NACHKLAUSUR

Diskrete Strukturen I

1. 10. 2003 9:00 - 11:00

Prof. Dr. Gunter Malle

Dr. Andreas Klein

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur müssen 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4a)	4b)

Punkte:	Note:

Die Aufgaben 4a und 4b sind Wahlaufgaben. Sie müssen nur eine dieser Aufgaben bearbeiten. Wenn Sie beide Aufgaben bearbeiten, wird nur die bessere gewertet.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Acht frisch verheirate Paare wollen mit vier Booten einen Ausflug machen. Die Boote sind rot, blau, grün und gelb gestrichen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 16 Personen auf die vier Boote zu verteilen,

a) ohne weitere Einschränkung (Boote dürfen leer bleiben)?

b) wenn kein Paar getrennt werden darf (Boote dürfen leer bleiben)?

c) wenn in jedem der vier Boote mindestens eine Person sitzen soll?

d) wenn in jedem der vier Boote mindestens eine Frau sitzen soll?

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Für die Stirlingzahlen zweiter Art gilt:

$$\left\{ {m+n+1 \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ {n+k \atop k} \right\} .$$

b) Für die Stirlingzahlen erster Art gilt:

$$\left[{m+n+1 \atop m} \right] = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \left[{n+k \atop k} \right] .$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Geben Sie eine explizite Formel für die durch folgende Rekursionsgleichung definierte Folge an:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

und $a_0 = a_1 = 1$.

Aufgabe 4a: (6 Punkte)

a) Zeichnen Sie den (gerichteten) Graphen, der durch die folgende Adjazenzmatrix beschrieben wird.

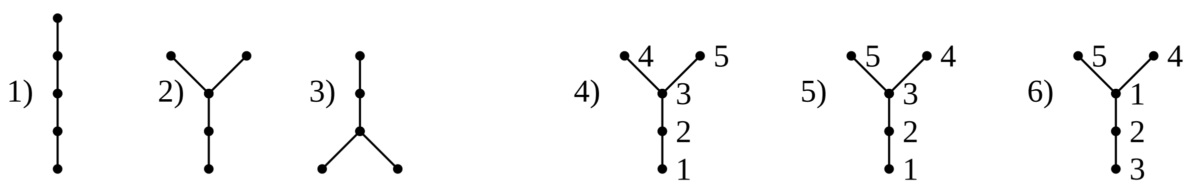
$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Wege der Länge 4 zwischen den Ecken A und E.

c) Zeigen Sie, daß es keinen Weg von E nach A gibt.

Aufgabe 4b: (6 Punkte)

Ein Graph mit n Ecken heißt markierter Graph, wenn die Ecken mit den Zahlen von 1 bis n numeriert sind. Im Gegensatz zu einem unmarkierten Graphen sind daher bei einem markierten Graphen die Ecken unterscheidbar.
Beispiel:



Der Graph 1) unterscheidet sich von den Graphen aus 2) und 3). Die in 2) und 3) abgebildeten Graphen sind jedoch gleich.
Die Graphen 4) und 5) sind auch als markierte Graphen gleich. Sie unterscheiden sich jedoch von dem Graphen 6).

a) Bestimmen Sie alle verschiedenen unmarkierten Bäume mit 6 Ecken. (Zur Kontrolle: Es gibt 6 verschiedene Typen.)

b) Bestimmen Sie die Anzahl der markierten Bäume mit 6 Ecken.

Lösung Aufgabe 1

a) 4^{16} (Entscheide für jede Person in welchen Boot Sie sitzt.)

b) 4^{8}

c) Mit der Siebformel erhält man:
Es gibt $4^{16} - \binom{4}{3}3^{16} + \binom{4}{2}2^{16} - \binom{4}{1}1^{16}$ Möglichkeiten.
Vielleicht einfacher geht es mit Stirlingzahlen zweiter Art:
Es gibt $\left\{ {16 \atop 4} \right\} 4!$ Möglichkeiten.

d) $4^8 \cdot \left\{ {8 \atop 4} \right\} 4!$

Lösung Aufgabe 2

Beweis mit vollständiger Induktion nach m.

