische Fortsetzung von

```
In[26]:= f = Sin[t/2];
          d = {t, 0, 2π};
```

```
In[27]:= PlotPeriodicalContinuation[f, d, 2]
```



Out[27]= -Graphics-

Wir berechnen die Fourierkoeffizienten und erhalten für a_n :

In[28]:= **FourierCosSeriesCoefficientExact[f, d, n]**

Out[28]= If[n == 0, $\frac{2}{\pi}$, $\frac{4}{\pi - 4n^2\pi}$]

und wie erwartet für b_n :

In[29]:= **FourierSinSeriesCoefficientExact[f, d, n]**

Out[29]= 0

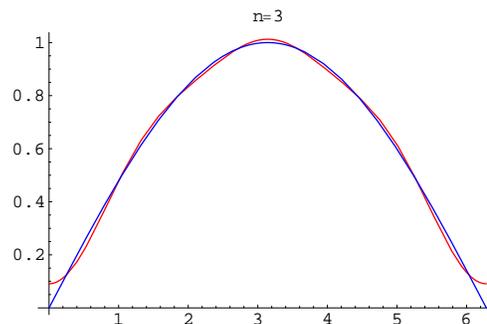
Damit ergibt sich die folgende Fourierreihe:

In[30]:= **FourierTrigSeriesExact[f, d, n]**

Out[30]= $\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4 \text{Cos}[nt]}{(-1 + 4n^2)\pi}$

Den Graphen der Funktion und ihrer Approximation 3. Ordnung erhalten wir durch:

In[31]:= **PlotFourierImageExact[f, d, n, 3]**



Out[31]= -Graphics-

Man erkennt, daß nur wenige Summenglieder der Fourierreihe berechnet werden müssen, um die Funktion erkennbar gut anzunähern. Es bauen sich keine Oszillationen im Periodenintervall auf, da keine Sprünge vorhanden sind, also kein Gibbsches Phänomen. Die Koeffizienten a_n der Fourierreihe verhalten sich proportional zu $\frac{1}{n^2}$.

2.4.2 Ungerade Funktionen (Graph symmetrisch zum Koordinatenursprung)

Wir bezeichnen eine Funktion als ungerade, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

$$-f(-t) = f(t), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

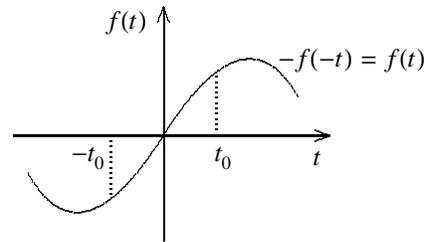


Abb. 2.6: Eine ungerade Funktion

Analog erhalten wir hier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0 \quad (2.18)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = 0 \quad (2.19)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt dt. \quad (2.20)$$

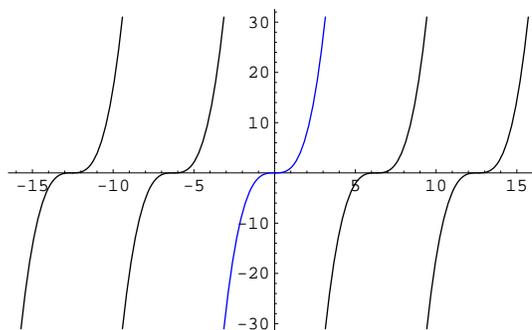
Beispiel 2.4

Wir wählen uns für dieses Beispiel die ungerade Funktion:

```
In[32]:= f = t^3;
```

```
d = {t, -π, π};
```

```
In[33]:= PlotPeriodicalContinuation[f, d, 2, PlotRange -> All]
```



```
Out[33]= -Graphics-
```

Die Berechnung der Fourierkoeffizienten bringt erwartungsgemäß für a_n :

```
In[34]:= FourierCosSeriesCoefficientExact[f, d, n]
```

```
Out[34]= 0
```

und für b_n :

```
In[35]:= FourierSinSeriesCoefficientExact[f, d, n]
```

```
Out[35]= If[n == 0, 0, - $\frac{2(-1)^n(-6 + n^2\pi^2)}{n^3}$ ]
```

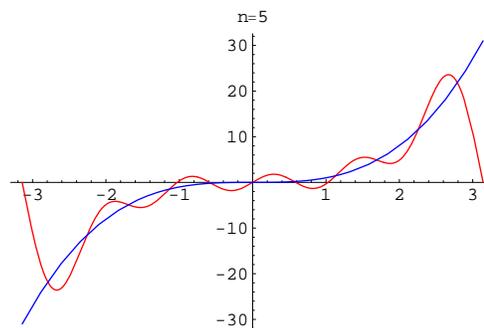
Damit erhalten wir also für die Fourierreihe $\mathcal{F}(f)(t)$:

```
In[36]:= FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
```

```
Out[36]=  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n(-6 + n^2\pi^2)}{n^3} \text{Sin}[nt]$ 
```

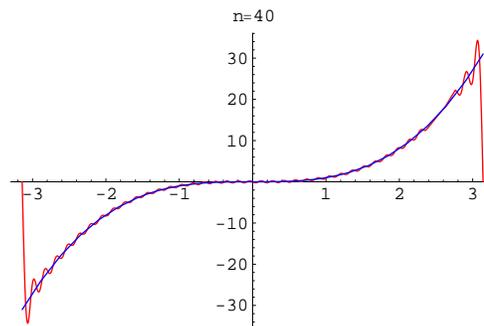
Wir lassen uns die grafische Darstellung der abgebrochenen Fourierreihen für $N = 5$ und $N = 40$ ausgeben:

```
In[37]:= PlotFourierImageExact[f, d, n, 5, PlotRange->All]
```



```
Out[37]= -Graphics-
```

```
In[38]:= PlotFourierImageExact[f, d, n, 40, PlotRange->All]
```



```
Out[38]= -Graphics-
```

Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel 2.3 auf S. 24 erkennen wir hier wieder, daß eine große Anzahl von Summengliedern notwendig ist, um die Funktion einigermaßen durch eine Fourierreihe zu approximieren. Dabei ist abermals das Gibbssche Phänomen zu beobachten. Die Koeffizienten b_n der Fourierreihe verhalten sich proportional zu $\frac{1}{n}$, dies und das Gibbssche Phänomen ist der Grund für die schlechte Konvergenz.

2.5 $2p$ -periodische Funktionen

Nun betrachten wir $2p$ -periodische Funktionen, also $f(t + 2p) = f(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Im Grunde müssen wir lediglich die Fourierreihe einer 2π -periodischen Funktion an die Fourierreihe einer $2p$ -periodischen Funktion anpassen, d. h. die einzelnen Sinus- und Kosinusterme auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ hinreichend stauchen bzw. strecken. Wir führen eine Hilfsvariable $z = \frac{t}{2p} \cdot 2\pi = \frac{\pi t}{p}$ ein, durch einfache Umstellung ergibt sich $t = z \cdot \frac{p}{\pi}$ und damit $f(t) = f\left(z \cdot \frac{p}{\pi}\right) = g(z)$. Wir zeigen nun, daß $g(z)$ die Periode 2π besitzt:

$$\begin{aligned} g(z + 2\pi) &= f\left((z + 2\pi) \cdot \frac{p}{\pi}\right) = f\left(z \cdot \frac{p}{\pi} + 2p\right) \\ &= f(t + 2p) = f(t) = f\left(z \cdot \frac{p}{\pi}\right) \\ &= g(z). \end{aligned}$$

Die Entwicklung von $g(z)$ in eine Fourierreihe $\mathcal{F}(g)(z)$ führt uns zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(z) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz) \\ \mathcal{F}(f)(t) = \mathcal{F}(g)(z) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{\pi}{p} t + b_n \sin n \frac{\pi}{p} t \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

$\mathcal{F}(g)(z)$ besitzt also die Periode 2π . Daraus folgt für die Fourierkoeffizienten einer $2p$ -periodischen Fourierreihe $\mathcal{F}(f)(t)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(z) \, dz = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(t) \, dt \quad (2.22)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(z) \cos nz \, dz = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(t) \cos n \frac{\pi}{p} t \, dt \quad (2.23)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(z) \sin nz \, dz = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(t) \sin n \frac{\pi}{p} t \, dt. \quad (2.24)$$

| | | |
|---|---|---|
| Periode 2π | Periode $2p$ $\omega = \frac{\pi}{p}$ | |
| $\mathcal{F}(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$ | $\mathcal{F}(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$ | Allgemeine Reihendarstellung |
| $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt$ $n = 1, 2, 3, \dots$ | $a_0 = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(t) dt$ $a_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(t) \cos n\omega t dt$ $b_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(t) \sin n\omega t dt$ $n = 1, 2, 3, \dots$ | Allgemeine Formeln für Koeffizienten |
| $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt$ $b_n = 0$ $n = 1, 2, 3, \dots$ | $a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt$ $a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos n\omega t dt$ $b_n = 0$ $n = 1, 2, 3, \dots$ | $f(t)$ gerade |
| $a_0 = 0$ $a_n = 0$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt$ $n = 1, 2, 3, \dots$ | $a_0 = 0$ $a_n = 0$ $b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin n\omega t dt$ $n = 1, 2, 3, \dots$ | $f(t)$ ungerade |

Tab. 2.4: Fourierreihen einer 2π - und $2p$ -periodischen Funktion in trigonometrischer Darstellung

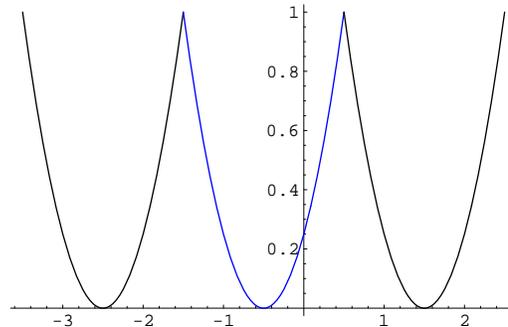
Beispiel 2.5

Wir betrachten die Funktion:

```
In[39]:= f = (t + 1/2)^2;
          d = {t, -3/2, 1/2};
```

deren Fortsetzung $2p$ -periodisch mit $p = 1$ ist:

```
In[40]:= PlotPeriodicalContinuation[f, d, 1]
```



```
Out[40]= -Graphics-
```

Die Berechnung der Fourierkoeffizienten ergibt für a_n :

```
In[41]:= FourierCosSeriesCoefficientExact[f, d, n]
```

```
Out[41]= If[n == 0, 1/3, 4(-1)^n Cos[nπ/2] / (n^2 π^2)]
```

und für b_n :

```
In[42]:= FourierSinSeriesCoefficientExact[f, d, n]
```

```
Out[42]= If[n == 0, 0, -4(-1)^n Sin[nπ/2] / (n^2 π^2)]
```

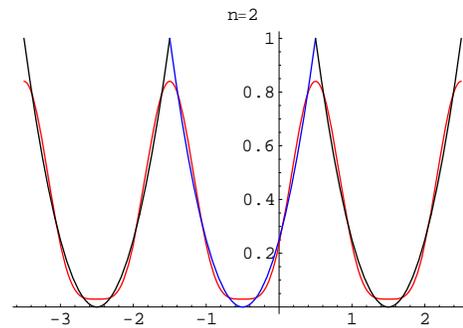
Damit erhalten wir die Fourierreihe in der Form:

```
In[43]:= FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
```

```
Out[43]= 1/3 + Sum[4 Cos[nπ/2] / (n^2 π^2), {n, 1, ∞}]
```

Der Plot der Graphen der Funktion $f(t)$ und deren Approximation 2. Ordnung ergibt:

```
In[44]:= PlotFourierImageExact[f, d, n, 2, FourierContinue -> 1]
```



Out[44]= -Graphics-

Die Fourierreihe konvergiert sehr schnell, nur wenige Glieder müssen berechnet werden, um die Funktion anschaulich gut anzunähern. Wir sehen, daß keine Sprünge existieren, keine Oszillationen und kein Gibbssches Phänomen auftreten. Die Fourierkoeffizienten a_n und b_n verhalten sich proportional zu $\frac{1}{n^2}$.

2.6 Zusammenfassen der Summanden mit gleicher Frequenz

Ist $f(t)$ eine periodische Schwingung mit der Schwingungsdauer $2p$, wird sie im allgemeinen durch die Fourierreihe

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (2.25)$$

zu jedem Zeitpunkt t mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{\pi}{p}$ und den genannten Fourierkoeffizienten dargestellt. Die Darstellung von $f(t)$ des Signals in eine Fourierreihe, also in die Summe unendlich vieler Kosinus- und Sinusfunktionen, bedeutet physikalisch die Zerlegung in seine harmonischen Bestandteile. Diese bestehen aus der Grundschwingung mit der Kreisfrequenz ω und den Oberschwingungen mit den Kreisfrequenzen $n\omega$. Die Stärke des Einflusses der Oberschwingungen stellen die Fourierkoeffizienten als Amplituden am Signal dar. Da die Kosinusfunktion eine Phasenverschiebung der Sinusfunktion darstellt, kann die Überlagerung der Sinus- und Kosinusfunktionen aufgrund gleicher Kreisfrequenz für ein bestimmtes n auch geschrieben werden als

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n). \quad (2.26)$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

überprüfen wir das Ergebnis (2.26):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n \sin \phi_n}_{a_n} \cos n\omega t + \underbrace{A_n \cos \phi_n}_{b_n} \sin n\omega t.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Um die Beziehung zwischen A_n , a_n , b_n und ϕ_n aufzudecken, müssen wir lediglich aus (2.27) die beiden Gleichungen

$$a_n = A_n \sin \phi_n \quad (2.28)$$

$$b_n = A_n \cos \phi_n \quad (2.29)$$

quadrieren und danach addieren:

$$a_n^2 + b_n^2 = A_n^2 \cdot \underbrace{(\sin^2 \phi_n + \cos^2 \phi_n)}_1.$$

Es ergibt sich also:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (2.30)$$

Dividieren wir die Gleichung (2.28) durch (2.29), erhalten wir leicht:

$$\tan \phi_n = \frac{\sin \phi_n}{\cos \phi_n} = \frac{a_n}{b_n}. \quad (2.31)$$

In der praktischen Anwendung (z. B. Elektrotechnik) wird häufig die Form (2.26) benutzt.

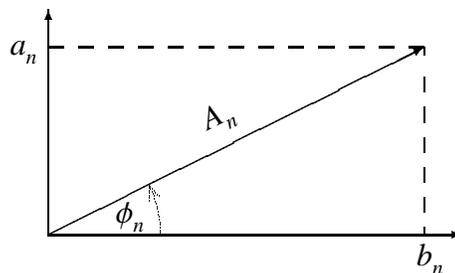


Abb. 2.7: Geometrische Darstellung der Beziehung zwischen a_n , b_n , A_n und ϕ_n

Hierbei ist A_n die Gesamtamplitude, mit der die Kreisfrequenz $n\omega$ im Signal vorkommt. Der Wert $\frac{a_0}{2}$ wird als Gleichanteil in $f(t)$ (zum Beispiel der Gleich(spannungs)anteil in einer Wechselspannung) bezeichnet und entspricht dem Mittelwert der Funktion innerhalb einer Schwingungsdauer. Zur grafischen Darstellung verwendet man häufig die beiden folgenden Diagramme:

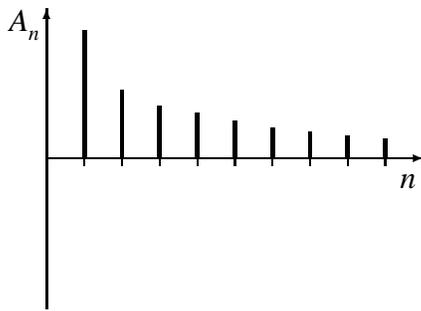


Abb. 2.8: Amplitudenspektrum

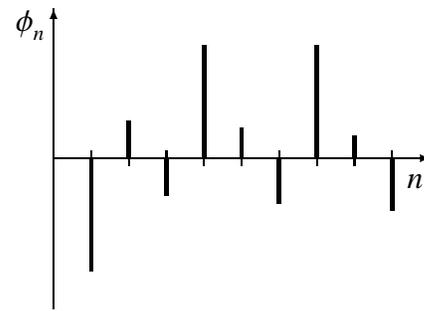


Abb. 2.9: Phasenspektrum

In diesen Schaubildern werden die Gesamtamplitude A_n (Amplitudenspektrum) und die Phasen ϕ_n (Phasenspektrum) als Werte über den diskreten Frequenzen abgetragen. Das Amplitudenspektrum ist dabei interessanter und verdeutlicht, welche Frequenzanteile in einer Fourierreihe enthalten sind. Anhand der sinkenden Amplituden in Abhängigkeit von n ist gut erkennbar, wie schnell die Fourierreihe die zu approximierende Funktion darstellt. Die Größe

$$\sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} |c_n|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2}}$$

heißt Klirrfaktor. Der Klirrfaktor ist ein Maßstab für den Oberschwingungsanteil von $f(t)$ und damit ein Maß für die Verzerrung von f gegenüber der reinen Grundschwingung.

2.7 Die Fourierreihe in komplexer Darstellung

Für rechnerische Zwecke ist meist eine komplexe Darstellung nützlicher. Die Darstellung in komplexer Schreibweise ergibt sich direkt aus der Eulerschen Formel

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1. \quad (2.32)$$

Mit (2.32) und $y = n\omega t$ aus unserer Fourierreihe (2.25) ergibt sich durch einfaches Einsetzen:

$$e^{in\omega t} = \cos n\omega t + i \sin n\omega t \quad (2.33)$$

$$e^{-in\omega t} = \cos n\omega t - i \sin n\omega t. \quad (2.34)$$

Wir addieren (2.33) und (2.34) und erhalten:

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}). \quad (2.35)$$

Wenn wir nun (2.34) von (2.33) subtrahieren, kommen wir zu

$$\begin{aligned}\sin n\omega t &= \frac{1}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) \\ &= -\frac{i}{2} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}).\end{aligned}\quad (2.36)$$

Das Einsetzen von (2.35) und (2.36) in unsere Fourierreihe (2.25) führt uns zu folgendem Ergebnis

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) - b_n \frac{i}{2} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\omega t} \underbrace{\frac{1}{2} (a_n - ib_n)}_{c_n} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\omega t} \underbrace{\frac{1}{2} (a_n + ib_n)}_{\bar{c}_n}.\end{aligned}$$

Beim Übergang zu $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ setzen wir $c_0 := \frac{a_0}{2}$, $c_n := \frac{1}{2} (a_n - ib_n)$ und $c_{-n} := \frac{1}{2} (a_n + ib_n) = \bar{c}_n$ und erhalten schließlich

$$\mathcal{F}(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}. \quad (2.37)$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten c_n lassen sich leicht aus (2.23) und (2.24) ermitteln:

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} \int_0^{2p} f(t) \cos n\omega t \, dt - i \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(t) \sin n\omega t \, dt \right) \\ &= \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(t) e^{-in\omega t} \, dt.\end{aligned}\quad (2.38)$$

2.7.1 Eigenschaften der komplexen Formulierung

1. Die Fourierreihe wird durch **eine** Summenformel und über **einen** Koeffizienten c_n bestimmt. Die Berechnungen erscheinen dadurch zumeist einfacher, da lediglich **ein** Integral zu lösen ist.
2. Formal kommen aufgrund des Übergangs zu $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ negative Kreisfrequenzen $n\omega$ vor, was aber nur von der komplexen Formulierung herrührt. Sie werden zur Beschreibung der reellen Schwingungen $\sin(n\omega)$ und $\cos(n\omega)$ mit positiver Kreisfrequenz $n\omega > 0$ benötigt.

3. Der Zusammenhang der Koeffizienten beider Darstellungen ergibt sich aus der Eulerschen Formel (2.32):

- Die Definition $c_0 := \frac{1}{2}a_0$ stellt physikalisch den Gleichspannungsanteil des Signals dar.
- $c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathbf{i}b_n)$, $n = 1, \dots, N$
- $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathbf{i}b_n)$, $n = 1, \dots, N$
- Da c_n und $c_{-n} = \overline{c_n}$ ein Paar komplex-konjugierter Zahlen ist, folgt bekanntlich die Gleichheit der jeweiligen Beträge:

$$|c_n| = |c_{-n}| = \left| \frac{1}{2}(a_n + \mathbf{i}b_n) \right| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2}A_n.$$

Der Betrag der komplexen Fourierkoeffizienten stimmt bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ mit A_n überein und stellt jeweils zur Hälfte, also von $-\infty$ bis -1 und von 1 bis ∞ , das Amplitudenspektrum dar (vgl. S. 33).

