Klausur Diskrete Strukturen I

(Informatiker)

15. März 2010

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Nach der Herstellung einer Ware wird ein Kontrollverfahren durchgeführt, das die Ware auf Korrektheit überprüfen soll. Diese Kontrolle ist relativ zuverlässig, in folgendem Sinn:
- Wenn die Ware korrekt ist, meldet das Kontrollverfahren diese Korrektheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %.
- Wenn die Ware nicht korrekt ist, dann meldet die Kontrolle Korrektheit allerdings nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 %.
Insgesamt ist 90 % der Ware korrekt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ware nicht korrekt ist, obwohl das Kontollverfahren dies meldet.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ folgende Zufallsvariable: Der Wahrscheinlichkeitsraum Ω sei $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ mit Gleichverteilung, d.h. es gelte $p(\{(i,j)\}) = 1/9$ für jedes Elementarereignis $\{(i,j)\}$; die Funktion X sei gegeben durch $X((i,j)) = i + j$. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$ sowie den Wert $P(|X - E(X)| \geq 2) - V(X)/2^2$, der in der Chebychev-Ungleichung vorkommt.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Finden Sie eine explizite Lösungsformel für die Folgenglieder x_n, die rekursiv gegeben sind durch

$$x_n = 6\,x_{n-1} - 12\,x_{n-2} + 8\,x_{n-3} \text{ für } n \geq 3$$

mit den Anfangswerten

$$x_0 = -1\,,\; x_1 = 0\,,\; x_2 = 12\,.$$

Berechnen Sie explizit x_{10}.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Es sei M eine endliche Menge mit n ($n \geq 2$) Elementen. Außerdem sei N gleich der Menge $\{1, 2\}$.

a) Ergänzen Sie den folgenden Satz: "Eine Abbildung $f : M \to N$ ist genau dann surjektiv, wenn ...".

b) Berechnen Sie die Anzahl aller surjektiven Abbildungen $f : M \to N$.

c) Ergänzen Sie den folgenden Satz: "Eine Abbildung $g : N \to M$ ist genau dann injektiv, wenn ...".

d) Wieviel Prozent aller Abbildungen $g : N \to M$ sind injektiv?

Begründen Sie Ihre Antworten genau!

Aufgabe 5 (4 Punkte):

a) Geben Sie alle Permutationen auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ an, die sich als Produkt von genau zwei disjunkten Zykeln schreiben lassen.

b) Bestimmen Sie die Stirlingzahl erster Art $s_{4,2}$.

Lösungen:

Aufgabe 1: Das Ereignis A sei „die Ware ist korrekt“, das Ereignis B sei „das Kontrollverfahren meldet Korrektheit“. Dann gilt nach Voraussetzung:

$$p\,(B|A) = 0,9\,,\; p\,(B|\Omega \setminus A) = 0,1\,,\; p\,(A) = 0,9\,.$$

Man rechnet dann:

$$p\,(B) = p\,(B|A) \cdot p\,(A) + p\,(B|\Omega \setminus A) \cdot p\,(\Omega \setminus A) = 0,9 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,82\,.$$

Gesucht ist $p\,(\Omega \setminus A|B)$, nach Bayes gilt:

$$p\,(\Omega \setminus A)|B) = p\,(B|\Omega \setminus A) \cdot p\,(\Omega \setminus A) \cdot p\,(B)^{-1} = \frac{1}{82} \approx 0,0122\,,$$

also $p\,(\Omega \setminus A|B) = 1,22\,\%$.

Aufgabe 2: Der Erwartungswert ist:
$E(X) = 2 \cdot p(X=2) + 3 \cdot p(X=3) + 4 \cdot p(X=4) + 5 \cdot p(X=5) + 6 \cdot p(X=6)$
$= 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{3}{9} + 5 \cdot \frac{2}{9} + 6 \cdot \frac{1}{9} = 4.$
Die Varianz ist:
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4 \cdot \frac{1}{9} + 9 \cdot \frac{2}{9} + 16 \cdot \frac{3}{9} + 25 \cdot \frac{2}{9} + 36 \cdot \frac{1}{9} - 16 = \frac{4}{3}.$
Wir rechnen weiter:
$p\big(|X - E(X)| \geq 2\big) - \frac{V(X)}{2^2} = p(\{(i,j) \mid |i+j-4| \geq 2\}) - \frac{1}{3}$
$= p\{(1,1),(3,3)\} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}.$
Dies ist ≤ 0, wie es die Chebychev-Ungleichung vorhersagt.

Aufgabe 3: Wir betrachten $x_n = 6\,x_{n-1} - 12\,x_{n-2} + 8\,x_{n-3}$. Das charakteristische Polynom ist $x^3 - 6\,x^2 + 12\,x - 8 = (x-2)^3$. Deshalb hat x_n die Form $x_n = (a + b\,n + c\,n^2) \cdot 2^n$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wir bestimmen die Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a = -1 \\
x_1 &= (a+b+c) \cdot 2 = 0 \\
x_2 &= (a+2\,b+4\,c) \cdot 4 = 12
\end{aligned}
$$

Hieraus erhält man (Lösen des LGS): $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$.
Also $x_n = (-1 + n^2) \cdot 2^n$.
Speziell gilt $x_{10} = (-1 + 100) \cdot 2^{10} = 99 \cdot 1024 = 101376$.

Aufgabe 4: a), c) findet man in der Vorlesung.
zu b) Es gibt 2^n verschiedene Abbildungen von M nach N. 2 davon sind nicht surjektiv, nämlich die Abbildung, die alles auf 1 und die Abbildung, die alles auf 2 abbildet. Also gibt es genau $2^n - 2$ surjektive Abbildungen von M nach N.
zu d) Es gibt genau n^2 Abbildungen von N nach M. Und es gibt genau $n(n-1) = \binom{n}{2} \cdot 2$ injektive Abbildungen von N nach M. Also sind $\frac{n(n-1)}{n^2} \cdot 100\%$ der Abbildungen injektiv, dies sind $\frac{n-1}{n} \cdot 100\%$.

Aufgabe 5: a) Wir listen diese Permutationen auf:
$(1)\,(2\,3\,4)$, $(1)\,(2\,4\,3)$, $(2)\,(1\,3\,4)$, $(1\,4\,3)$,
$(3)\,(1\,2\,4)$, $(3)\,(1\,4\,2)$, $(4)\,(1\,2\,3)$, $(4)\,(1\,3\,2)$
$(1\,2)\,(3\,4)$, $(1\,3)\,(2\,4)$, $(1\,4)\,(2\,3)$.
b) $S_{4,2}$ ist gerade die Anzahl der Permutationen aus Teil a), also $S_{4,2} = 11$.