a) **Induktionsanfang:** $m = 0$

$$\left\{ {n+1 \atop 0} \right\} = 0 = \left\{ {n \atop 0} \right\}$$

Induktionsvoraussetzung: $\left\{ {m+n+1 \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ {n+k \atop k} \right\}$
Induktionsbehauptung: $\left\{ {m+n+2 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=0}^{m+1} k \left\{ {n+k \atop k} \right\}$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} k \left\{ {n+k \atop k} \right\} &= \left(\sum_{k=0}^{m} k \left\{ {n+k \atop k} \right\} \right) + (m+1) \left\{ {n+m+1 \atop m} \right\} \\
&= \left\{ {m+n+1 \atop m} \right\} + (m+1) \left\{ {n+m+1 \atop m+1} \right\} \\
&= \left\{ {n+n+2 \atop m+1} \right\}
\end{aligned}$$

b) **Induktionsanfang:** $m = 0$

$$\left[{n+1 \atop 0} \right] = 0 = n \left[{n \atop 0} \right]$$

Induktionsvoraussetzung: $\left[{m+n+1 \atop m} \right] = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \left[{n+k \atop k} \right]$
Induktionsbehauptung: $\left[{m+n+2 \atop m+1} \right] = \sum_{k=0}^{m+1} (n+k) \left[{n+k \atop k} \right]$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} k \left[{n+k \atop k} \right] &= \left(\sum_{k=0}^{m} k \left[{n+k \atop k} \right] \right) + (n+m+1) \left[{n+m+1 \atop m} \right] \\
&= \left[{m+n+1 \atop m} \right] + (n+m+1) \left[{n+m+1 \atop m+1} \right] \\
&= \left[{n+n+2 \atop m+1} \right]
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 3

Die erzeugende Funktion $A(x)$ erfüllt die Gleichung

$$A(x) = 4xA(x) - 4x^2A(x) - 3x + 1 .$$

Also ist

$$A(x) = \frac{3x+1}{1-4x+4x^2} .$$

Partialbruchzerlegung liefert

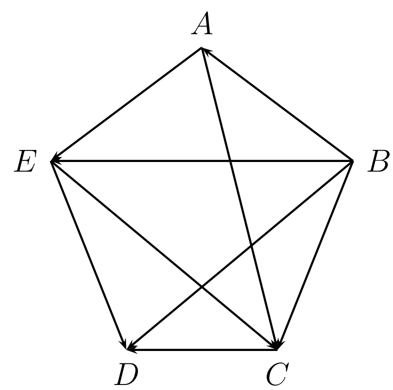
$$A(x) = \frac{3/2}{1-2x} + \frac{-1/2}{(1-2x)^2} .$$

Daher gilt

$$a(x) = \frac{3}{2}2^n - \frac{1}{2}(n+1)2^n .$$

Lösung Aufgabe 4a

a)



b) Wir berechnen

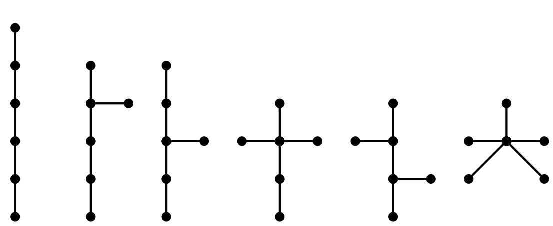
$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Es gibt also keinen Weg der Länge 4 von A nach E. (Der einzige Weg der Länge 4 führt von B nach D.)

c) Von den Ecken C, D, E gibt es keine Kante zu einer der Ecken A oder B. Also gibt es keinen Weg von E (bzw. C, D) nach A (bzw. B).

Lösung Aufgabe 4b

a) Eine der einfachsten Möglichkeiten die verschiedenen Typen aufzuzählen ist, die Graphen nach ihrem Durchmesser zu ordnen.



b) Man kann nun leicht für jeden der 6 Typen die Anzahl der möglichen Markierungen bestimmen.

Typ 1: $\frac{1}{2}6!$

Typ 2: $\binom{6}{2}4!$

Typ 3: $6(\frac{1}{2}5!)$

Typ 4: $\binom{6}{3}3!$

Typ 5: $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$

Typ 6: 6

Insgesamt gibt es daher $1296 = 6^4$ verschiedene markierte Bäume mit 6 Ecken.