- $a_0 = 2c_0$
- $a_n = c_n + c_{-n}$, $n = 1, \dots, N$
- $b_n = \mathbf{i}(c_n - c_{-n})$, $n = 1, \dots, N$
- Aus den eben genannten Punkten ergibt sich für die Phase ψ_n der komplexen Fourierkoeffizienten folgender Zusammenhang:

$$\tan \psi_n = \frac{\operatorname{Im} c_n}{\operatorname{Re} c_n} = \frac{-\frac{1}{2}b_n}{\frac{1}{2}a_n} = -\frac{b_n}{a_n}.$$

Häufig werden in der Literatur [Brigola97] auch die Phasen der komplexen Fourierkoeffizienten als Werte über den diskreten Frequenzen abgetragen. Sie unterscheiden sich von ϕ_n (2.31) auf S. 33 nur um $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

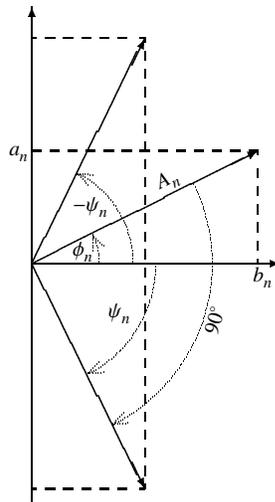


Abb. 2.10: Geometrische Darstellung der Beziehung zwischen ϕ_n und ψ_n

| | | |
|---|--|---------------------------------|
| Periode 2π | Periode $2p$ $\omega = \frac{\pi}{p}$ | |
| $\mathcal{F}(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ | $\mathcal{F}(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$ | Allgemeine Reihendarstellung |
| $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ $n \in \mathbb{Z}$ | $c_n = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(t) e^{-in\omega t} dt$ $n \in \mathbb{Z}$ | Formeln für Koeffizienten |

Tab. 2.6: Fourierreihen einer 2π - und $2p$ -periodischen Funktion in komplexer Darstellung**Beispiel 2.6**

Wir wählen die in der Praxis häufig vorkommende „Heaviside-Funktion“, die folgendermaßen definiert ist:

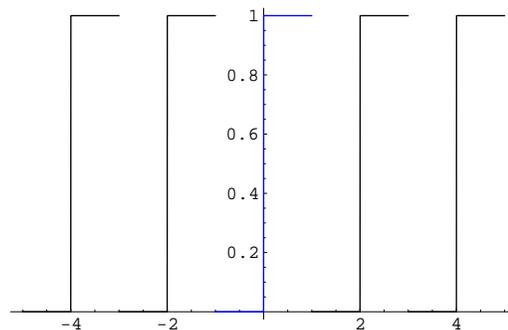
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t > 0, \\ 0 & \text{wenn } t < 0. \end{cases}$$

In *Mathematica* definieren wir die Heaviside-Funktion mit Hilfe der `UnitStep[]`-Funktion:

```
In[45] := f = UnitStep[t];
        d = {t, -1, 1};
```

Wir sehen uns die periodische Fortsetzung an:

```
In[46] := PlotPeriodicalContinuation[f, d, 2, PlotRange -> All]
```



```
Out[46]= -Graphics-
```

Die Funktion ist offensichtlich nicht symmetrisch zum Koordinatenursprung, daher können nicht alle Koeffizienten a_n gleich Null sein:

```
In[47]:= FourierCosSeriesCoefficientExact[f, d, n]
```

```
Out[47]= If[n == 0, 1/2, 0]
```

```
In[48]:= FourierSinSeriesCoefficientExact[f, d, n]
```

```
Out[48]= If[n == 0, 0, -1 + (-1)^n / (nπ)]
```

Die Fourierreihe in trigonometrischer Darstellung besitzt demnach die Form:

```
In[49]:= FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
```

```
Out[49]= 1/2 + Sum[-(-1 + (-1)^n) Sin[nπt] / (nπ), {n, 1, ∞}]
```

Wir haben auch die Möglichkeit, die komplexen Koeffizienten c_n exakt zu berechnen:

```
In[50]:= FourierExpSeriesCoefficientExact[f, d, n]
```

```
Out[50]= If[n == 0, 1/2, I(-1 + (-1)^n) / (2nπ)]
```

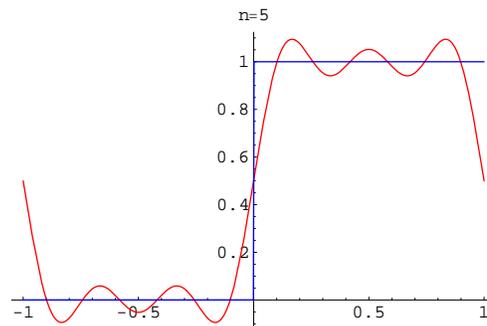
Die Fourierreihe in komplexer Darstellung kann geschrieben werden in der Form:

```
In[51]:= FourierExpSeriesExact[f, d, n]
```

```
Out[51]= 1/2 + Sum[I(-1 + (-1)^n) e^{Inπt} / (2nπ), {n, 1, ∞}] + Sum[I(-1 + (-1)^n) e^{Inπt} / (2nπ), {n, -∞, -1}]
```

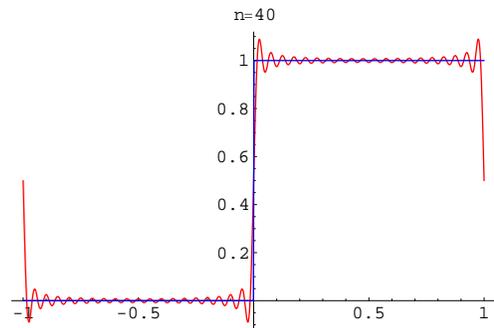
Wir lassen uns die Graphen der Funktion $f(t)$ und ihrer Approximation der Ordnung 5 und 40 zeichnen:

```
In[52]:= PlotFourierImageExact[f, d, n, 5, PlotRange -> All]
```



```
Out[52]= -Graphics-
```

```
In[53]:= PlotFourierImageExact[f, d, n, 40, PlotRange -> All]
```



`Out[53]= -Graphics-`

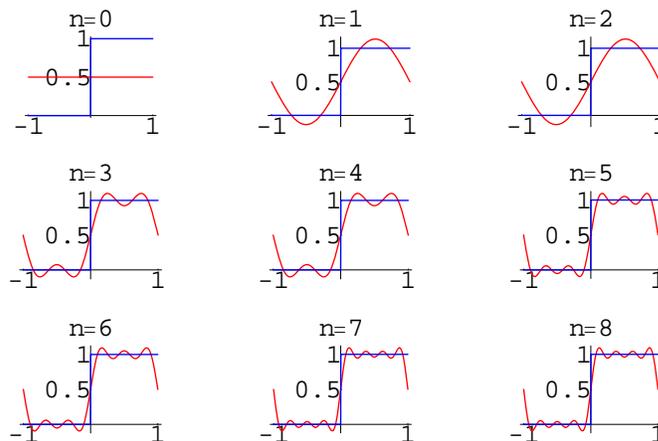
Auch hier müssen wir einige Summenglieder berechnen, um die Fourierreihe halbwegs anschaulich an die Funktion anzunähern. Das Gibbsche Phänomen ist wieder gut erkennbar. Die Fourierkoeffizienten verhalten sich proportional zu $\frac{1}{n}$.

Es besteht die Möglichkeit mit *Mathematica* Animationen zu erzeugen, wobei der Eindruck der Bewegung durch eine schnelle Abfolge einzelner Bilder erreicht wird (Daumenkino). Aus Platzgründen wurden die erzeugten Bilder in einer Bilder-Matrix dargestellt.

```
In[54]:= PlotFourierAnimationExact[f, d, n, 8,
      Ticks -> {{-1, 1}, {0, 0.5, 1}}, DisplayFunction -> Identity]
```

```
Out[54]= {-Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-,
  -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-,
  -Graphics-}
```

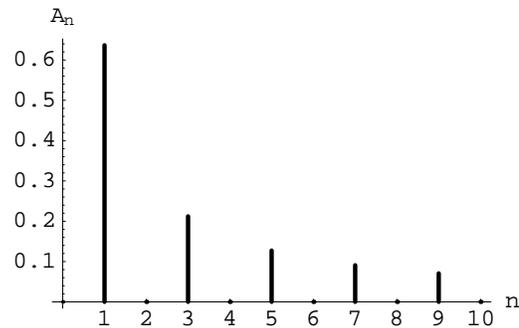
```
In[55]:= Show[GraphicsArray[Partition[%, 3]]]
```



`Out[55]= -GraphicsArray-`

Wir schauen uns nun das Amplitudenspektrum an.

```
In[56]:= PlotFourierAmplitudeSpectrumExact[f, d, n, 10]
```

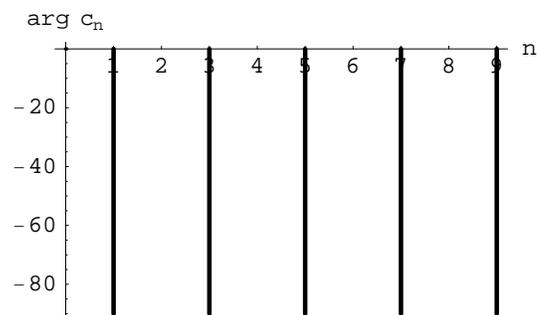


Out[56]= -Graphics-

Dies bestätigt anschaulich unsere Aussage von vorhin, daß die Fourierreihe nur langsam die zugrundeliegende Funktion approximiert. Wir erkennen auch an dieser Grafik, daß die Fourierkoeffizienten b_n und c_n ($n > 0$) für gerade n gleich 0 sind. Dies bestätigt auch die oben dargestellte Animation, da auffällt, daß sich für $n > 0$ nur jede zweite Grafik ändert.

Nachfolgend sehen wir das Phasenspektrum.

In[57]:= `PlotFourierPhaseSpectrumExact[f, d, n, 10]`



Out[57]= -Graphics-

In einer übersichtlichen Tabelle haben wir die Möglichkeit, für die ersten n_0 Glieder (im Beispiel $n_0 = 5$) der Fourierreihe die wichtigsten Parameter darzustellen:

In[58]:= `FourierTableExact[f, d, n, 5]`

Out[58]= `UnitStep[t] ≈ ℱ5[UnitStep[t]] =`

$$\sum_{n=-5}^5 c_n \text{Exp}[In\pi t] = a_0 + \sum_{n=1}^5 (a_n \text{Cos}[n\pi t] + b_n \text{Sin}[n\pi t]) =$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^5 A_n \text{Sin}[n\pi t + \Phi_n]$$

$$\text{Out}[58]= \left(\begin{array}{cccccc} n & a_n & b_n & c_n & A_n & \Phi_n \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{undefined} \\ 3 & 0 & \frac{2}{3\pi} & -\frac{2}{3\pi} & \frac{2}{3\pi} & -\frac{\pi}{2} \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{undefined} \\ 5 & 0 & \frac{2}{5\pi} & -\frac{2}{5\pi} & \frac{2}{5\pi} & -\frac{\pi}{2} \end{array} \right)$$

Bemerkung 2.7.1 Für $n = 2, 4, \dots$ ist der Winkel $\phi_n = \text{undefined}$. Dies tritt immer für $c_n = 0$ auf, da $\arg c_n$ nur für $c_n \neq 0$ definiert ist. Das Argument stellt den Winkel zwischen $\text{Re } c_n$ und $\text{Im } c_n$ dar. Wenn Realteil und Imaginärteil beide Null sind, kann dieser Winkel nicht bestimmt werden. Es kann jedoch angenommen werden, daß, falls ein Winkel ermittelbar ist, dieser im Intervall $[-\pi, \pi]$ bzw. $[0, 2\pi]$ liegen muß, was *Mathematica* in solchen Fällen normalerweise auch angibt:

```
In[59]:= Arg[0]
```

```
Arg::indet : Indeterminate expression Arg[0] encountered.
```

```
Out[59]= Interval[{-π, π}]
```

Schließlich berechnen wir noch den Klirrfaktor:

```
In[60]:= FourierHarmonicDistortionExact[f, d, n]
```

```
Out[60]=  $\frac{\sqrt{-8 + \pi^2}}{\pi}$ 
```

```
In[61]:= %/N
```

```
Out[61]= 0.435236
```

Der Anteil der Oberschwingungen an der Gesamtschwingung beträgt 43,5%.

2.8 Konvergenzbetrachtungen

2.8.1 Besselsche Ungleichung, Parsevalsche Gleichung

Konvergiert die Fourierreihe $\mathcal{F}(f)(t)$ gegen die Funktion $f(t)$, können wir folgenden Satz formulieren:

Satz 2.8.1 Sei $f(t)$ eine stückweise stetige und $2p$ -periodische Funktion, dann gilt die folgende Besselsche Ungleichung:

$$0 \leq \frac{1}{2p} \int_0^{2p} (f(t) - \mathcal{F}_N(f)(t))^2 dt = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f^2(t) dt - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \quad (2.39)$$

wobei

$$\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2). \quad (2.40)$$

Für wachsende N wird die Approximation von $f(t)$ durch $\mathcal{F}_N(f)(t)$ im quadratischen Mittel immer besser.

Beweis: Für die Partialsummen $\mathcal{F}_N(f)(t)$ der Fourierreihe von $f(t)$ gilt mit den Rechenregeln für konjugiert komplexe Zahlen und $\omega = \frac{\pi}{p}$:

$$\frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(t) \cdot \mathcal{F}_N(f)(t) dt = \sum_{n=-N}^N c_n \underbrace{\frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(t) e^{in\omega t} dt}_{c_{-n} = \bar{c}_n} = \sum_{n=-N}^N c_n \bar{c}_n = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2.$$

Mit den umformulierten Orthogonalitätsrelationen aus Tab. 2.1 auf S. 13

$$\frac{1}{2p} \int_0^{2p} e^{im\omega t} e^{-in\omega t} dt = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

erhalten wir auch für

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \mathcal{F}_N(f)(t) \cdot \mathcal{F}_N(f)(t) dt &= \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \left(\sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t} \cdot \sum_{m=-N}^N c_m e^{im\omega t} \right) dt \\ &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_n c_m \underbrace{\frac{1}{2p} \int_0^{2p} e^{in\omega t} e^{im\omega t} dt}_{\substack{1, m = -n \\ 0, m \neq -n}} \\ &= \sum_{n=-N}^N c_n c_{-n} = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2p} \int_0^{2p} (f(t) - \mathcal{F}_N(f)(t))^2 dt = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} (f(t) - \mathcal{F}_N(f)(t))(f(t) - \mathcal{F}_N(f)(t)) dt \\ &= \frac{1}{2p} \left(\int_0^{2p} f^2(t) dt - 2 \int_0^{2p} f(t) \cdot \mathcal{F}_N(f)(t) dt + \int_0^{2p} \mathcal{F}_N(f)(t) \cdot \mathcal{F}_N(f)(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f^2(t) dt - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2. \end{aligned}$$

Damit ist (2.39) gezeigt. Die Gleichung (2.40) ergibt sich aus den Umrechnungsformeln für die Fourierkoeffizienten (vgl. S. 35):

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n^2 &= (c_n + c_{-n})(c_n + c_{-n}) + (c_n - c_{-n})i(c_n - c_{-n})i \\ &= 4c_n c_{-n}, \end{aligned}$$

also $a_0^2 = 4c_0^2$, $a_n^2 + b_n^2 = 2(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$ für $n \geq 1$ und damit

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (a_n^2 + b_n^2) \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

■

Für $N \rightarrow \infty$ ergibt sich nun die *Parsevalsche Gleichung*:

Satz 2.8.2 Sei $f(t)$ eine stückweise stetige und $2p$ -periodische Funktion, dann gilt:

$$0 = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} (f(t) - \mathcal{F}(f)(t))^2 dt = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f^2(t) dt - \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (2.41)$$

Der Beweis findet sich in [StGaVo97, S. 163]. Für den Fall, daß die Funktion durch eine Fourierreihe dargestellt werden kann, verschwindet also das mittlere Fehlerquadrat im Grenzübergang. Aus (2.41) folgt, daß sich Grenzwerte von Reihen auch einfach mit Hilfe der *Parsevalschen Gleichung* ermitteln lassen.

Schon aus der *Besselschen Ungleichung* folgt, daß die Fourierkoeffizienten von $f(t)$ quadratisch summierbar sind:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Durch die endliche Anzahl von Gliedern der Fourierreihe $\mathcal{F}(f)(t)$ bekommen wir eine mehr oder weniger gute Approximation für die Funktion $f(t)$. Je mehr Glieder berechnet werden, desto besser ist die Näherung. Aus der quadratischen Summierbarkeit der $|c_n|$ erhalten wir den auch als *Riemann-Lebesgue-Lemma* [Brigola97] bekannten

Satz 2.8.3 Sei $f(t)$ eine stückweise stetige $2p$ -periodische Funktion. Für die Fourierkoeffizienten a_n, b_n, c_n der Fourierreihe $\mathcal{F}(f)(t)$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

Das *Riemann-Lebesgue-Lemma* bedeutet anschaulich, daß die Integrale, z. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2p} f(t) \cos(n\omega t) dt = 0$ mit wachsendem n durch die immer dichteren Oszillationen der Kosinus-Schwingung verschwinden.

Wie wir in den Beispielen feststellen konnten, konvergieren die behandelten Fourierreihen unterschiedlich schnell an die jeweils zu approximierende Funktion. Wir erkennen folgenden Zusammenhang:

$$a_n, b_n \approx \begin{cases} \frac{1}{n} & f(t) \text{ hat Sprungstellen,} \\ \frac{1}{n^2} & f(t) \text{ hat keine Sprungstellen.} \end{cases}$$

Fourierreihen stetiger Funktionen konvergieren also schneller, und wir benötigen weniger Glieder in der trigonometrischen Reihe für eine gute Näherung. Es gilt der aus [Westermann97] entnommene

Satz 2.8.4 *Ist f eine $2p$ -periodische, $(m+1)$ -mal stetige differenzierbare Funktion, dann gilt für die Fourierkoeffizienten von f*

$$|a_n| \leq \frac{c}{n^{m+2}} \quad \text{und} \quad |b_n| \leq \frac{c}{n^{m+2}}.$$

Der Beweis zum Satz ist in [Brigola97, S. 40] nachlesbar. Beispiele für $m = 0$ sind 2.3, 2.5 und Beispiele für $m = -1$ sind 2.1, 2.2, 2.4, 2.6.

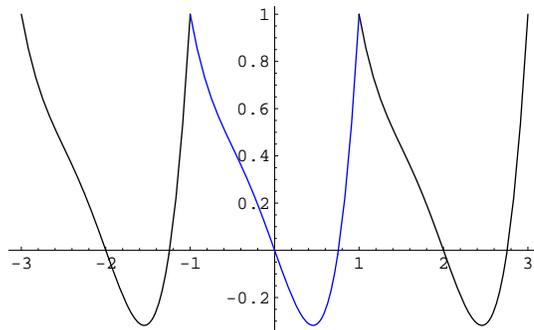
Beispiel 2.7

Wir wählen uns die Funktion:

```
In[62]:= f = t^4 + t^3 - t;
          d = {t, -1, 1};
```

Zunächst lassen wir uns den Graph der periodischen Fortsetzung zeichnen und die zugehörige Fourierreihe ausgeben:

```
In[63]:= PlotPeriodicalContinuation[f, d, 1]
```



```
Out[63]= -Graphics-
```

$$\begin{aligned} \text{In}[64] &:= \text{FourierTrigSeriesExact}[\mathbf{f}, \mathbf{d}, \mathbf{n}] \\ \text{Out}[64] &= \frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n (2(-6 + n^2\pi^2) \cos[n\pi t] + 3n\pi \sin[n\pi t])}{n^4\pi^4} \end{aligned}$$

Mit der Parsevalschen Gleichung lassen sich neue Einsichten über Reihen zeigen:

$$\begin{aligned} \text{In}[65] &:= \text{FourierParsevalExact}[\mathbf{f}, \mathbf{d}, \mathbf{n}] \\ \text{Out}[65] &= \frac{59}{315} = \frac{1}{25} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(144 - 39n^2\pi^2 + 4n^4\pi^4)}{n^8\pi^8} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Grenzwert für die nachstehende Summe:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(144 - 39n^2\pi^2 + 4n^4\pi^4)}{n^8} &= \left(\frac{59}{315} - \frac{1}{25} \right) \frac{\pi^8}{8} \\ &= \frac{29\pi^8}{1575}. \end{aligned}$$

Mittels der Option `FourierFunction->Evaluate` stellt *Mathematica* die Gleichheit beider Seiten der Gleichung fest.

$$\begin{aligned} \text{In}[66] &:= \text{FourierParsevalExact}[\mathbf{f}, \mathbf{d}, \mathbf{n}, \text{FourierFunction} \rightarrow \text{Evaluate}] \\ \text{Out}[66] &= \text{True} \end{aligned}$$

2.8.2 Dirichlet-Kerne

In Vorbereitung auf den Beweis des Satzes von Dirichlet im Abschnitt 2.8.3 beschäftigen wir uns zunächst mit den sogenannten Dirichlet-Kernen.

Wir schreiben uns noch einmal die Formeln der komplexen Darstellung der abgebrochenen Fourierreihe (2.37) sowie deren Fourierkoeffizienten (2.38) auf:

$$\mathcal{F}_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t}, \quad N \in \mathbb{N}$$

mit den zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n = -N, \dots, N.$$

Aus beiden Formeln läßt sich für $\mathcal{F}_N(f)(t)$ auch folgendes schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N(f)(t) &= \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(s) e^{-in\omega s} ds \right) e^{in\omega t} \\ &= \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(s) \underbrace{\sum_{n=-N}^N e^{in\omega(t-s)} ds}_{D_N(t-s)} ds. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Demnach ist gezeigt, daß jede $2p$ -periodische, abgebrochene Fourierreihe $\mathcal{F}(f)(t)$ vom Grad N die folgende Integraldarstellung besitzt:

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(s) D_N(t-s) \, ds \quad \text{mit} \quad D_N(t) := \sum_{n=-N}^N e^{in\omega t}. \quad (2.43)$$

Wir definieren uns das trigonometrische Polynom $D_N(u)$ aus (2.43):

Definition 2.8.5 Es sei $N \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$ und $\omega = \frac{\pi}{p}$. Das trigonometrische Polynom

$$D_N(u) = \sum_{n=-N}^N e^{in\omega u}$$

heißt *Dirichlet-Kern vom Grad N mit Periode $2p$* .

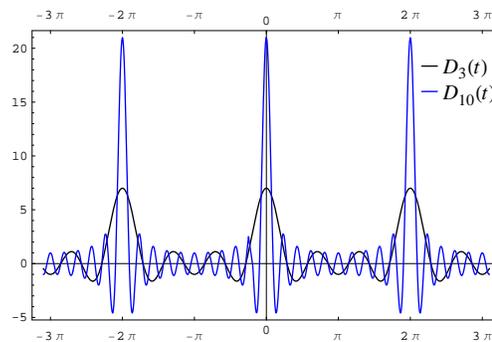


Abb. 2.11: Die Graphen der 2π -periodischen Dirichlet-Kerne der Ordnung $N = 3$ und $N = 10$

Die Dirichlet-Kerne spielen beim Beweis des Satzes von Dirichlet eine entscheidene Rolle. Wir halten zunächst fest, daß sich $D_N(t)$ mit Hilfe von (2.33) und (2.34) auch schreiben läßt als

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{n=-N}^N e^{int} = 1 + \sum_{n=-N}^{-1} e^{int} + \sum_{n=1}^N e^{int} \\ &= 1 + (\cos t + i \sin t) + (\cos 2t + i \sin 2t) + \dots + (\cos Nt + i \sin Nt) \\ &\quad + (\cos t - i \sin t) + (\cos 2t - i \sin 2t) + \dots + (\cos Nt - i \sin Nt) \\ &= 1 + 2 \cos t + 2 \cos 2t + \dots + 2 \cos Nt \\ &= 1 + \sum_{n=1}^N 2 \cos nt. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Wir substituieren $z = e^{it}$ und berechnen $D_N(t)$ für $z \neq 1$ mittels der bekannten Formel für die Summe der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{2N} z^n = \frac{z^{2N+1} - 1}{z - 1}.$$

Mit $k \in \mathbb{Z}$ und $t \neq 2\pi k$ erhalten wir

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{n=-N}^N z^n = z^{-N} + z^{-N+1} + \dots + z^{-1} + 1 + z^1 + \dots + z^{N-1} + z^N \\ &= \frac{1 + z + \dots + z^{2N}}{z^N} = \frac{z^{2N+1} - 1}{(z - 1) z^N} \\ &= \frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z - 1} = \frac{z^{N+\frac{1}{2}} - z^{-(N+\frac{1}{2})}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin \frac{t}{2}}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Für $t = 2\pi k$ ist (2.45) nicht definiert, jedoch für (2.44), und man kann zusammenfassend $D_N(t)$ folgendermaßen darstellen:

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = \begin{cases} 2N + 1 & \text{für } t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin \frac{t}{2}} & \text{für } t \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Satz 2.8.6 Für die Dirichlet-Kerne $D_N(t)$ gilt [Brigola97]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N e^{int} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{n=1}^N 2 \cos nt \right) = \begin{cases} +\infty & \text{für } t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{unbestimmt divergent} & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.8.3 Beweis des Satzes von Dirichlet

Gegenstand dieses Abschnitts ist der Beweis des Satzes von Dirichlet 2.3.10 über die punktweise Darstellung stückweise stetig differenzierbarer periodischer Funktionen durch ihre Fourierreihen [Brigola97].

Satz 2.8.7 Die Fourierreihe $\mathcal{F}(f)(t)$ einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion $f(t)$ konvergiert an jeder Stelle t gegen $\frac{f_-(t) + f_+(t)}{2}$.

Beweis: Wir nehmen o. B. d. A. an, daß die Funktion $2p$ -periodisch mit $2p = 1$ ist und die Fourierkoeffizienten c_n besitzt.

1. Wir notieren uns zunächst die 1-periodischen Dirichlet-Kerne, also $\omega = 2\pi$:

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{i2\pi nt} = \begin{cases} 2N+1 & \text{für } t \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin \pi t} & \text{für } t \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da $D_N(t)$ wie in Abbildung 2.11 gut erkennbar eine gerade Funktion ist, erhalten wir mit anschließender Integration über dem Periodenintervall (siehe auch [Brigola97, S. 22]):

$$\int_0^1 D_N(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} D_N(t) dt = 1.$$

2. D_N und $f(t)$ sind 1-periodisch. Wie mit (2.42) bereits gezeigt wurde, ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N(f)(t) &= \sum_{n=-N}^N \int_0^1 f(s) e^{-i2\pi ns} ds e^{i2\pi nt} = \int_0^1 D_N(t-s) f(s) ds \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(s) f(t-s) ds = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2N+1)\pi s)}{\sin \pi s} f(t-s) ds. \end{aligned}$$

3. Das letzte Integral formen wir um:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N(f)(t) &= \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^0 \sin((2N+1)\pi s) \frac{f(t-s) - f_+(t)}{\sin \pi s} ds + f_+(t) \int_{-\frac{1}{2}}^0 D_N(s) ds}_{I_1(N,t)} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \sin((2N+1)\pi s) \frac{f(t-s) - f_-(t)}{\sin \pi s} ds + f_-(t) \int_0^{\frac{1}{2}} D_N(s) ds}_{I_2(N,t)} \\ &= \frac{f_-(t) + f_+(t)}{2} + I_1(N, t) + I_2(N, t). \end{aligned}$$

4. Weil nach Voraussetzung $f(t)$ stückweise stetig differenzierbar ist, existieren die beiden Grenzwerte

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{f(t-s) - f_+(t)}{\sin \pi s} \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t-s) - f_-(t)}{\sin \pi s}.$$

Mit dieser Feststellung sind die Integrale $I_1(N, t)$ und $I_2(N, t)$ beschränkt und stückweise stetig. Nach dem *Riemann-Lebesgue-Lemma* 2.8.3 auf S. 42 werden diese

Integrale durch die zunehmenden Oszillationen der Funktion $\sin((2N + 1)\pi s)$ für $N \rightarrow \infty$ gelöscht:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_1(N, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} I_2(N, t) = 0 \quad \forall t.$$



3 Das *Mathematica*-Paket *FTOOLS.M*

Da das Paket ein wesentlicher Bestandteil der Diplomarbeit ist, wird in diesem Kapitel ausführlich darauf eingegangen und kann insbesondere zum Nachschlagen verwendet werden.

3.1 Die Palette *FOURIERPALETTE.NB*

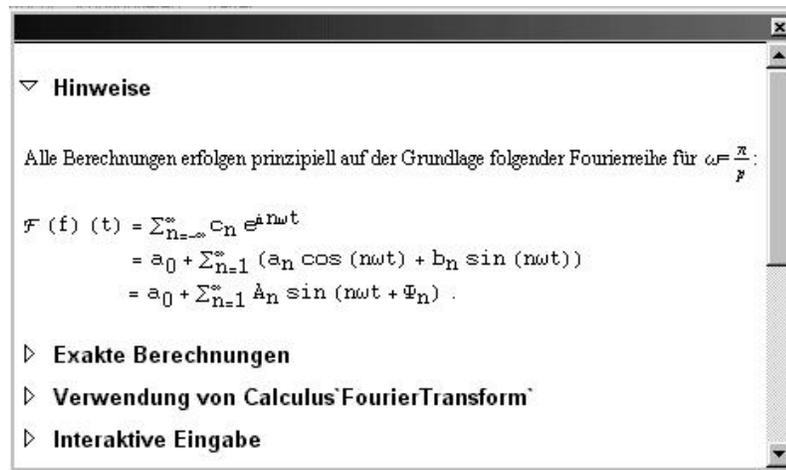
Mathematica 3.0 bietet im Zusammenhang mit einem grafischen Frontend die Möglichkeit sogenannte Paletten zu erstellen, um schnell und bequem aus einem gesonderten Fenster Funktionen auswählen zu können. Ich habe eine Palette *FOURIERPALETTE.NB* erstellt, die übersichtlich alle Funktionen aus meinem Paket enthält. Wer bereits die Standardpaletten von *Mathematica 3.0* verwendet hat, dem wird der Umgang mit meiner Palette nicht schwerfallen. Es ist im Gegenteil sogar bei den ersten Schritten zum Kennenlernen der neuen Funktionen zu empfehlen.

Die Palette ist in vier Teile gegliedert. Der erste enthält zunächst Hinweise (vgl. Abbildung 3.1 auf S. 50) zum Aufbau der Fourierreihe.

Der zweite Teil „Exakte Berechnungen“ (vgl. Abbildung 3.2 auf S. 51) ist der wohl wichtigste Teil. Fast alle der hier aufgeführten Funktionen führen auf der Grundlage selbst erstellter *Mathematica*-Programme exakte Berechnungen durch und sind daher an der Endung „Exact“ der betreffenden Funktion zu erkennen.

Im dritten Teil „Verwendung von `Calculus'FourierTransform'`“ (vgl. Abbildung 3.3 auf S. 77) sind Funktionen aufgelistet, die im Prinzip dieselben Ergebnisse bzw. Grafiken wie die korrespondierenden Funktionen im Teil „Exakte Berechnungen“ liefern. Allerdings führen diese ihre Berechnungen auf der Grundlage der im Standard-Paket `Calculus'FourierTransform'` bereitgestellten Funktionen durch. Diese zumeist grafisch resultierenden Funktionen stellen also eine Möglichkeit dar, nur auf die im Paket `Calculus'FourierTransform'` bereitgestellten Funktionen zurückzugreifen.

Im vierten Teil habe ich versucht, die interaktiven Möglichkeiten von *Mathematica* zu nutzen. Diese sind allerdings in der Version 3.0 sehr beschränkt und wenig benutzerfreundlich. Da sich dies aber vielleicht in der kürzlich erschienenen Version 4.0 geändert haben könnte, habe ich die bisherigen Möglichkeiten in die Palette mit aufgenommen,

Abb. 3.1: Screenshot von *FOURIERPALETTE.NB* – Hinweise

sollte aber gewissermaßen als Bonus und nicht als wesentlicher Bestandteil der Palette und des Paketes angesehen werden.

Sämtliche Funktionen beziehen ihre Ergebnisse auf die Fourierreihe der Form ($\omega = \frac{\pi}{p}$):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f)(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n).
 \end{aligned}$$

Bemerkung 3.1.1 Während der Programmierung und der Benutzung des Paketes hatte ich oft das Problem unter Windows, daß *Mathematica* (betrifft die Kernel 3.0 und 3.0.1) die Berechnung mit der Meldung „Out of memory“ ohne Ergebnis abbrach, wobei der Kernel abstürzte, das Frontend jedoch nicht. *Wolfram Research* ist das Problem bekannt und stellt auf der Seite <http://support.wolfram.com/Systems/Windows/OutOfMemory.html> einen überarbeiteten Kernel (48128 Bytes) zum Download bereit.

3.2 Exakte Berechnungen

Mit exakten Berechnungen sind Funktionen gemeint, die zunächst intern die Fourierkoeffizienten in Abhängigkeit eines Indexes (z. B. n) bestimmen, also durch die Möglichkeit symbolischer Integration die exakte Fourierreihe berechnen und daraus je nach Aufgabe der aufgerufenen Funktion das entsprechende Ergebnis liefern.

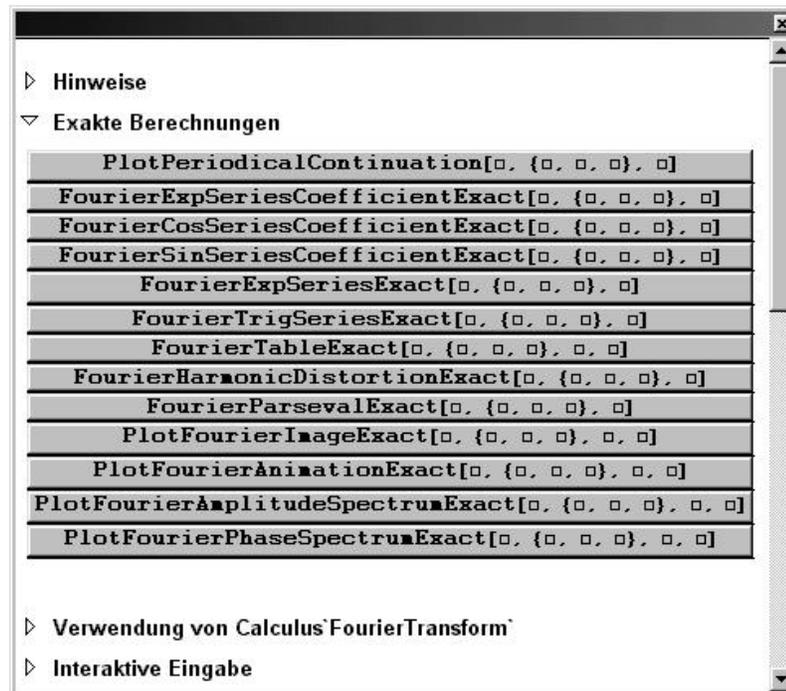


Abb. 3.2: Screenshot von *FOURIERPALETTE.NB*-Exakte Berechnungen

3.2.1 Syntaxbeschreibung

Im folgenden werden die exakt rechnenden Funktionen und deren mögliche Optionen kurz tabellarisch erfaßt. Zum besseren Verständnis folgen hiernach einige Beispiele, wobei das erste sich immer auf die auf S. 52 definierte Funktion f bezieht. Der Leser kann somit jedes Ergebnis einer Funktion mit dem Ergebnis anderer Funktionen für die feste Funktion f vergleichen. Etwaige besondere Optionen werden an anderen Funktionen verdeutlicht.

3.2.1.1 PlotPeriodicalContinuation[]

Diese Funktion paßt eigentlich nicht in die Kategorie „Exakte Berechnungen“, genau genommen in keine der vorhandenen, da sie intern keine Berechnungen bezüglich der Fourieranalyse anstrengt, was sich auch im Namen der Funktion niederschlägt (Fourier und Exact fehlen im Wortstamm des Funktionsnamens).

```
PlotPeriodicalContinuation[expr, {x, x0, x1}, n0]
```

zeichnet die $(n_0 + 1)$ -fache periodische Fortsetzung von *expr*.

Syntax von PlotPeriodicalContinuation[]

| Optionsname | Vorgabe | |
|--|-------------------------------|---|
| <i>siehe</i> Options[Plot] ¹ | <i>siehe</i> Options[Plot] | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls Plot[] |

Optionen von PlotPeriodicalContinuation[]

Hier wird zunächst das Paket geladen, welches wiederum intern das Paket Calculus'FourierTransform' lädt.

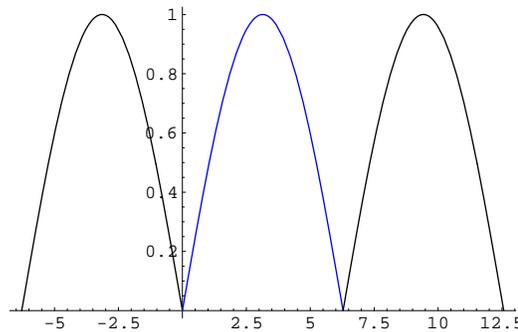
```
In[1]:= << eigene`ftools`
```

Wir definieren die Funktion f , die auch in den nachfolgenden einleitenden Beispielen immer wieder als erstes herangezogen wird.

```
In[2]:= f = Sin[t/2];
        d = {t, 0, 2π};
```

Dies zeichnet den Graph der periodischen Fortsetzung von f als Funktion von t ausgehend vom Periodenintervall $[0, 2\pi]$ auf $[-2\pi, 4\pi]$. Die als letzter Parameter übergebene Ziffer 1 bewirkt, daß der Graph der Funktion f insgesamt 3-mal periodisch versetzt, also links und rechts vom Periodenintervall (blauer Kurvenabschnitt) zusätzlich 1-mal gezeichnet wird.

```
In[3]:= PlotPeriodicalContinuation[f, d, 1]
```

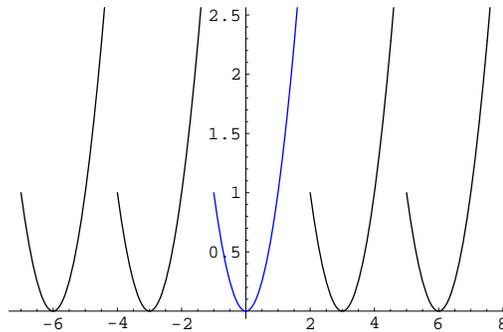


```
Out[3]= -Graphics-
```

¹Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 1.9.3 auf S. 138 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

Wir können die Anzahl der periodischen Fortsetzungen recht hoch wählen, allerdings ist dies ab einer bestimmten Anzahl nicht mehr anschaulich sinnvoll. Hier wurde für die Funktion t^2 ein geeigneter Fortsetzungsfaktor von 2 gewählt.

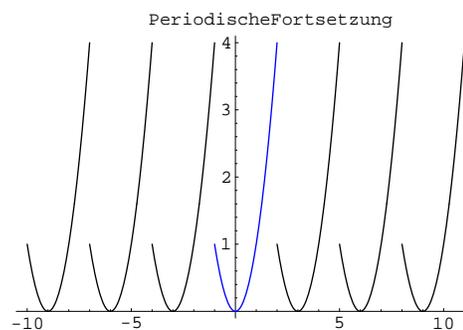
```
In[4]:= PlotPeriodicalContinuation[t^2,
      {t, -1, 2}, 2]
```



Out[4]= -Graphics-

Wir stellen im vorherigen Beispiel fest, daß der Graph von t^2 nicht vollständig zu sehen ist. Wir können alle Optionen [Wolfram97a] eines Plot[]-Befehls auch hier nutzen und uns mit PlotRange->All den vollständigen Wertebereich anzeigen lassen. Im Beispiel wurde dem Diagramm zusätzlich eine Überschrift gegeben und ein höherer periodischer Fortsetzungsfaktor gewählt.

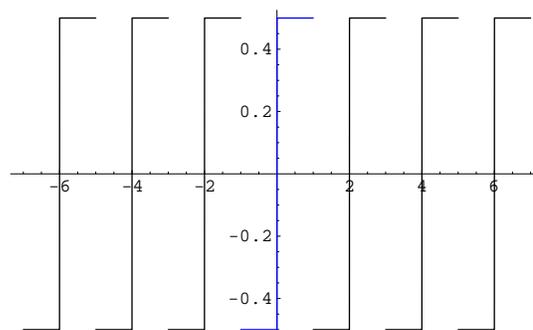
```
In[5]:= PlotPeriodicalContinuation[t^2,
      {t, -1, 2}, 3, PlotRange->All,
      PlotLabel->"PeriodischeFortsetzung"]
```



Out[5]= -Graphics-

Hier wurde eine Sprungfunktion gewählt, in *Mathematica* kann dies durch die UnitStep[]-Anweisung erreicht werden. Die senkrechten Linien gehören allerdings nicht zur Funktion. Da *Mathematica* immer versucht, Funktionen als glatte Kurven zu zeichnen, werden die Funktionswerte an den Sprungstellen miteinander verbunden.

```
In[6]:= PlotPeriodicalContinuation[UnitStep[t]
      -1/2, {t, -1, 1}, 3]
```



Out[6]= -Graphics-

3.2.1.2 FourierExpSeriesCoefficientExact []

`FourierExpSeriesCoefficientExact [expr, {x, x0, x1}, n]`

berechnet den Koeffizienten von $e^{in\frac{2\pi}{x_1-x_0}x}$ der exponentiell dargestellten Fourierreihe von *expr* in Abhängigkeit von *n*.

`FourierExpSeriesCoefficientExact [expr, {x, x0, x1}, n0]`

berechnet den Koeffizienten von $e^{in_0\frac{2\pi}{x_1-x_0}x}$ der exponentiell dargestellten Fourierreihe von *expr* für ein bestimmtes *n₀*.

Syntax von `FourierExpSeriesCoefficientExact` []

| Optionsname | Vorgabe | |
|--|---|--|
| <i>siehe</i> <code>Options[Integrate]</code> ² | <i>siehe</i> <code>Options[Integrate]</code> | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls <code>Integrate</code> [] |
| <code>FourierBasis</code> | Exp | die anzuwendende Integrationsmethode (siehe Bem. 3.2.1); weiterer möglicher Wert: Trig |

Optionen von `FourierExpSeriesCoefficientExact` []

Bemerkung 3.2.1 Mitunter kann es vorkommen, daß *Mathematica* es nicht schafft, das der aufrufenden Funktion `FourierExpSeriesCoefficientExact [expr, {x, x0, x1}, n]` zugrundeliegende Integral zu lösen. Es könnte hier helfen, den Wert der Option zu wechseln, wobei im wesentlichen folgender programminterner Hintergrund besteht:

$$\begin{array}{ll} \text{Exp} & \text{berechnet} \quad \frac{1}{x_1-x_0} \int_{x_0}^{x_1} \text{expr} \cdot e^{-in\frac{2\pi}{x_1-x_0}x} dx \\ \text{Trig} & \text{berechnet} \quad \frac{1}{x_1-x_0} \int_{x_0}^{x_1} \text{expr} \cdot \left(\cos n\frac{2\pi}{x_1-x_0}x - i \sin n\frac{2\pi}{x_1-x_0}x \right) dx. \end{array}$$

Bei dem Aufruf der Form `FourierExpSeriesCoefficientExact [expr, {x, x0, x1}, n0]` werden die Chancen eine Lösung zu finden für *Mathematica* weit höher stehen, da hier der Integrand und somit die Berechnungen für ein bestimmtes *n₀* wesentlich einfacher sind.

²Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 3.5.8 auf S. 879 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

Der komplexe Fourierkoeffizient von f (def. auf S. 52) besitzt eine recht einfache Gestalt.

```
In[7]:= FourierExpSeriesCoefficientExact[f, d,
      n]
Out[7]=  $\frac{2}{\pi - 4n^2\pi}$ 
```

Setzen wir im Vergleich zum vorherigen Beispiel ein bestimmtes n_0 ein, wird also lediglich der obige Term für n_0 evaluiert. Das ist das gleiche Ergebnis, welches auch mittels der Funktion `FourierExpSeriesCoefficient[]` aus dem Paket `Calculus`FourierTransform`` hätte ermittelt werden können.

```
In[8]:= FourierExpSeriesCoefficientExact[f, d,
      3]
Out[8]=  $-\frac{2}{35\pi}$ 
In[9]:= FourierExpSeriesCoefficient[f, d, 3]
Out[9]=  $-\frac{2}{35\pi}$ 
```

Für die Funktion t im Periodenintervall $[-1, 1]$ ist der Nenner des n -abhängigen Terms für $n = 0$ gleich 0. Das korrekte Ergebnis für diese Ausnahmestelle wird ebenfalls durch `FourierExpSeriesCoefficientExact[]` berechnet und im Beispiel durch eine `If[]`-Struktur zur beliebigen Weiterverarbeitung ausgegeben.

```
In[10]:= FourierExpSeriesCoefficientExact[t,
      {t, -1, 1}, n]
Out[10]=  $\text{If}[n == 0, 0, \frac{1(-1)^n}{n\pi}]$ 
```

Dieses Beispiel verdeutlicht das in Bemerkung 3.2.1 Gesagte. Mit der Option `Trig` kann *Mathematica* die komplexen Fourierkoeffizienten für die Funktion $|\cos t|$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ nicht liefern. Die Berechnung scheitert an dem zu lösenden Integral.

```
In[11]:= FourierExpSeriesCoefficientExact[
      Abs[Cos[t]], {t, - $\pi$ ,  $\pi$ }, n,
      FourierBasis->Trig]
Out[11]=  $\frac{\int_{-\pi}^{\pi} \text{Abs}[\text{Cos}[t]] (\text{Cos}[nt] - I \text{Sin}[nt]) dt}{2\pi}$ 
```

Wählen wir im vorherigen Beispiel statt Trig den Optionswert Exp, gelingt es *Mathematica*, das nun umgeformte Integral (vgl. Bem. 3.2.1) zu lösen. Falls mehrere Ausnahmestellen für ganzzahlige n existieren, wird dies durch die *Mathematica*-Struktur Which[] wiedergegeben.

```
In[12]:= FourierExpSeriesCoefficientExact[
      Abs[Cos[t]], {t, -π, π}, n,
      FourierBasis->Exp]
Out[12]= Which[n == -1, 0, n == 1, 0, True,
      
$$\frac{(1 + (-1)^n) \left( \cos\left[\frac{n\pi}{2}\right] + i \sin\left[\frac{n\pi}{2}\right] \right) (-1 + n \sin\left[\frac{n\pi}{2}\right])}{(-1 + n^2)\pi}$$
]
```

3.2.1.3 FourierCosSeriesCoefficientExact[]

`FourierCosSeriesCoefficientExact[expr, {x, x0, x1}, n]`

berechnet den Koeffizienten von $\cos n \frac{2\pi}{x_1 - x_0} x$ der trigonometrisch dargestellten Fourierreihe von *expr* in Abhängigkeit von n .

`FourierCosSeriesCoefficientExact[expr, {x, x0, x1}, n0]`

berechnet den Koeffizienten von $\cos n_0 \frac{2\pi}{x_1 - x_0} x$ der trigonometrisch dargestellten Fourierreihe von *expr* für ein bestimmtes n_0 , $n_0 \geq 0$.

Syntax von FourierCosSeriesCoefficientExact[]

| Optionsname | Vorgabe | |
|---|------------------------------------|--|
| <i>siehe</i> Options[Integrate] ³ | <i>siehe</i> Options[Integrate] | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls Integrate[] |

Optionen von FourierCosSeriesCoefficientExact[]

³Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 3.5.8 auf S. 879 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

Dies berechnet für die Funktion f (def. auf S. 52) die reellen Fourierkoeffizienten von $\cos nt$. Obwohl $n = 0$ keine Ausnahmestelle darstellt, ist so immer a_0 ablesbar, da dies nicht durch Einsetzen von $n = 0$ im Term für a_n , $n > 0$ übereinstimmt (siehe Bem. 2.3.4 auf S. 15).

```
In[13]:= FourierCosSeriesCoefficientExact[f, d,
      n]
Out[13]= If[n == 0,  $\frac{2}{\pi}$ ,  $\frac{4}{\pi - 4n^2\pi}$ ]
```

Mathematica liefert bei dieser ungeraden Funktion erwartungsgemäß Null als Ergebnis.

```
In[14]:= FourierCosSeriesCoefficientExact[t,
      {t, -1, 1}, n]
Out[14]= 0
```

Da $\cos at$ eine einfache auch von a abhängige Funktion ist, gelingt es, ein Resultat zu errechnen.

```
In[15]:= FourierCosSeriesCoefficientExact[
      Cos[at], {t, - $\pi$ ,  $\pi$ }, n]
Out[15]= If[n == 0,  $\frac{\text{Sin}[a\pi]}{a\pi}$ ,
       $\frac{(a+n) \text{Sin}[(a-n)\pi] + (a-n) \text{Sin}[(a+n)\pi]}{(a^2 - n^2)\pi}$ ]
```

3.2.1.4 FourierSinSeriesCoefficientExact[]

`FourierSinSeriesCoefficientExact[expr, {x, x0, x1}, n]`

berechnet den Koeffizienten von $\sin n \frac{2\pi}{x_1 - x_0} x$ der trigonometrisch dargestellten Fourierreihe von $expr$ in Abhängigkeit von n .

`FourierSinSeriesCoefficientExact[expr, {x, x0, x1}, n0]`

berechnet den Koeffizienten von $\sin n_0 \frac{2\pi}{x_1 - x_0} x$ der trigonometrisch dargestellten Fourierreihe von $expr$ für ein bestimmtes n_0 , $n_0 \geq 0$.

Syntax von `FourierSinSeriesCoefficientExact[]`

| Optionsname | Vorgabe |
|---|---|
| <i>siehe</i> Options[Integrate] ⁴ | <i>siehe</i> Options[Integrate] verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls Integrate[] |

Optionen von FourierSinSeriesCoefficientExact[]

Da f (def. auf S. 52) eine ungerade Funktion ist, sind alle diese Koeffizienten Null.

```
In[16]:= FourierSinSeriesCoefficientExact[f, d,
          n]
Out[16]= 0
```

Auch etwas kompliziertere Funktionen, hier eine von zusätzlich 2 Unbekannten abhängige Funktion, sind zulässig.

```
In[17]:= FourierSinSeriesCoefficientExact[
          Cos[t * b] + Sin[t * a], {t, -π, π}, n]
Out[17]= 
$$\frac{(a+n) \sin[(a-n)\pi] + (-a+n) \sin[(a+n)\pi]}{(a^2 - n^2)\pi}$$

```

Mathematica kann auch mit If[]-Konstrukten umgehen. Für die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t(t+1)^2, & t < 0 \\ t(t-1)^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

```
In[18]:= FourierSinSeriesCoefficientExact[
          If[t < 0, t * (t + 1)^2, t * (t - 1)^2],
          {t, -1, 1}, n]
```

```
Out[18]= If[n == 0, 0,  $\frac{4(2 + (-1)^n)}{n^3\pi^3}$ ]
```

ergibt sich damit das nebenstehende Ergebnis.

Möchte man aber noch stärker unterteilte Funktionen betrachten, kann man leider nicht mit dem Which[]-Konstrukt arbeiten, da hier *Mathematica* die Berechnung verweigert. Trotzdem brauchen wir auf eine Lösung für solche Funktionen nicht verzichten, da wir auf die UnitStep[]-Funktion zurückgreifen können. Das vorherige Beispiel wurde nebenstehend noch einmal mittels UnitStep[] gelöst.

```
In[19]:= FourierSinSeriesCoefficientExact[
          t * (t + 1)^2 *
          (UnitStep[t + 1] - UnitStep[t])
          + UnitStep[t] * t * (t - 1)^2,
          {t, -1, 1}, n]
```

```
Out[19]= If[n == 0, 0,  $\frac{4(2 + (-1)^n)}{n^3\pi^3}$ ]
```

⁴Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 3.5.8 auf S. 879 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

3.2.1.5 FourierExpSeriesExact[]

`FourierExpSeriesExact[expr, {x, x0, x1}, n]`

berechnet unter Zuhilfenahme von `FourierExpSeriesCoefficientExact[]` die exakte Fourierreihe von `expr` für $n = -\infty \dots \infty$ in komplexer Darstellung.

Syntax von `FourierExpSeriesExact[]`

| <i>Optionsname</i> | <i>Vorgabe</i> | |
|--|---|--|
| <i>siehe</i> <code>Options[Integrate]</code> ⁵ | <i>siehe</i> <code>Options[Integrate]</code> | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls <code>Integrate[]</code> |
| <code>FourierBasis</code> | <code>Exp</code> | die anzuwendende Integrationsmethode (siehe Bem. 3.2.1); weiterer möglicher Wert: <code>Trig</code> |
| <code>FourierExpCoefficient</code> | <code>Null</code> | der bereits mit <code>FourierExpSeriesCoefficientExact[]</code> berechnete Term |
| <code>FourierFunction</code> | <code>Hold</code> | ob die berechnete Fourierreihe nur ausgegeben oder evaluiert werden soll; weiterer möglicher Wert: <code>Evaluate</code> |
| <code>FourierNumber</code> | <code>Infinity</code> | die Ordnung der Fourierreihe; weitere mögliche Werte: 1, 2, ... |

Optionen von `FourierExpSeriesExact[]`

⁵Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 3.5.8 auf S. 879 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

Dies berechnet für die Funktion f (def. auf S. 52) die exakte Fourierreihe.

```
In[20]:= FourierExpSeriesExact[f, d, n]
Out[20]= 
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2e^{Int}}{\pi - 4n^2\pi}$$

```

Mit der Option `FourierNumber` läßt sich auch die abgebrochene Fourierreihe, im Beispiel der Ordnung 2, leicht bestimmen.

```
In[21]:= FourierExpSeriesExact[f, d, n,
      FourierNumber->2]
Out[21]= 
$$\frac{2}{\pi} - \frac{2e^{-It}}{3\pi} - \frac{2e^{It}}{3\pi} - \frac{2e^{-2It}}{15\pi} - \frac{2e^{2It}}{15\pi}$$

```

Mit der Option `FourierFunction->Evaluate` kann *Mathematica* häufig die ermittelte Fourierreihe in Form einer meist komplizierten Funktion direkt ausrechnen.

```
In[22]:= FourierExpSeriesExact[f, d, n,
      FourierFunction->Evaluate]
Out[22]= 
$$\frac{(-1 + e^{It}) \left( \sqrt{e^{-It}} \sqrt{e^{It}} \operatorname{ArcTanh}[\sqrt{e^{-It}}] - \operatorname{ArcTanh}[\sqrt{e^{It}}] \right)}{\sqrt{e^{It}} \pi}$$

```

Interessant ist, daß `FourierExpSeries[]` häufig wesentlich mehr Zeit als `FourierExpSeriesExact[]` zur Berechnung der abgebrochenen Fourierreihe benötigt. Da hier nur der zeitliche Aspekt verdeutlicht werden sollte, wurde auf die umfangreiche Ausgabe des Ergebnisses verzichtet.

```
In[23]:= FourierExpSeries[f, d, 20]; //Timing
Out[23]= {21.53Second, Null}

In[24]:= FourierExpSeriesExact[f, d, n,
      FourierNumber->20]; //Timing
Out[24]= {2.69Second, Null}
```

Bemerkung 3.2.2 Die `Exact`-Form berechnet lediglich ein von n abhängiges Integral und bildet dann durch Einsetzen die Summe über die Glieder der Fourierreihe von $n = 0 \dots n_0$. `FourierExpSeries[]` berechnet dagegen zunächst jedes einzelne Integral von $n = 0 \dots n_0$ mittels `FourierExpSeriesCoefficient[]` und summiert die berechneten Glieder der abgebrochenen Fourierreihe der Ordnung n_0 auf. Die unterschiedlichen Rechenzeiten liegen also in der verschiedenen Anzahl und auch in der Kompliziertheit der zu berechnenden Integrale begründet.

Bei kleinen n_0 ist der Aufwand der Exact-Form im Vergleich zum vorherigen Beispiel gleich geblieben, bis auf daß weniger Glieder zu summieren sind. `FourierExpSeries[]` berechnet im Beispiel nur drei einfache Integrale, die nicht von n abhängen und in dem Fall schneller berechnet werden, als die eine symbolische Integration der Exact-Form.

```
In[25]:= FourierExpSeries[f, d, 2]; //Timing
Out[25]= {2.19Second, Null}

In[26]:= FourierExpSeriesExact[f, d, n,
    FourierNumber->2]; //Timing
Out[26]= {2.64Second, Null}
```

3.2.1.6 FourierTrigSeriesExact[]

`FourierTrigSeriesExact[expr, {x, x0, x1}, n]`

berechnet unter Zuhilfenahme von `FourierExpSeriesCoefficientExact[]` die exakte Fourierreihe von `expr` für $n = -\infty.. \infty$ in trigonometrischer Darstellung.

Syntax von `FourierTrigSeriesExact[]`

| <i>Optionsname</i> | <i>Vorgabe</i> | |
|--|--|--|
| <i>siehe</i> <code>Options[FourierExpSeriesExact]</code> | <i>siehe</i> <code>Options[FourierExpSeriesExact]</code> | verfügt über alle Optionen der Funktion <code>FourierExpSeriesExact[]</code> |

Optionen von `FourierTrigSeriesExact[]`

Die Funktion liefert für f (def. auf S. 52) die Fourierreihe in trigonometrischer Form.

```
In[27]:= FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
Out[27]=  $\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4 \text{Cos}[nt]}{(-1 + 4n^2)\pi}$ 
```

Da `FourierTrigSeriesExact[]` über die gleichen Optionen wie `FourierExpSeriesExact[]` verfügt, lassen sich auch hier abgebrochene Fourierreihen ermitteln.

```
In[28]:= FourierTrigSeriesExact[f, d, n,
      FourierNumber->3]//Timing
Out[28]= {2.75Second,  $\frac{2}{\pi} - \frac{4 \cos[t]}{3\pi} - \frac{4 \cos[2t]}{15\pi} - \frac{4 \cos[3t]}{35\pi}$ }
```

Der Einsatz der Option `FourierExpCoefficient` kann dem Anwender zum Teil erheblich Zeit sparen, möchte er mehrere der neuen Funktionen auf dieselbe Funktion mit zugehörigem Periodenintervall anwenden (vgl. Laufzeit vorheriges Beispiel).

```
In[29]:= cn = FourierExpSeriesCoefficientExact[
      f, d, n]
Out[29]=  $\frac{2}{\pi - 4n^2\pi}$ 
In[30]:= FourierTrigSeriesExact[f, d, n,
      FourierNumber->3,
      FourierExpCoefficient->cn]//
      Timing
Out[30]= {0.17Second,  $\frac{2}{\pi} - \frac{4 \cos[t]}{3\pi} - \frac{4 \cos[2t]}{15\pi} - \frac{4 \cos[3t]}{35\pi}$ }
```

3.2.1.7 `FourierTableExact[]`

`FourierTableExact[expr, {x, x0, x1}, n, n0]`

berechnet unter Zuhilfenahme von `FourierExpSeriesCoefficientExact[]` die Koeffizienten von $\cos n \frac{2\pi}{x_1-x_0} x$, $\sin n \frac{2\pi}{x_1-x_0} x$, $e^{in \frac{2\pi}{x_1-x_0} x}$, die Gesamtamplituden und die Phasen der Fourierreihe von *expr* für $n = 0 \dots n_0$ und stellt diese für das jeweilige n in Matrixform dar.

Syntax von `FourierTableExact[]`

| Optionsname | Vorgabe | |
|--|---|---|
| <i>siehe</i> <code>Options[Integrate]</code> ⁶ | <i>siehe</i> <code>Options[Integrate]</code> | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls <code>Integrate[]</code> |

Optionen von `FourierTableExact[]` – weiter auf nächster Seite

⁶Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 3.5.8 auf S. 879 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

Fortsetzung vorheriger Seite

| <i>Optionsname</i> | <i>Vorgabe</i> | |
|-----------------------|-----------------------|--|
| FourierBasis | Exp | die anzuwendende Integrationsmethode (siehe Bem. 3.2.1); weiterer möglicher Wert: Trig |
| FourierExpCoefficient | Null | der bereits mit FourierExpSeriesCoefficientExact[] berechnete Term |
| FourierShowFormula | False | ob die erklärende Fourierreihe ausgegeben wird |
| FourierStep | 1 | die Schrittweite; weitere mögliche Werte: 2, 3,... |
| FourierVariables | {a, b, c, A, Φ } | die Auswahl der Variablenamen |

Optionen von FourierTableExact[]

Dies ist eine Übersicht der trigonometrischen und komplexen Fourierkoeffizienten, der Gesamtamplituden und der Phasen für $n = 0 \dots 3$ der Funktion f (def. auf Seite 52).

$$\begin{array}{l}
 \text{In}[31] := \mathbf{FourierTableExact[f, d, n, 3]} \\
 \text{Out}[31] = \begin{pmatrix}
 n & a_n & b_n & c_n & A_n & \Phi_n \\
 0 & \frac{2}{\pi} & 0 & \frac{2}{\pi} & \frac{4}{4} & 0 \\
 1 & -\frac{4}{3\pi} & 0 & -\frac{2}{3\pi} & \frac{3\pi}{4} & \pi \\
 2 & -\frac{15\pi}{4} & 0 & -\frac{15\pi}{2} & \frac{15\pi}{4} & \pi \\
 3 & -\frac{35\pi}{4} & 0 & -\frac{35\pi}{2} & \frac{35\pi}{4} & \pi
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Dies zeigt die Verwendung der Option `FourierStep`, es werden hier nur für jedes zweite n Werte berechnet. Mittels der Option `FourierShowFormula` können wir eine erklärende Formel einblenden, welche den Zusammenhang zu den Variablen im Tabellenkopf zeigt.

Im Beispiel ist für $n = 0$ die Phase $\arg c_n$ nicht berechenbar, was mit dem Tabelleneintrag `undefined` quittiert wird (siehe Bem. 2.7.1 auf S. 40).

```
In[32]:= FourierTableExact[t/2, {t, -1, 1}, n, 6,
FourierStep->2,
FourierShowFormula->True]
```

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[32] = \frac{t}{2} &\approx \mathcal{F}_6\left[\frac{t}{2}\right] = \sum_{n=-6}^6 c_n \text{Exp}[In\pi t] = \\
 &a_0 + \sum_{n=1}^6 (a_n \text{Cos}[n\pi t] + b_n \text{Sin}[n\pi t]) = \\
 &a_0 + \sum_{n=1}^6 A_n \text{Sin}[n\pi t + \Phi_n]
 \end{aligned}$$

| n | a_n | b_n | c_n | A_n | Φ_n |
|---|-------|-------------------|-------------------|------------------|-----------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | undefined |
| 2 | 0 | $-\frac{1}{2\pi}$ | $\frac{1}{4\pi}$ | $\frac{1}{2\pi}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| 4 | 0 | $-\frac{1}{4\pi}$ | $\frac{1}{8\pi}$ | $\frac{1}{4\pi}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| 6 | 0 | $-\frac{1}{6\pi}$ | $\frac{1}{12\pi}$ | $\frac{1}{6\pi}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

Das Beispiel zeigt die Verwendung der Option `FourierVariables`, die die freie Wahl der Variablen im Tabellenkopf ermöglicht (vgl. auch vorstehende erklärende Formel).

```
In[33]:= FourierTableExact[UnitStep[t],
{t, -1, 1}, n, 3,
FourierVariables->{a1, a2, a3, a4, \Psi},
FourierShowFormula->True]
```

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[33] = \text{UnitStep}[t] &\approx \mathcal{F}_3[\text{UnitStep}[t]] = \\
 &\sum_{n=-3}^3 a3_n \text{Exp}[In\pi t] = \\
 &a1_0 + \sum_{n=1}^3 (a1_n \text{Cos}[n\pi t] + a2_n \text{Sin}[n\pi t]) = \\
 &a1_0 + \sum_{n=1}^3 a4_n \text{Sin}[n\pi t + \Psi_n]
 \end{aligned}$$

| n | $a1_n$ | $a2_n$ | $a3_n$ | $a4_n$ | Ψ_n |
|---|---------------|------------------|-------------------|------------------|------------------|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| 1 | 0 | $\frac{2}{\pi}$ | $-\frac{1}{\pi}$ | $\frac{2}{\pi}$ | $-\frac{\pi}{2}$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | undefined |
| 3 | 0 | $\frac{2}{3\pi}$ | $-\frac{1}{3\pi}$ | $\frac{2}{3\pi}$ | $-\frac{\pi}{2}$ |

3.2.1.8 FourierHarmonicDistortionExact[]

FourierHarmonicDistortionExact[expr, {x, x₀, x₁}, n]

berechnet unter Zuhilfenahme von $c_n = \text{FourierExpSeriesCoefficientExact}[]$ den Quotienten

$$\sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} |c_n|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2}}$$

Syntax von FourierHarmonicDistortionExact[]

| Optionsname | Vorgabe | |
|--|-----------------------------|--|
| siehe Options[Integrate] ⁷ | siehe Options[Integrate] | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls Integrate[] |
| FourierBasis | Exp | die anzuwendende Integrationsmethode (siehe Bem. 3.2.1); weiterer möglicher Wert: Trig |
| FourierExpCoefficient | Null | der bereits mit FourierExpSeriesCoefficientExact[] berechnete Term |
| FourierNumber | Infinity | die Ordnung der Fourierreihe; weitere mögliche Werte: 1, 2, ... |

Optionen von FourierHarmonicDistortionExact[]

Dies berechnet für die Funktion f (def. auf S. 52) den Klirrfaktor.

In[34]:= FourierHarmonicDistortionExact[f, d, n]

$$\text{Out}[34]= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{-88 + 9\pi^2}{-8 + \pi^2}}$$

⁷Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 3.5.8 auf S. 879 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

Mit der Option `FourierNumber` können wir im vorherigen Beispiel für ein bestimmtes n_0 den Anteil der Oberschwingungen an der Gesamtschwingung berechnen.

Beim Vergleich des exakten Ergebnisses mit der Annäherung für $n_0 = 20$ stellen wir fest, daß hier beide Werte schon sehr nahe beieinander liegen.

```
In[35]:= FourierHarmonicDistortionExact[f, d, n,  
FourierNumber -> 20]
```

```
Out[35]=  $\sqrt{\frac{38405604949255064762902416989}{195564348939856307332175036591}}$   
2
```

```
In[36]:= %%//N
```

```
Out[36]= 0.22162
```

```
In[37]:= %%//N
```

```
Out[37]= 0.221576
```

3.2.1.9 FourierParsevalExact[]

`FourierParsevalExact[expr, {x, x0, x1}, n]`

berechnet unter Zuhilfenahme von `FourierExpSeriesCoefficientExact[]` die beiden Seiten der Gleichung (siehe für a_0 , a_n , b_n S. 28):

$$\frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Syntax von `FourierParsevalExact[]`

| Optionsname | Vorgabe |
|--|---|
| <i>siehe</i> <code>Options[FourierTrigSeriesExact]</code> | <i>siehe</i> <code>Options[FourierTrigSeriesExact]</code> verfügt über alle Optionen von <code>FourierTrigSeriesExact[]</code> |

Optionen von `FourierParsevalExact[]`

Dies zeigt die Anwendung der *Parsevalschen Gleichung* auf f (def. auf S. 52). Wir schließen daraus, daß gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

```
In[38]:= FourierParsevalExact[f, d, n]
```

```
Out[38]=  $\frac{1}{2} == \frac{4}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(-1 + 4n^2)^2 \pi^2}$ 
```

Mittels der Option `FourierFunction` können wir wenn möglich die Summe auf der rechten Seite evaluieren. Falls *Mathematica* diese berechnen kann, stellt es die Gleichheit beider Seiten der Gleichung fest.

```
In[39]:= FourierParsevalExact[f, d, n,
      FourierFunction->Evaluate]
Out[39]= True
```

Mit der Option `FourierNumber` wird die Summe nur bis zu einem bestimmten n_0 evaluiert. Anschließend wird die gesamte rechte Seite der Gleichung von der linken subtrahiert. Dies spiegelt quasi die Aussage der *Besselschen Ungleichung* wider.

```
In[40]:= FourierParsevalExact[f, d, n,
      FourierNumber->10]
Out[40]=  $\frac{1}{2} - \frac{208922553220868}{42337793743245\pi^2}$ 
In[41]:= %//N
Out[41]= 0.0000145612
```

3.2.1.10 PlotFourierImageExact[]

```
PlotFourierImageExact[expr, {x, x0, x1}, n, n0]
```

zeichnet *expr* und die mit `FourierExpSeriesExact[]` berechnete abgebrochene Fourierreihe von *expr* der Ordnung n_0 in dasselbe Diagramm.

Syntax von `PlotFourierImageExact[]`

| Optionsname | Vorgabe | |
|--|---|---|
| <i>siehe</i> <code>Options[Integrate]</code> ⁸ | <i>siehe</i> <code>Options[Integrate]</code> | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls <code>Integrate[]</code> |

Optionen von `PlotFourierImageExact[]` – weiter auf nächster Seite

⁸Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 3.5.8 auf S. 879 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

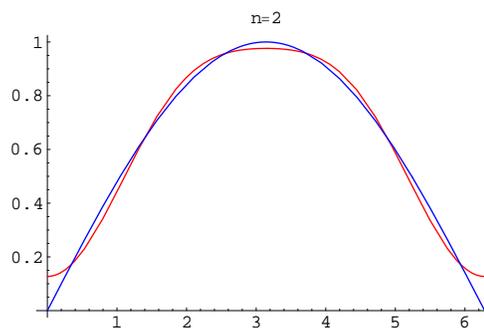
Fortsetzung vorheriger Seite

| Optionsname | Vorgabe | |
|--|-----------------------------|---|
| <i>siehe</i> Options [Plot] ⁹ | <i>siehe</i> Options [Plot] | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls Plot [] |
| FourierBasis | Exp | die anzuwendende Integrationsmethode (siehe Bem. 3.2.1); weiterer möglicher Wert: Trig |
| FourierContinue | 0 | die periodischen Fortsetzungen |
| FourierExpCoefficient | Null | der bereits mit FourierExpSeriesCoefficientExact [] berechnete Term |
| FourierPlot | 3 | die zu zeichnende(n) Funktion(en); mögliche Werte: 1..nur <i>expr</i> 2..nur $\mathcal{F}(expr)$ 3.. <i>expr</i> und $\mathcal{F}(expr)$ |

Optionen von PlotFourierImageExact[]

Die blau gezeichnete Kurve ist der Graph der Funktion f (def. auf S. 52), die rote der Graph der abgebrochenen Fourierreihe $\mathcal{F}_2(f)(t)$.

```
In[42]:= PlotFourierImageExact[f,d,n,2]
```

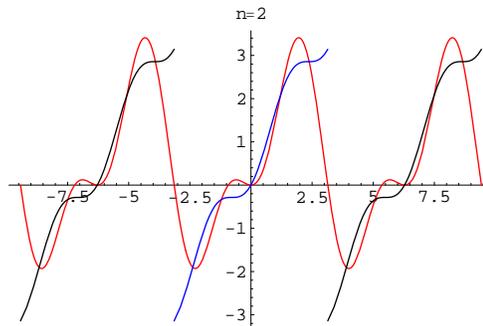


```
Out[42]= -Graphics-
```

⁹Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 1.9.3 auf S. 138 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

Mittels der Option `FourierContinue` haben wir die Möglichkeit, Funktion und die zugehörige Approximation in einem größerem Intervall zu betrachten (vgl. auch `PlotPeriodicalContinuation`).

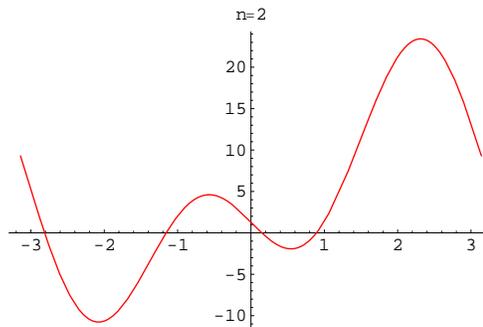
```
In[43]:= PlotFourierImageExact[t + Sin[t]^2,
      {t, -π, π}, n, 2, FourierContinue -> 1]
```



```
Out[43]= -Graphics-
```

Die Option `FourierPlot` gestattet es uns, jeweils entweder f oder $\mathcal{F}_N(f)$ auszublenken. Im Beispiel ist nur der Graph von $\mathcal{F}_2(f)$ dargestellt.

```
In[44]:= PlotFourierImageExact[t^3 + t^2 + t + 1,
      {t, -π, π}, n, 2, FourierPlot -> 1]//
      Timing
```



```
Out[44]= {14.23Second, -Graphics-}
```

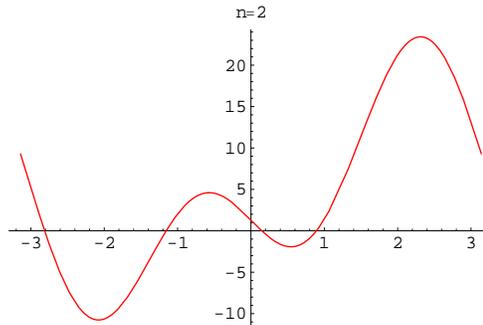
Dies soll noch einmal im Zusammenhang mit dem nächsten Beispiel die Benutzung der Option `FourierExpCoefficient` und die daraus resultierende Zeitersparnis verdeutlichen.

```
In[45]:= cn = FourierExpSeriesCoefficientExact[
      t^3 + t^2 + t + 1, {t, -π, π}, n]
```

```
Out[45]= If[n == 0, 1/3 (3 + π^2),
      I (-1)^n (-6 - 2In + n^2 (1 + π^2)) / n^3]
```

Hier wird der im vorherigen Beispiel in `cn` gespeicherte Fourierkoeffizient verwendet (vgl. Laufzeit).

```
In[46]:= PlotFourierImageExact[t^3 + t^2 + t + 1,
      {t, -π, π}, n, 2, FourierPlot -> 1,
      FourierExpCoefficient -> cn]//
      Timing
```



```
Out[46]= {1.1Second, -Graphics-}
```

3.2.1.11 PlotFourierAnimationExact[]

`PlotFourierAnimationExact[expr, {x, x0, x1}, n, n0]`

zeichnet `expr` und die mit `FourierExpSeriesExact[]` berechneten abgebrochenen Fourierreihen von `expr` der Ordnungen $n = 0 \dots n_0$ in jeweils dasselbe Diagramm.

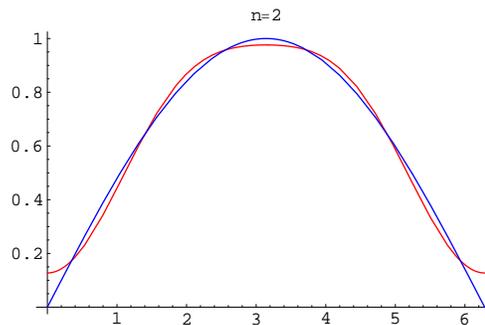
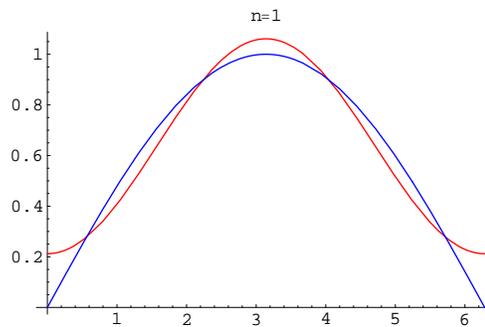
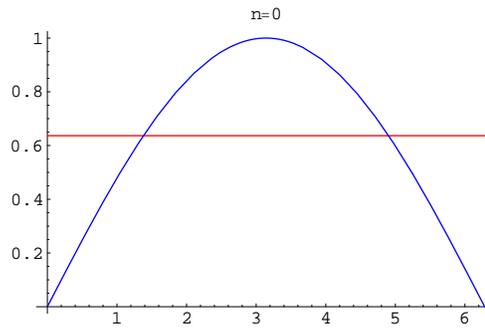
Syntax von `PlotFourierAnimationExact[]`

| Optionsname | Vorgabe | |
|---|---|--|
| <i>siehe</i> Options[PlotFourierImageExact] | <i>siehe</i> Options[PlotFourierImageExact] | verfügt über alle Optionen der Funktion <code>PlotFourierImageExact[]</code> |
| FourierStep | 1 | die Schrittweite; weitere mögliche Werte: 2, 3, ... |

Optionen von `PlotFourierAnimationExact[]`

Im Beispiel sehen wir das Ergebnis von `PlotFourierAnimationExact[]` angewendet auf f (def. auf S. 52). Diese Bilder lassen sich nun z. B. mittels Doppelklick auf eines der Bilder animieren [Wolfram97a]. Es wurde zur besseren Orientierung in der Voreinstellung eine Bildüberschrift mit der jeweiligen Ordnung der abgebrochenen Fourierreihe angebracht, was sich auch während der Animation als vorteilhaft erweist.

```
In[47]:= PlotFourierAnimationExact[f,d,n,2]
```



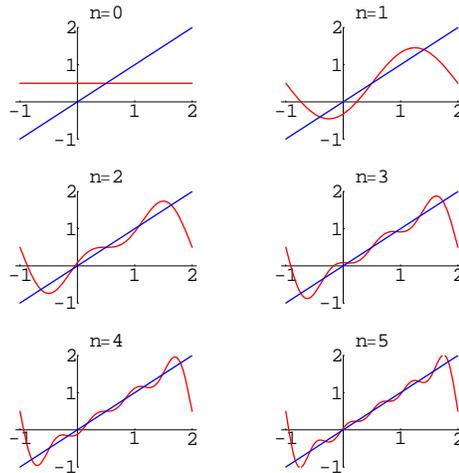
```
Out[47]= {-Graphics-, -Graphics-, -Graphics-}
```

Dies erzeugt eine Liste mit Grafik-Objekten. Mittels `DisplayFunction->Identity` wird die sofortige Ausgabe unterdrückt, da wir hier die einzelnen Bilder aus Platzgründen besser anordnen wollen. Die explizite Einstellung von `PlotRange` stellt sicher, daß die Skala in jedem Grafikeil dieselbe ist.

Dies zerlegt die Grafiken in drei Zeilen und zeigt die sich ergebende Bilderanordnung.

```
In[48]:= PlotFourierAnimationExact[t, {t, -1, 2},
          n, 5, PlotRange->{-1, 2},
          Ticks->{{-1, 1, 2}, {-1, 1, 2}},
          DisplayFunction->Identity]
Out[48]= {-Graphics-, -Graphics-, -Graphics-,
          -Graphics-, -Graphics-, -Graphics-}
```

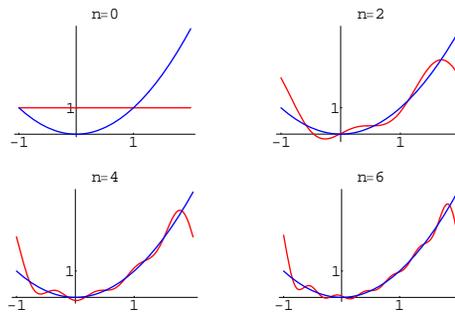
```
In[49]:= Show[GraphicsArray[Partition[%, 2]]]
```



```
Out[49]= -GraphicsArray-
```

Hier wird mittels der Option `FourierStep` nur jedes zweite Bild in die Animation mit aufgenommen, was gerade bei langsam konvergierenden Fourierreihen nützlich sein kann.

```
In[50]:= PlotFourierAnimationExact[t^2,
      {t, -1, 2}, n, 6, PlotRange->All,
      Ticks->{{-1, 1}, {-1, 1}},
      FourierStep->2,
      DisplayFunction->Identity]
Out[50]= {-Graphics-, -Graphics-, -Graphics-,
      -Graphics-}
In[51]:= Show[GraphicsArray[Partition[%, 2]]]
```



```
Out[51]= -GraphicsArray-
```

3.2.1.12 PlotFourierAmplitudeSpectrumExact []

`PlotFourierAmplitudeSpectrumExact[expr, {x, x0, x1}, n, n0]`

zeichnet unter Zuhilfenahme von `FourierExpSeriesCoefficientExact []` die Gesamtamplituden der Fourierreihe von `expr` als Werte über den diskreten Frequenzen für $n = 1 \dots n_0$.

Syntax von `PlotFourierAmplitudeSpectrumExact []`

| <i>Optionsname</i> | <i>Vorgabe</i> | |
|---|---|--|
| <i>siehe</i> <code>Options[Integrate]</code> ¹⁰ | <i>siehe</i> <code>Options[Integrate]</code> | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls <code>Integrate []</code> |

Optionen von `PlotFourierAmplitudeSpectrumExact []` – weiter auf nächster Seite

¹⁰Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 3.5.8 auf S. 879 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

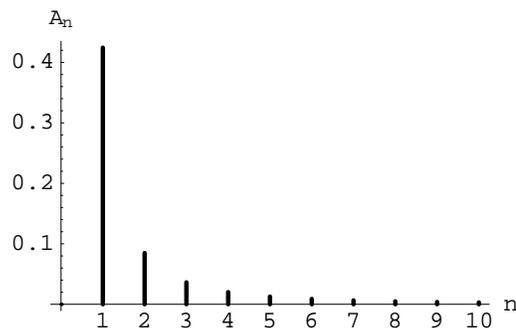
Fortsetzung vorheriger Seite

| <i>Optionsname</i> | <i>Vorgabe</i> | |
|---|-----------------------------|---|
| <i>siehe Options [Plot]</i> ¹¹ | <i>siehe Options [Plot]</i> | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls <code>Plot[]</code> |
| <code>FourierBasis</code> | <code>Exp</code> | die anzuwendende Integrationsmethode (siehe Bem. 3.2.1); weiterer möglicher Wert: <code>Trig</code> |
| <code>FourierExpCoefficient</code> | <code>Null</code> | der bereits mit <code>FourierExpSeriesCoefficientExact[]</code> berechnete Term |
| <code>FourierStep</code> | <code>1</code> | die Schrittweite; weitere mögliche Werte: <code>2, 3, ...</code> |

Optionen von `PlotFourierAmplitudeSpectrumExact[]`

Dies zeichnet das Amplitudenspektrum von f (def. auf S. 52), wobei gut erkennbar ist, daß f recht schnell durch die zugehörige Fourierreihe approximiert wird.

```
In[52]:= PlotFourierAmplitudeSpectrumExact[f,
          d, n, 10]
```

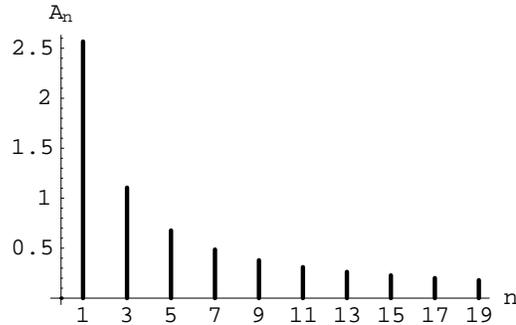


```
Out[52]= -Graphics-
```

¹¹Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 1.9.3 auf S. 138 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

Hier konvergiert die Fourierreihe nur langsam gegen die Funktion $t^3 + \sin t$. Die Option `FourierStep` ermöglicht hier eine bestimmte Schrittweite anzugeben, die die zu zeichnenden Amplituden bestimmt.

```
In[53]:= PlotFourierAmplitudeSpectrumExact[t^3
+ Sin[t], {t, -1, 2}, n, 20,
FourierStep -> 2]
```



```
Out[53]= -Graphics-
```

3.2.1.13 PlotFourierPhaseSpectrumExact[]

`PlotFourierPhaseSpectrumExact[expr, {x, x0, x1}, n, n0]`

zeichnet unter Zuhilfenahme von `FourierExpSeriesCoefficientExact[]` die Phasen der Fourierreihe von `expr` als Werte über den diskreten Frequenzen für $n = 1 \dots n_0$.

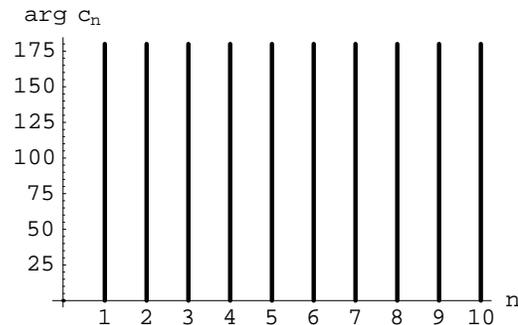
Syntax von `PlotFourierPhaseSpectrumExact[]`

| Optionsname | Vorgabe | |
|---|---|--|
| <i>siehe</i> <code>Options[PlotFourierAmplitudeSpectrumExact]</code> | <i>siehe</i> <code>Options[PlotFourierAmplitudeSpectrumExact]</code> | verfügt über alle Optionen der Funktion <code>PlotFourierAmplitudeSpectrumExact[]</code> |
| <code>FourierAngle</code> | Degree | ob Winkel in Grad oder Bogenmaß angegeben werden soll; weiterer möglicher Wert: Radian |

Optionen von `PlotFourierPhaseSpectrumExact[]`

Dies zeichnet das Phasenspektrum der Funktion f (def. auf S. 52).

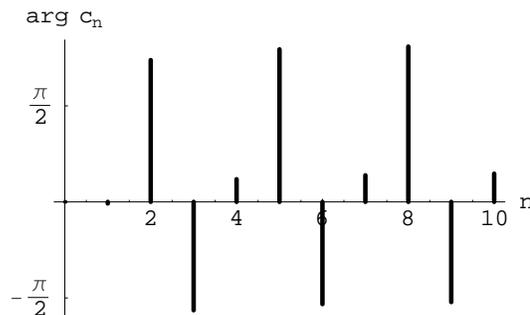
```
In[54]:= PlotFourierPhaseSpectrumExact[f, d, n,
      10]
```



```
Out[54]= -Graphics-
```

Mittels der Option `FourierAngle` läßt sich die Einheit der Ordinate zwischen Grad- und Bogenmaß frei wählen.

```
In[55]:= PlotFourierPhaseSpectrumExact[
      Cos[t]^2, {t, -1, 2}, n, 10,
      FourierAngle -> Radian,
      Ticks -> {Automatic, {-π/2, π/2}}]
```



```
Out[55]= -Graphics-
```

3.3 Verwendung von Calculus'FourierTransform'

Hier sind solche Funktionen gemeint, die die im Paket Calculus'FourierTransform' bereitgestellten Funktionen ihrer Aufgabe entsprechend zur Berechnung heranziehen.

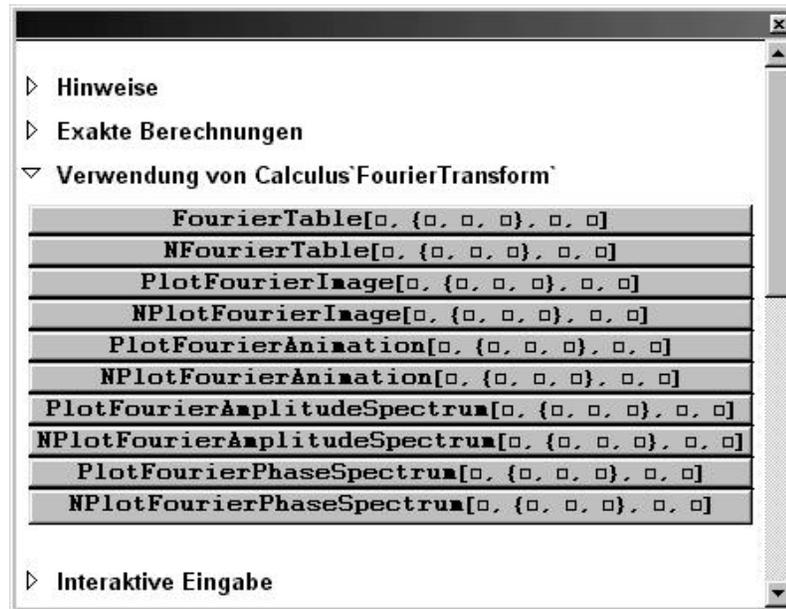


Abb. 3.3: Screenshot von *FOURIERPALETTE.NB* - Verwendung von Calculus'FourierTransform'

3.3.1 Syntaxbeschreibung

3.3.1.1 `FourierTable[]`, `NFourierTable[]`

`FourierTable[expr, {x, x0, x1}, n, n0]`

berechnet unter Zuhilfenahme von `FourierExpSeriesCoefficient[]` aus dem Paket Calculus'FourierTransform' die Koeffizienten von $\cos n \frac{2\pi}{x_1-x_0} x$, $\sin n \frac{2\pi}{x_1-x_0} x$, $e^{in \frac{2\pi}{x_1-x_0} x}$, die Gesamtamplituden und die Phasen der Fourierreihe von *expr* für $n = 0 \dots n_0$ und stellt diese für das jeweilige n in Matrixform dar.

`NFourierTable[expr, {x, x0, x1}, n, n0]`

berechnet unter Zuhilfenahme von `NFourierExpSeriesCoefficient[]` aus dem Paket Calculus'FourierTransform' die Koeffizienten von $\cos n \frac{2\pi}{x_1-x_0} x$, $\sin n \frac{2\pi}{x_1-x_0} x$, $e^{in \frac{2\pi}{x_1-x_0} x}$, die Gesamtamplituden und die Phasen der Fourierreihe von *expr* für $n = 0 \dots n_0$ und stellt diese für das jeweilige n in Matrixform dar.

Syntax von `FourierTable[]`, `NFourierTable[]`

| Optionsname | Vorgabe | |
|--------------------|-----------------------|---|
| FourierShowFormula | False | ob die erklärende Fourierreihe ausgegeben wird |
| FourierStep | 1 | die Schrittweite; weitere mögliche Werte: 2, 3, ... |
| FourierVariables | {a, b, c, A, Φ } | die Auswahl der Variablennamen |

Optionen von FourierTable[], NFourierTable[]

Dies zeigt für f (def. auf S. 52) die Tabelle wichtiger Werte der Fourierreihe von f und die dafür benötigte Rechenzeit. Die Ergebnisse werden möglichst in ihrer genauesten Darstellung, also als Brüche ausgegeben.

```
In[56]:= FourierTable[f, d, n, 3]//Timing
```

```
Out[56]= {1.87Second,
```

$$\left(\begin{array}{cccccc} n & a_n & b_n & c_n & A_n & \Phi_n \\ 0 & \frac{a_n}{2} & 0 & \frac{c_n}{2} & \frac{A_n}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{\pi}{4} & 0 & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & \pi \\ 2 & -\frac{3\pi}{4} & 0 & -\frac{3\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi \\ 3 & -\frac{15\pi}{4} & 0 & -\frac{15\pi}{2} & \frac{15\pi}{4} & \pi \end{array} \right) \}$$

NFourierTable[] berechnet intern die Werte der Tabelle numerisch, aus Platzgründen wurde hier auf lange Nachkommastellen mittels N[] verzichtet. Im Vergleich zum vorherigen Beispiel ist NFourierTable[] schneller als FourierTable[], wenn auch ungenauer (siehe Bem. 3.2.2, 3.3.1).

```
In[57]:= N[NFourierTable[f, d, n, 3, ]//Timing, 1]
```

```
Out[57]= {0.7Second,
```

$$\left(\begin{array}{cccccc} n & a_n & b_n & c_n & A_n & \Phi_n \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.7 & 2. & 0 \\ 1. & -0.4 & 0 & -0.2 & 0.4 & 3. \\ 2. & -0.09 & 0 & -0.04 & 0.09 & 3. \\ 3. & -0.03 & 0 & -0.01 & 0.03 & 3. \end{array} \right) \}$$

Bemerkung 3.3.1 Die N-Formen nutzen intern NIntegrate[] (statt Integrate[]) und damit numerische Algorithmen zur Berechnung der Integrale, die meist schneller, jedoch nur angenäherte Lösungen liefern. Neben dem Zeitvorteil bietet sich auch der Versuch, die N-Formen zu nutzen, an, falls eine symbolische Integration mit *Mathematica* nicht zum Ziel führte.

Dies demonstriert den Geschwindigkeitsunterschied der beiden Funktionen `NFourierTable[]` und `FourierTableExact[]` (siehe Bem. 3.2.2, 3.3.1).

```
In[58]:= NFourierTable[f, d, n, 20]; //Timing
Out[58]= {15.43Second, Null}

In[59]:= FourierTableExact[f, d, n, 20]//N; //
          Timing
Out[59]= {3.84Second, Null}
```

3.3.1.2 PlotFourierImage[], NPlotFourierImage[]

`PlotFourierImage[expr, {x, x0, x1}, n, n0]`

zeichnet `expr` und die mit `FourierExpSeries[]` bzw. `FourierTrigSeries[]` aus dem Paket Calculus'FourierTransform' berechnete abgebrochene Fourierreihe von `expr` der Ordnung `n0` in dasselbe Diagramm.

`NPlotFourierImage[expr, {x, x0, x1}, n, n0]`

zeichnet `expr` und die mit `NFourierExpSeries[]` bzw. `NFourierTrigSeries[]` aus dem Paket Calculus'FourierTransform' berechnete abgebrochene Fourierreihe von `expr` der Ordnung `n0` in dasselbe Diagramm.

Syntax von `PlotFourierImage[]`, `NPlotFourierImage[]`

| Optionsname | Vorgabe | |
|---|---|--|
| <i>siehe</i> <code>Options[Plot]</code> ¹² | <i>siehe</i> <code>Options[Plot]</code> | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls <code>Plot[]</code> |
| <code>FourierBasis</code> | <code>Exp</code> | die anzuwendende Fourierreihe; weiterer möglicher Wert: <code>Trig</code> |

Optionen von `PlotFourierImage[]`, `NPlotFourierImage[]` – weiter auf nächster Seite

¹²Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 1.9.3 auf S. 138 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

Fortsetzung vorheriger Seite

| <i>Optionsname</i> | <i>Vorgabe</i> | |
|--------------------|----------------|---|
| FourierContinue | 0 | die periodischen Fortsetzungen |
| FourierPlot | 3 | die zu zeichnende(n) Funktion(en); mögliche Werte: 1..nur $expr$ 2..nur $\mathcal{F}(expr)$ 3.. $expr$ und $\mathcal{F}(expr)$ |

Optionen von PlotFourierImage[], NPlotFourierImage[]

Dies zeigt die benötigten Rechenzeiten der drei auf f angewandten Funktionen PlotFourierImage[], NPlotFourierImage[] und PlotFourierImageExact[] (siehe Bem. 3.2.2, 3.3.1).

```
In[60]:= PlotFourierImage[f, d, n, 20,
           DisplayFunction->Identity]//
           Timing
Out[60]= {10.27Second, -Graphics-}

In[61]:= NPlotFourierImage[f, d, n, 20,
           DisplayFunction->Identity]//
           Timing
Out[61]= {31.2Second, -Graphics-}

In[62]:= PlotFourierImageExact[f, d, n, 20,
           DisplayFunction->Identity]//
           Timing
Out[62]= {2.31Second, -Graphics-}
```

3.3.1.3 PlotFourierAnimation[], NPlotFourierAnimation[]

PlotFourierAnimation[$expr, \{x, x_0, x_1\}, n, n_0]$

zeichnet $expr$ und die mit FourierExpSeries[] bzw. FourierTrigSeries[] aus dem Paket Calculus 'FourierTransform' berechneten abgebrochenen Fourierreihen von $expr$ der Ordnungen $n = 0 \dots n_0$ in jeweils dasselbe Diagramm.

NPlotFourierAnimation[$expr, \{x, x_0, x_1\}, n, n_0]$

zeichnet $expr$ und die mit NFourierExpSeries[] bzw. NFourierTrigSeries[] aus dem Paket Calculus 'FourierTransform' berechneten abgebrochenen Fourierreihen von $expr$ der Ordnungen $n = 0 \dots n_0$ in jeweils dasselbe Diagramm.

Syntax von PlotFourierAnimation[], NPlotFourierAnimation[]

| Optionsname | Vorgabe | |
|---|---|---|
| <i>siehe</i> Options [PlotFourierImage] | <i>siehe</i> Options [PlotFourierImage] | verfügt über alle Optionen der Funktion PlotFourierImage [] bzw. NPlotFourierImage [] |
| FourierStep | 1 | die Schrittweite; weitere mögliche Werte: 2, 3, ... |

Optionen von PlotFourierAnimation[], NPlotFourierAnimation[]

Dies zeigt die benötigten Rechenzeiten der drei auf f angewandten Funktionen PlotFourierAnimation[], NPlotFourierAnimation[] und PlotFourierAnimationExact[] (siehe Bem. 3.2.2, 3.3.1).

```
In[63]:= PlotFourierAnimation[f, d, n, 5,
      DisplayFunction->Identity]; //
      Timing
Out[63]= {21.03Second, Null}

In[64]:= NPlotFourierAnimation[f, d, n, 5,
      DisplayFunction->Identity]; //
      Timing
Out[64]= {9.61Second, Null}

In[65]:= PlotFourierAnimationExact[f, d, n, 5,
      DisplayFunction->Identity]; //
      Timing
Out[65]= {7.03Second, Null}
```

3.3.1.4 PlotFourierAmplitudeSpectrum[], NPlotFourierAmplitudeSpectrum[]

`PlotFourierAmplitudeSpectrum[expr, {x, x0, x1}, n, n0]`

zeichnet unter Zuhilfenahme von FourierExpSeriesCoefficient[] bzw. FourierCosSeriesCoefficient[] und FourierSinSeriesCoefficient[] aus dem Paket Calculus'FourierTransform' die Gesamtamplituden der Fourierreihe von $expr$ als Werte über den diskreten Frequenzen für $n = 1 \dots n_0$.

Syntax von PlotFourierAmplitudeSpectrum[], NPlotFourierAmplitudeSpectrum[] – weiter auf nächster Seite

Fortsetzung vorheriger Seite

`NPlotFourierAmplitudeSpectrum[expr, {x, x0, x1}, n, n0]`

zeichnet unter Zuhilfenahme von `NFourierExpSeriesCoefficient[]` bzw. `NFourierCosSeriesCoefficient[]` und `NFourierSinSeriesCoefficient[]` aus dem Paket Calculus'FourierTransform' die Gesamtamplituden der Fourierreihe von `expr` als Werte über den diskreten Frequenzen für $n = 1 \dots n_0$.

Syntax von `PlotFourierAmplitudeSpectrum[]`, `NPlotFourierAmplitudeSpectrum[]`

| Optionsname | Vorgabe | |
|--|----------------------------------|--|
| <code>siehe Options[Plot]</code> ¹³ | <code>siehe Options[Plot]</code> | verfügt über alle Optionen des <i>Mathematica</i> -Befehls <code>Plot[]</code> |
| <code>FourierBasis</code> | <code>Exp</code> | die anzuwendende Fourierreihe; weiterer möglicher Wert: <code>Trig</code> |
| <code>FourierStep</code> | <code>1</code> | die Schrittweite; weitere mögliche Werte: <code>2, 3, ...</code> |

Optionen von `PlotFourierAmplitudeSpectrum[]`, `NPlotFourierAmplitudeSpectrum[]`

Dies zeigt die benötigten Rechenzeiten der drei auf `f` angewandten Funktionen `PlotFourierAmplitudeSpectrum[]`, `NPlotFourierAmplitudeSpectrum[]` und `PlotFourierAmplitudeSpectrumExact[]` (siehe Bem. 3.2.2, 3.3.1).

```
In[66]:= PlotFourierAmplitudeSpectrum[f, d, n,
        10, DisplayFunction->Identity]; //
        Timing
Out[66]= {5.43Second, Null}

In[67]:= NPlotFourierAmplitudeSpectrum[f, d, n,
        10, DisplayFunction->Identity]; //
        Timing
Out[67]= {9.17Second, Null}

In[68]:= PlotFourierAmplitudeSpectrumExact[f,
        d, n, 10, DisplayFunction->Identity];
        //Timing
Out[68]= {3.68Second, Null}
```

¹³Beschreibungen zu den Optionen finden sich in [Wolfram97a] im Abschnitt 1.9.3 auf S. 138 und auch in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

3.3.1.5 PlotFourierPhaseSpectrum[], NPlotFourierPhaseSpectrum[]

PlotFourierPhaseSpectrum[*expr*, {*x*, *x*₀, *x*₁}, *n*, *n*₀]

zeichnet unter Zuhilfenahme von FourierExpSeriesCoefficient[] bzw. FourierCosSeriesCoefficient[] und FourierSinSeriesCoefficient[] aus dem Paket Calculus 'FourierTransform' die Phasen der Fourierreihe von *expr* als Werte über den diskreten Frequenzen für $n = 1 \dots n_0$.

NPlotFourierPhaseSpectrum[*expr*, {*x*, *x*₀, *x*₁}, *n*, *n*₀]

zeichnet unter Zuhilfenahme von NFourierExpSeriesCoefficient[] bzw. NFourierCosSeriesCoefficient[] und NFourierSinSeriesCoefficient[] aus dem Paket Calculus 'FourierTransform' die Phasen der Fourierreihe von *expr* als Werte über den diskreten Frequenzen für $n = 1 \dots n_0$.

Syntax von PlotFourierPhaseSpectrum[], NPlotFourierPhaseSpectrum[]

| <i>Optionsname</i> | <i>Vorgabe</i> | |
|---|---|---|
| <i>siehe</i> Options[PlotFourierAmplitudeSpectrum] | <i>siehe</i> Options[PlotFourierAmplitudeSpectrum] | verfügt über alle Optionen der Funktion PlotFourierAmplitudeSpectrum[] bzw. NPlotFourierAmplitudeSpectrum[] |
| FourierAngle | Degree | ob Winkel in Grad oder Bogenmaß angegeben werden soll; weiterer möglicher Wert: Radian |

Optionen von PlotFourierPhaseSpectrum[]

Dies zeigt die benötigten Rechenzeiten der drei auf f angewandten Funktionen `PlotFourierPhaseSpectrum[]`, `NPlotFourierPhaseSpectrum[]` und `PlotFourierPhaseSpectrumExact[]` (siehe Bem. 3.2.2, 3.3.1).

```
In[69]:= PlotFourierPhaseSpectrum[f, d, n, 10,
          DisplayFunction->Identity];//
          Timing
Out[69]= {6.09Second, Null}

In[70]:= NPlotFourierPhaseSpectrum[f, d, n, 10,
          DisplayFunction->Identity];//
          Timing
Out[70]= {9.11Second, Null}

In[71]:= PlotFourierPhaseSpectrumExact[f, d, n,
          10, DisplayFunction->Identity];//
          Timing
Out[71]= {3.68Second, Null}
```

3.4 Interaktive Eingabe

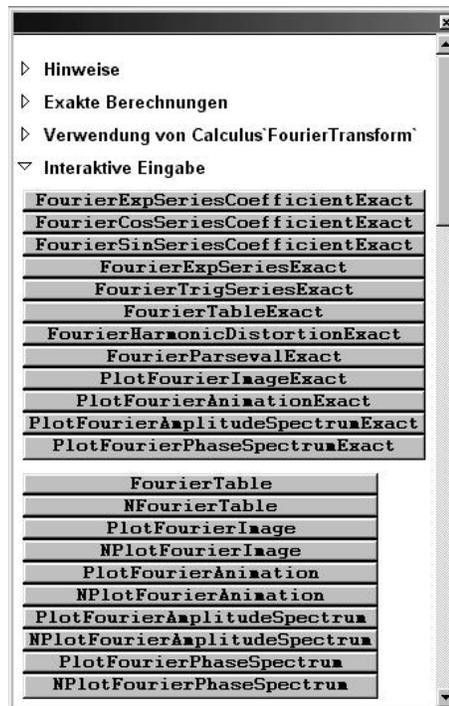


Abb. 3.4: Screenshot von *FOURIERPALETTE.NB* – interaktive Eingabe

Mit *Mathematica 3.0* ist es in beschränktem Maße möglich, interaktive Eingaben zu gestalten. Hier wurde mit dem *Mathematica*-Befehl `Input[]` ein einfacher Versuch unter-

nommen, die neuen Funktionen interaktiv zu nutzen. Durch Klicken eines Buttons (siehe Abbildung 3.4) in der *Fourierpalette* wird im aktuellen Notebook die entsprechende Funktion gestartet, wobei vorher die notwendigen Daten vom Nutzer abgefragt werden.

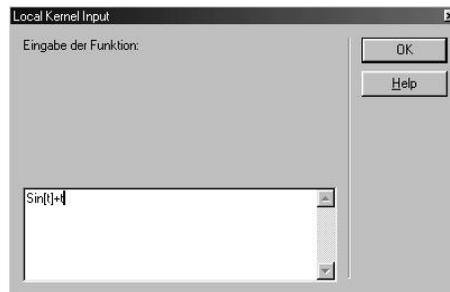


Abb. 3.5: Screenshot - interaktive Eingabe

Dies ist wie zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, kein wesentlicher Bestandteil der Diplomarbeit. Da die Dialoge zum Eingeben der Daten selbsterklärend sind, soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben im ersten Kapitel einen *kleinen* Einblick in die Anwendung der Fourieranalyse in der Praxis erhalten. Dabei wurde lediglich am Beispiel des Kluges verdeutlicht, daß Schwingungen aus vielen einzelnen harmonischen Schwingungen zusammengesetzt sein können.

Im zweiten Kapitel wurden die zum Verständnis der neuen Funktionen meines Paketes notwendigen theoretischen Grundlagen der Fourieranalyse behandelt. Einige nützliche Funktionen stehen uns im Paket *ftools.m* zur Verfügung, mit denen wir für viele periodische Funktionen die wichtigsten Fragen der Fourieranalyse beantworten können.

Im dritten Kapitel wurden alle Funktionen meines Paketes ausführlich und Besonderheiten an ausgewählten Beispielen erklärt.

Wie wir im ersten Kapitel erfahren haben, ist das Ziel der Fourieranalyse das Auffinden der in einer periodischen Schwingung vorhandenen sinusförmigen Einzelschwingungen. Interessant wäre nun zu untersuchen, welche Frequenzen mit welchen Amplituden in einem Zeitsignal $f(t)$ enthalten sind, wenn das Zeitsignal nicht periodisch ist. Die Untersuchung nichtperiodischer Funktionen bezeichnet man als Fouriertransformation. Dies stellt ein Verfahren dar, welches auch für nichtperiodische Funktionen alle Frequenzen liefert, die in einem Signal enthalten sind. Dabei wird der Ansatz verfolgt, daß die Funktion $f(t)$ eine periodische Funktion mit Periode $2p \rightarrow \infty$ ist. Die Fouriertransformation mit ihren Varianten (DFT, FFT) sowie die inverse Fouriertransformation sollen nicht mehr Gegenstand dieser Diplomarbeit sein. Es finden sich in den meisten in den Quellen angegebenen Büchern ausführliche Abhandlungen zu diesem Gebiet. Das Paket `Calculus'Fouriertransform'` enthält neben den Funktionen zur Fourieranalyse auch einige Funktionen zur Behandlung der Fouriertransformation. Beschreibungen dazu finden sich in [Wolfram97b] und in der Online-Dokumentation von *Mathematica*.

A Fourier-Entwicklung einfacher periodischer Funktionen

In folgendem wurde die Tabelle der Fourier-Entwicklung einfacher periodischer Funktionen aus [Stöcker97, S. 594] mit den Funktionen `PlotPeriodicalContinuation[]` und `FourierTrigSeriesExact[]` bis auf die letzten beiden Beispiele (da keine Angabe von $f(t)$) rekonstruiert.

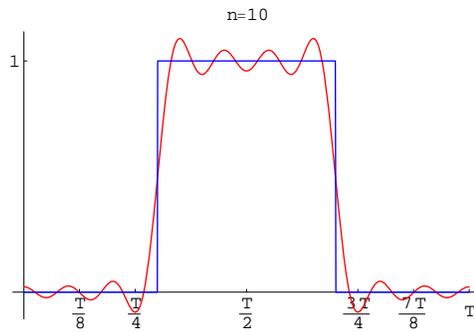
Mitunter werden die Fourierreihen in der Vorlage für gerade und ungerade n unterschieden, was die betreffenden Funktionen aus dem Paket nicht leisten. Um trotzdem ansatzweise einen Vergleich zu ermöglichen, wurde in diesen Fällen zusätzlich die abgebrochene Fourierreihe ausgegeben. Weiterhin sind die Fourierreihen in [Stöcker97] für die allgemeine Periode T und den Parameter c (falls benutzt) angegeben. In diesem Anhang wurden spezielle Vorgaben ($T = 10$, $c = \frac{1}{5} \cdot T = 2$) für diese Werte festgesetzt, da *Mathematica* sonst bei der Integration selten gute Ergebnisse liefert. Die Funktionen wurden in Abhängigkeit von T und c formuliert, so daß durch Variation dieser Werte entsprechende Funktionen und deren zugehörige Fourierreihen erzeugt werden können.

```
In[1]:= T = 10;
c := 1/5 * T;
opt := Apply[Sequence, {Ticks->{{{-T/8, "- T/8"}, {-T/4, "- T/4"},
{-T/2, "- T/2"}, {-3T/4, "- 3T/4"}, {-7T/8, "- 7T/8"},
{-T, "- T"}, {T/8, " T/8"}, {T/4, " T/4"}, {T/2, " T/2"},
{3T/4, " 3T/4"}, {7T/8, " 7T/8"}, {T, "T"}}, {-1, 1}},
PlotRange->All}];
```

```
► In[2]:= f = UnitStep[t - T/2 + c] - UnitStep[t - T/2 - c];
d := {t, 0, T};

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 10, opt]
```

$$\text{Out}[2]= \frac{2}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \cos\left[\frac{n\pi t}{5}\right] \sin\left[\frac{2n\pi}{5}\right]}{n\pi}$$



Out[2]= -Graphics-

► In[3]:= **f = UnitStep[t] - 2 * UnitStep[t - T/2];**

d := {t, 0, T};

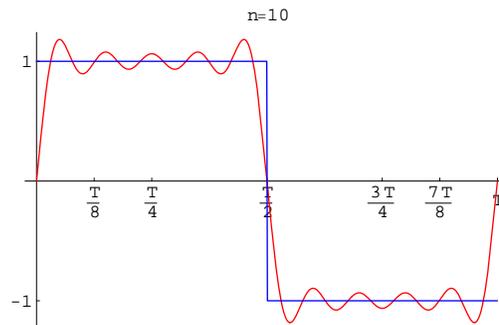
FourierTrigSeriesExact[f, d, n]

FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber -> 5]

PlotFourierImageExact[f, d, n, 10, opt]

$$\text{Out}[3]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1 + (-1)^{3n}) \sin\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n\pi}$$

$$\text{Out}[3]= \frac{4 \sin\left[\frac{\pi t}{5}\right]}{\pi} + \frac{4 \sin\left[\frac{3\pi t}{5}\right]}{3\pi} + \frac{4 \sin[\pi t]}{5\pi}$$



Out[3]= -Graphics-

► In[4]:= **f = UnitStep[t] - 2 * UnitStep[t - T/4] + 2 * UnitStep[t - 3/4 * T];**

d := {t, 0, T};

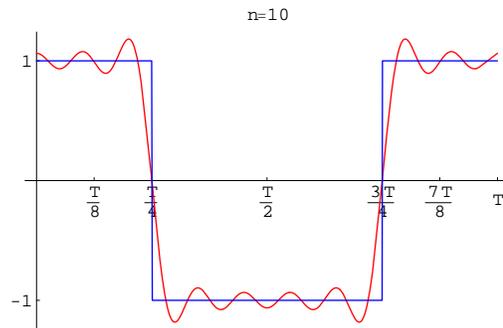
FourierTrigSeriesExact[f, d, n]

FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber -> 5]

PlotFourierImageExact[f, d, n, 10, opt]

$$\text{Out}[4]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{16(-1)^n \cos\left[\frac{n\pi}{4}\right] \cos\left[\frac{n\pi t}{5}\right] \sin\left[\frac{n\pi}{4}\right]^3}{n\pi}$$

$$\text{Out}[4]= \frac{4 \cos\left[\frac{\pi t}{5}\right]}{\pi} - \frac{4 \cos\left[\frac{3\pi t}{5}\right]}{3\pi} + \frac{4 \cos[\pi t]}{5\pi}$$

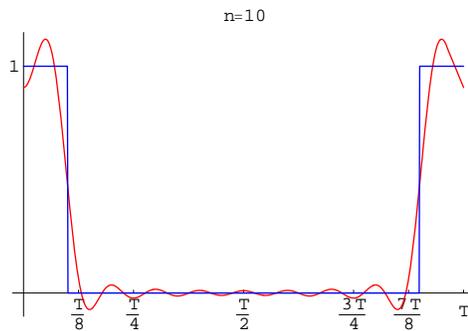


Out[4]= -Graphics-

► In[5]:= **f = UnitStep[t] - UnitStep[t - c/2] + UnitStep[t - T + c/2];**
d := {t, 0, T};

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 10, opt]

$$\text{Out}[5]= \frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n \cos\left[\frac{n\pi t}{5}\right] \sin\left[\frac{4n\pi}{5}\right]}{n\pi}$$

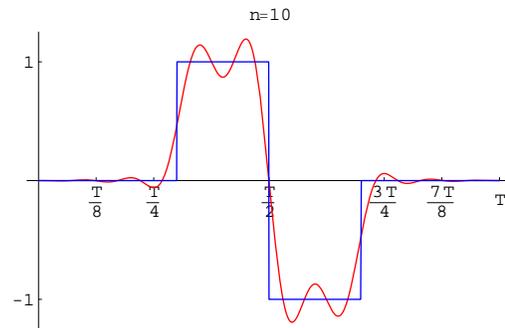


Out[5]= -Graphics-

► In[6]:= **f = UnitStep[t - T/2 + c] -**
2 * UnitStep[t - T/2] + UnitStep[t - T/2 - c];
d := {t, 0, T};

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 10, opt]

$$\text{Out}[6]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4(-1)^n \sin\left[\frac{n\pi}{5}\right]^2 \sin\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n\pi}$$



Out[6]= -Graphics-

```

➤ In[7]:= f = UnitStep[t - T/4 + c/2] -
          UnitStep[t - T/4 - c/2] - UnitStep[t - 3/4 * T + c/2] +
          UnitStep[t - 3/4 * T - c/2];
          d := {t, 0, T};

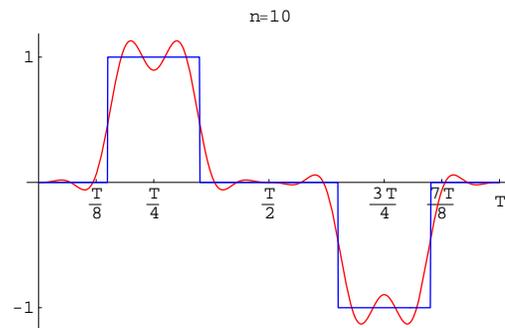
```

```

          FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
          PlotFourierImageExact[f, d, n, 10, opt]

```

$$Out[7]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n \left(\cos\left[\frac{3n\pi}{10}\right] - \cos\left[\frac{7n\pi}{10}\right] \right) \sin\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n\pi}$$



Out[7]= -Graphics-

```

➤ In[8]:= f = UnitStep[t - T/8 + c/2] -
          UnitStep[t - T/8 - c/2] - UnitStep[t - 7/8 * T + c/2] +
          UnitStep[t - 7/8 * T - c/2];
          d := {t, 0, T};

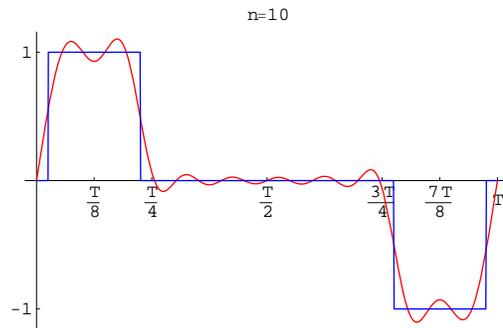
```

```

          FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
          PlotFourierImageExact[f, d, n, 10, opt]

```

$$Out[8]= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left(-\sin\left[\frac{1}{20}n\pi(1-4t)\right] + \sin\left[\frac{1}{20}n\pi(9-4t)\right] + \right. \\ \left. \sin\left[\frac{1}{20}n\pi(31-4t)\right] - \sin\left[\frac{1}{20}n\pi(39-4t)\right] \right)$$



Out[8]= -Graphics-

```

In[9]:= f = 4/T * t * UnitStep[t] - (8/T * t - 2) * UnitStep[t - T/4] +
        (8/T * t - 6) * UnitStep[t - 3/4 * T];
d := {t, 0, T};

```

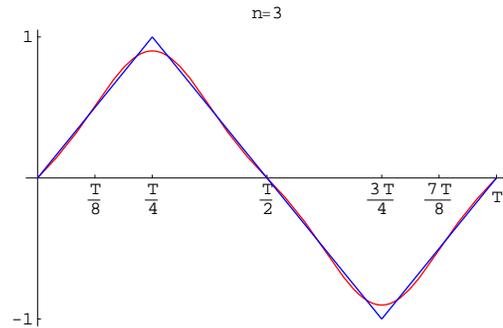
```

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber -> 5]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 3, opt]

```

$$Out[9] = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{32(-1)^n \cos\left[\frac{n\pi}{4}\right] \sin\left[\frac{n\pi}{4}\right]^3 \sin\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n^2 \pi^2}$$

$$Out[9] = \frac{8 \sin\left[\frac{\pi t}{5}\right]}{\pi^2} - \frac{8 \sin\left[\frac{3\pi t}{5}\right]}{9\pi^2} + \frac{8 \sin[\pi t]}{25\pi^2}$$



Out[9]= -Graphics-

```

In[10]:= f = 1 - 4/T * t * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T/2]) +
        4/T * (t - T) * (UnitStep[t - T/2] - UnitStep[t - T]);
d := {t, 0, T};

```

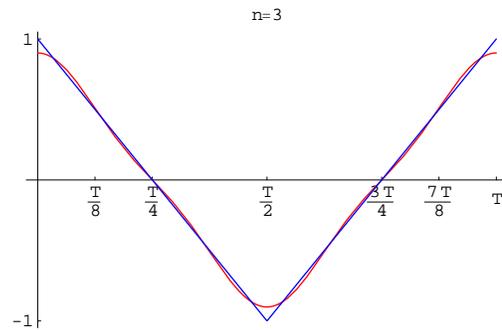
```

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber -> 5]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 3, opt]

```

$$Out[10] = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4(-1 + (-1)^n) \cos\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n^2 \pi^2}$$

$$Out[10] = \frac{8 \cos\left[\frac{\pi t}{5}\right]}{\pi^2} + \frac{8 \cos\left[\frac{3\pi t}{5}\right]}{9\pi^2} + \frac{8 \cos[\pi t]}{25\pi^2}$$



Out[10]= -Graphics-

```

➤ In[11]:= f = 8/T * t * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T/8]) - 16/(6 * T) *
            (t - T/2) * (UnitStep[t - T/8] - UnitStep[t - 7/8 * T]) +
            8/T * (t - T) * (UnitStep[t - 7/8 * T] - UnitStep[t - T]);
d := {t, 0, T};

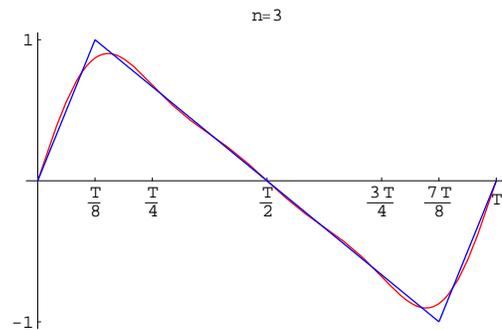
```

```

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 3, opt]

```

$$Out[11]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{32(-1)^n \sin\left[\frac{3n\pi}{4}\right] \sin\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{3n^2\pi^2}$$



Out[11]= -Graphics-

```

➤ In[12]:= f = 6/T * t * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T/6]) - 12/(4 * T) *
            (t - T/2) * (UnitStep[t - T/6] - UnitStep[t - 5/6 * T]) +
            6/T * (t - T) * (UnitStep[t - 5/6 * T] - UnitStep[t - T]);
d := {t, 0, T};

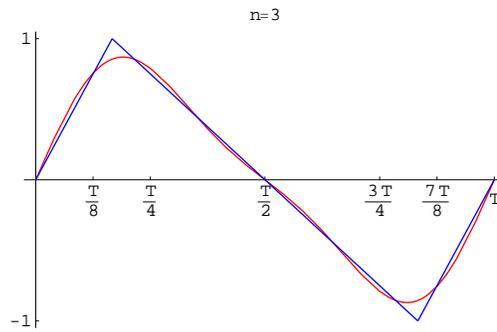
```

```

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 3, opt]

```

$$Out[12]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{9(-1)^n \sin\left[\frac{2n\pi}{3}\right] \sin\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n^2\pi^2}$$



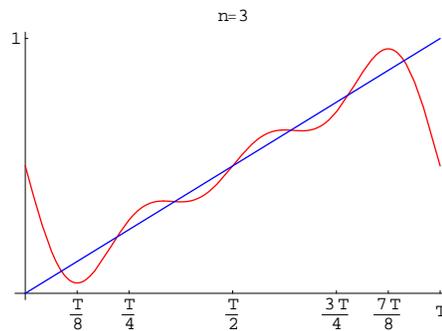
Out[12]= -Graphics-

```

➤ In[13]:= f = 1/T * t;
          d := {t, 0, T};

          FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
          PlotFourierImageExact[f, d, n, 3, opt]
    
```

$$Out[13]= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n\pi}$$



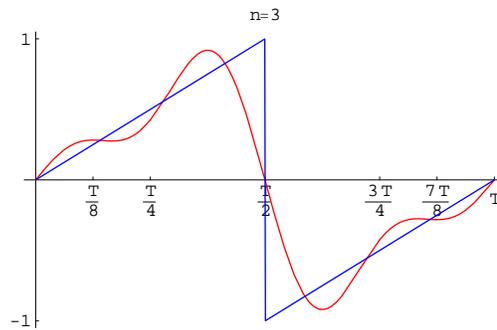
Out[13]= -Graphics-

```

➤ In[14]:= f = 2/T * t * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T/2]) +
          2/T * (t - T) * (UnitStep[t - T/2] - UnitStep[t - T]);
          d := {t, 0, T};

          FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
          PlotFourierImageExact[f, d, n, 3, opt]
    
```

$$Out[14]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n \sin\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n\pi}$$



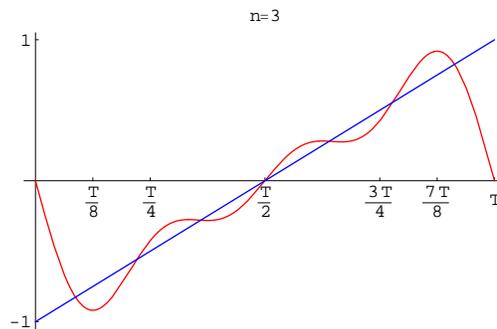
Out[14]= -Graphics-

```

➤ In[15]:= f = 2/T * (t - T/2) * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T]);
          d := {t, 0, T};

          FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
          PlotFourierImageExact[f, d, n, 3, opt]
    
```

$$Out[15] = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2 \sin\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n\pi}$$



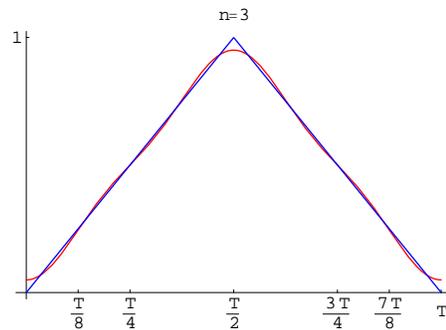
Out[15]= -Graphics-

```

➤ In[16]:= f = 2/T * t * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T/2]) -
          2/T * (t - T) * (UnitStep[t - T/2] - UnitStep[t - T]);
          d := {t, 0, T};

          FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
          PlotFourierImageExact[f, d, n, 3, opt]
    
```

$$Out[16] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1 + (-1)^{3n}) \cos\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n^2\pi^2}$$



Out[16]= -Graphics-

```

➤ In[17]:= f = 2/(T - c) * t * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T/2 + c/2]) +
           (UnitStep[t - T/2 + c/2] - UnitStep[t - T/2 - c/2]) -
           2/(T - c) * (t - T) * (UnitStep[t - T/2 - c/2] - UnitStep[t - T]);
d := {t, 0, T};

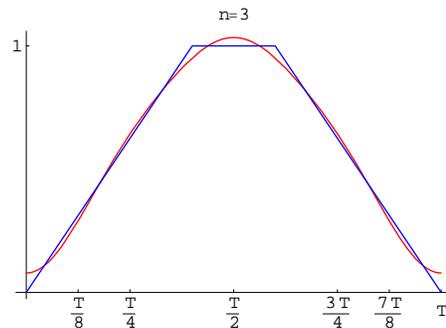
```

```

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 3, opt]

```

$$Out[17]= \frac{3}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \left(-1 + (-1)^n \cos \left[\frac{n\pi}{5} \right] \right) \cos \left[\frac{n\pi t}{5} \right]}{2n^2\pi^2}$$



Out[17]= -Graphics-

```

➤ In[18]:= f = 1/c * t * (UnitStep[t] - UnitStep[t - c]) +
           (UnitStep[t - c] - UnitStep[t - T/2 + c]) - 1/(c) * (t - T/2) *
           (UnitStep[t - T/2 + c] - UnitStep[t - T/2 - c]) -
           UnitStep[t - T/2 - c] - UnitStep[t - T + c] +
           1/c * (t - T + 2 * c) * (UnitStep[t - T + c] - UnitStep[t - T]);
d := {t, 0, T};

```

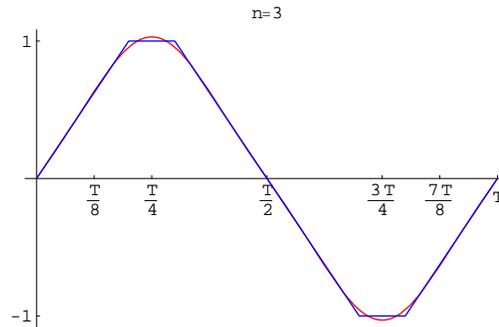
```

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber -> 5]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 3, opt]

```

$$Out[18]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{5(-1)^n \left(\sin \left[\frac{2n\pi}{5} \right] + \sin \left[\frac{3n\pi}{5} \right] \right) \sin \left[\frac{n\pi t}{5} \right]}{n^2\pi^2}$$

$$\text{Out}[18]= \frac{5\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})} \sin\left[\frac{\pi t}{5}\right]}{\pi^2} - \frac{5\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})} \sin\left[\frac{3\pi t}{5}\right]}{9\pi^2}$$



Out[18]= -Graphics-

```

► In[19]:= f = 2/(T - 2 * c) * (t - c/2) *
      (UnitStep[t - c/2] - UnitStep[t - T/2 + c/2]) +
      (UnitStep[t - T/2 + c/2] - UnitStep[t - T/2 - c/2]) -
      2/(T - 2 * c) * (t - T/2 - 2 * c) *
      (UnitStep[t - T/2 - c/2] - UnitStep[t - T + c/2]);
d := {t, 0, T};

```

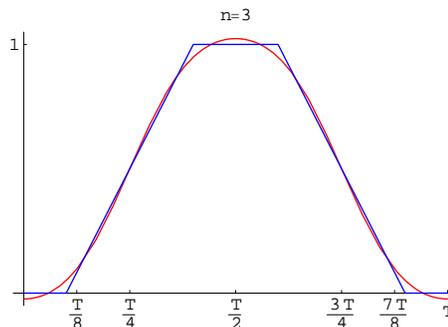
```

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber -> 3]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 3, opt]

```

$$\text{Out}[19]= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(-1)^n \left(\cos\left[\frac{n\pi}{5}\right] - \cos\left[\frac{4n\pi}{5}\right] \right) \cos\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{3n^2\pi^2}$$

$$\text{Out}[19]= \frac{1}{2} - \frac{5(1+\sqrt{5}) \cos\left[\frac{\pi t}{5}\right]}{3\pi^2} + \frac{5\left(\frac{1}{4}(1-\sqrt{5}) + \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})\right) \cos\left[\frac{2\pi t}{5}\right]}{6\pi^2} - \frac{5(1-\sqrt{5}) \cos\left[\frac{3\pi t}{5}\right]}{27\pi^2}$$



Out[19]= -Graphics-

```

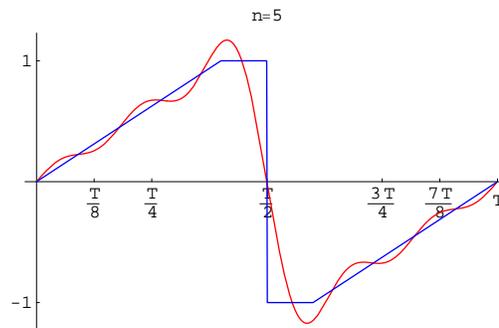
➤ In[20]:= f = 2/(T - c) * t * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T/2 + c/2]) +
          UnitStep[t - T/2 + c/2] - UnitStep[t - T/2] -
          UnitStep[t - T/2] - UnitStep[t - T/2 - c/2] + 2/(T - c) *
          (t - T/2 + 3/2c) * (UnitStep[t - T/2 - c/2] - UnitStep[t - T]);
          d := {t, 0, T};

```

```
FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
```

```
PlotFourierImageExact[f, d, n, 5, opt]
```

$$\text{Out}[20]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n (4n\pi + 5 \sin[\frac{n\pi}{5}]) \sin[\frac{n\pi t}{5}]}{2n^2\pi^2}$$



Out[20]= -Graphics-

```

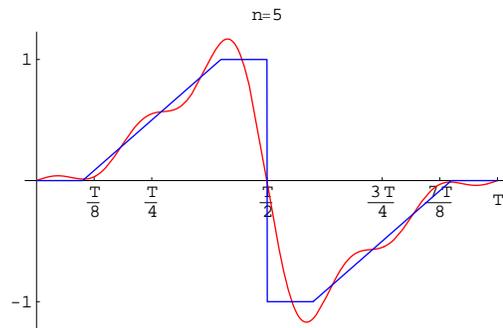
➤ In[21]:= f = 2/(T - 2 * c) * (t - c/2) *
          (UnitStep[t - c/2] - UnitStep[t - T/2 + c/2]) +
          UnitStep[t - T/2 + c/2] -
          UnitStep[t - T/2] - UnitStep[t - T/2] -
          UnitStep[t - T/2 - c/2] + 2/(T - 2 * c) * (t - T/2 + c) *
          (UnitStep[t - T/2 - c/2] - UnitStep[t - T + c/2]) +
          2 * (UnitStep[t - T + c/2] - UnitStep[t - T]);
          d := {t, 0, T};

```

```
FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
```

```
PlotFourierImageExact[f, d, n, 5, opt]
```

$$\text{Out}[21]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n (3n\pi + 5 \sin[\frac{n\pi}{5}] - 5 \sin[\frac{4n\pi}{5}]) \sin[\frac{n\pi t}{5}]}{3n^2\pi^2}$$



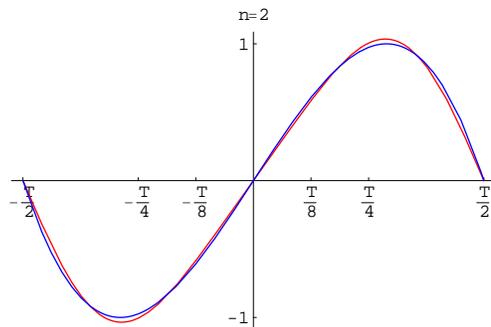
Out[21]= -Graphics-

► In[22]:= $f = 36/\text{Sqrt}[3] * t * (T/2 - t) * (T/2 + t)/T^3;$
 $d = \{t, -T/2, T/2\};$

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]

PlotFourierImageExact[f, d, n, 2, opt]

$$\text{Out}[22]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{18(-1)^n \text{Sin}\left[\frac{n\pi t}{5}\right] \left(\text{Cosh}\left[\frac{\text{Log}[3]}{2}\right] + \text{Sinh}\left[\frac{\text{Log}[3]}{2}\right]\right)}{n^3 \pi^3}$$



Out[22]= -Graphics-

► In[23]:= $f = 4 * t * (T/2 + t)/(T/2)^2 * (\text{UnitStep}[t + T/2] - \text{UnitStep}[t]) +$
 $4 * t * (T/2 - t)/(T/2)^2 * (\text{UnitStep}[t] - \text{UnitStep}[t - T/2]);$
 $d = \{t, -T/2, T/2\};$

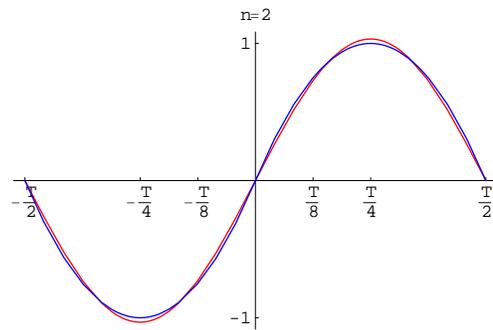
FourierTrigSeriesExact[f, d, n]

FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber -> 5]

PlotFourierImageExact[f, d, n, 2, opt]

$$\text{Out}[23]= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8(-2 + (-1)^n + (-1)^{3n}) \text{Sin}\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n^3 \pi^3}$$

$$\text{Out}[23]= \frac{32 \text{Sin}\left[\frac{\pi t}{5}\right]}{\pi^3} + \frac{32 \text{Sin}\left[\frac{3\pi t}{5}\right]}{27\pi^3} + \frac{32 \text{Sin}[\pi t]}{125\pi^3}$$



Out[23]= -Graphics-

```

➤ In[24]:= f =
      -4 * t * (T/2 + t) / (T/2)^2 * (UnitStep[t + T/2] - UnitStep[t]) +
      4 * t * (T/2 - t) / (T/2)^2 * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T/2]);
d = {t, -T/2, T/2};

```

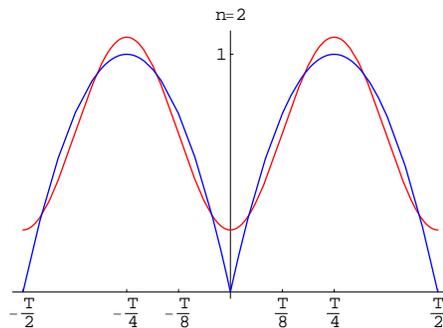
```

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber -> 6]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 2, opt]

```

$$Out[24] = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4(2 + (-1)^n + (-1)^{3n}) \cos\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n^2 \pi^2}$$

$$Out[24] = \frac{2}{3} - \frac{4 \cos\left[\frac{2\pi t}{5}\right]}{\pi^2} - \frac{\cos\left[\frac{4\pi t}{5}\right]}{\pi^2} - \frac{4 \cos\left[\frac{6\pi t}{5}\right]}{9\pi^2}$$



Out[24]= -Graphics-

```

➤ In[25]:= f = t^2 / (T/2)^2;
d = {t, -T/2, T/2};

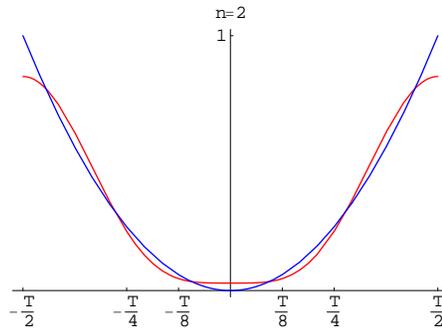
```

```

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 2, opt]

```

$$Out[25] = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n \cos\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{n^2 \pi^2}$$



Out[25]= -Graphics-

```

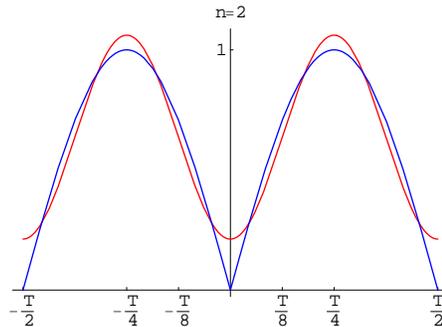
➤ In[26]:= f = Abs[Sin[2πt/T]];
d = {t, -T/2, T/2};

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber->6]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 2, opt]

```

$$\text{Out}[26]= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{2(1+(-1)^n)\text{Cos}\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{(-1+n^2)\pi}$$

$$\text{Out}[26]= \frac{2}{\pi} - \frac{4\text{Cos}\left[\frac{2\pi t}{5}\right]}{3\pi} - \frac{4\text{Cos}\left[\frac{4\pi t}{5}\right]}{15\pi} - \frac{4\text{Cos}\left[\frac{6\pi t}{5}\right]}{35\pi}$$



Out[26]= -Graphics-

```

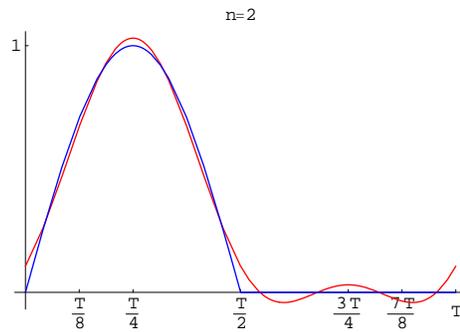
➤ In[27]:= f = Sin[2πt/T] * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T/2]);
d = {t, 0, T};

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber->6]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 2, opt]

```

$$\text{Out}[27]= \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{(1+(-1)^n)\text{Cos}\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{(-1+n^2)\pi} + \frac{1}{2}\text{Sin}\left[\frac{\pi t}{5}\right]$$

$$\text{Out}[27]= \frac{1}{\pi} - \frac{2\text{Cos}\left[\frac{2\pi t}{5}\right]}{3\pi} - \frac{2\text{Cos}\left[\frac{4\pi t}{5}\right]}{15\pi} - \frac{2\text{Cos}\left[\frac{6\pi t}{5}\right]}{35\pi} + \frac{1}{2}\text{Sin}\left[\frac{\pi t}{5}\right]$$



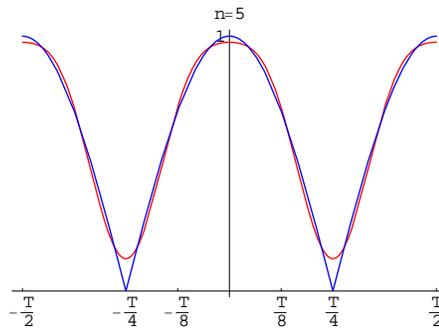
Out[27]= -Graphics-

► In[28]:= **f = Abs[Cos[2 * π/T * t]];**
d = {t, -T/2, T/2};

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber -> 6]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 5, opt]

$$\text{Out}[28] = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(1 + (-1)^n) \cos\left[\frac{1}{10}n\pi(5 + 2t)\right] \left(-1 + n \sin\left[\frac{n\pi}{2}\right]\right)}{(-1 + n^2)\pi}$$

$$\text{Out}[28] = \frac{2}{\pi} - \frac{4 \cos\left[\frac{1}{5}\pi(5 + 2t)\right]}{3\pi} - \frac{4 \cos\left[\frac{2}{5}\pi(5 + 2t)\right]}{15\pi} - \frac{4 \cos\left[\frac{3}{5}\pi(5 + 2t)\right]}{35\pi}$$



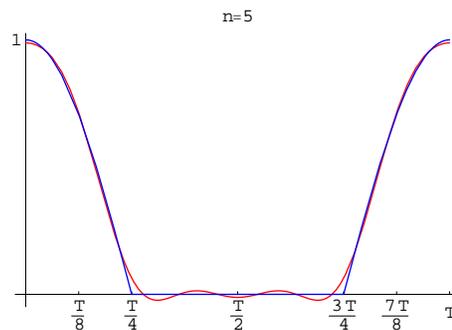
Out[28]= -Graphics-

► In[29]:= **f = Cos[2 * π/T * t] * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T/4]) +**
Cos[2 * π/T * t] * (UnitStep[t - 3/4 * T] - UnitStep[t - T]);
d = {t, 0, T};

FourierTrigSeriesExact[f, d, n]
FourierTrigSeriesExact[f, d, n, FourierNumber -> 6]
PlotFourierImageExact[f, d, n, 5, opt]

$$\text{Out}[29] = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos\left[\frac{\pi t}{5}\right] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n \cos\left[\frac{n\pi}{2}\right] \cos\left[\frac{n\pi t}{5}\right] (-1 + 2n \sin\left[\frac{n\pi}{2}\right])}{(-1 + n^2)\pi}$$

$$\text{Out}[29] = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos\left[\frac{\pi t}{5}\right] + \frac{2 \cos\left[\frac{2\pi t}{5}\right]}{3\pi} - \frac{2 \cos\left[\frac{4\pi t}{5}\right]}{15\pi} + \frac{2 \cos\left[\frac{6\pi t}{5}\right]}{35\pi}$$



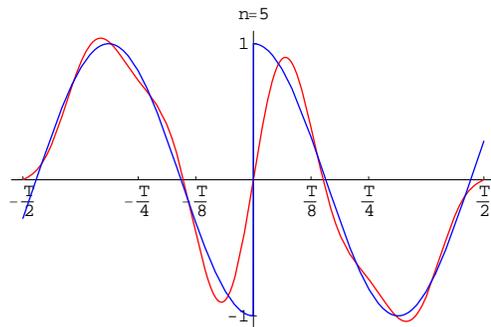
Out[29]= -Graphics-

► `In[30]:= f = -Cos[t] * (UnitStep[t + T/2] - UnitStep[t]) + Cos[t] * (UnitStep[t] - UnitStep[t - T/2]);`
`d = {t, -T/2, T/2};`

`FourierTrigSeriesExact[f, d, n]`

`PlotFourierImageExact[f, d, n, 5, opt]`

$$\text{Out}[30] = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n\pi (-2 + (-1)^n \cos[5] + (-1)^{3n} \cos[5]) \sin\left[\frac{n\pi t}{5}\right]}{-25 + n^2\pi^2}$$



Out[30]= -Graphics-

Literaturverzeichnis

- [Brigola97] Brigola, Rolf: Fourieranalysis, Distributionen und Anwendung. Vieweg, 1997.
- [Engelmann97] Engelmann, Bernd: Numerik III, Vorlesungsmitschriften. Hochschule für Wirtschaft, Technik und Kultur (HTWK) Leipzig, SS 1997.
- [Herrman83] Herrmann, Urbi F.: Handbuch der Elektroakustik. Dr. Alfred Hüthig Verlag GmbH, Heidelberg, 1983.
- [Huter94] Huter, Michael: Akustik: Die Hörbarkeit von Phasenänderungen in synthetischen Klängen. Diplomarbeit, Fachhochschule Düsseldorf, 1994. Erreichbar unter http://www.fh-duesseldorf.de/WWW/DOCS/FB/ETECH/DOCS/tb/media/huter/hut_dipl.html
- [Mazzola90] Mazzola, Guerino: Geometrie der Töne. Birkhäuser Verlag, Berlin, 1990.
- [Pierce89] Pierce, John R.: Klang: Musik mit den Ohren der Physik. Spektrumder-Wiss.-Verlagsgesellschaft, 1989.
- [Stöcker97] Stöcker, Horst: Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren (CD-ROM-Version). Verlag Harri Deutsch, 1998.
- [StGaVo97] Strampp, Walter; Ganzha, Victor; Vorozhtsov, Evgenij: Höhere Mathematik mit *Mathematica*, Band 4. Vieweg, 1997
- [Werner97] Werner, Wilhelm: Mathematik lernen mit Maple, Band 2. dpunkt Verlag, Heidelberg, 1998, Abschnitt 1.6.2.
- [Westermann97] Westermann, Thomas. Mathematik für Ingenieure mit Maple Band 2. Springer, 1997.
- [Wolfram97a] Wolfram, Stephen: Das *Mathematica*-Buch: *Mathematica* Version 3. Addison Wesley Longman Verlag, 1997.
- [Wolfram97b] Wolfram, Stephen: Standard Add-On Package. Longman Verlag, 1997.

Index

A

Amplitudenspektrum 33

B

Besselsche Ungleichung 40

D

Dirichlet-Kerne 44

E

Eulersche Formel 33

F

FourierCosSeriesCoefficientExact[] . 56

FourierExpSeriesCoefficientExact[] . 54

FourierExpSeriesExact[] 59

FourierHarmonicDistortionExact[] .. 65

Fourierkoeffizienten 15

FourierParsevalExact[] 66

Fourierreihe 14

 abgebrochene 16

 komplexe 33

FourierSinSeriesCoefficientExact[] .. 57

FourierTable[] 77

FourierTableExact[] 62

Fouriertransformation 86

FourierTrigSeriesExact[] 61

Funktion

 gerade 22

 periodische 10

 ungerade 26

G

Gibbssches Phänomen 21

Grundschwingung 31

Grundton 4

H

Harmonische 5

K

Klang 4

Klangfarbe 7

Klirrfaktor 33

Koeffizienten 11

Kreisfrequenz 31

M

Mittelwerteigenschaft 19

N

NFourierTable[] 77

NPlotFourierAmplitudeSpectrum[] .. 81

NPlotFourierAnimation[] 80

NPlotFourierImage[] 79

NPlotFourierPhaseSpectrum[] 83

O

Oberschwingung 31

Obertöne 4

Orthogonalität 12

P

Paket 8

Palette, *FOURIERPALETTE.NB* 49

Parsevalsche Gleichung 42

Phasenspektrum 33

PlotFourierAmplitudeSpectrum[] ... 81

PlotFourierAmplitudeSpectrumExact[] 73

PlotFourierAnimation[] 80

PlotFourierAnimationExact[] 70

PlotFourierImage[] 79

PlotFourierImageExact[] 67

PlotFourierPhaseSpectrum[] 83

PlotFourierPhaseSpectrumExact[] ... 75

PlotPeriodicalContinuation[] 51

R

Riemann-Lebesgue-Lemma 42

S

Satz von Dirichlet 46

Schall 4

Symmetrie 22

T

Trigonometrische Reihe 11

Trigonometrisches Polynom 11

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich diese Diplomarbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle wörtlich oder sinngemäß übernommenen Ausführungen wurden als solche gekennzeichnet. Weiterhin erkläre ich, daß ich diese Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form nicht bereits einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt habe.

Halle, den 16. April 2000

.....
Lars Denkewitz