KLAUSUR

Diskrete Strukturen II
Wintersemester 2006/2007

8. 3. 2007

(R. Küstner)

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:

Bitte schreiben Sie auf jedes Ihrer Blätter an den oberen Rand Ihren Namen und Vornamen sowie auch Ihre Matrikelnummer.

Bitte schreiben Sie so, daß man Ihre Schrift auch lesen kann.

Bitte denken Sie daran, Ihre Antworten zu begründen und daß Sie mit Ihren Ergebnissen auch stets eine Probe machen sollten.

Zum Bestehen der Klausur sollten 40 Punkte erreicht werden.

1.a)	1.b)	2.	3.	4.	5.a)	5.b)	6.	7.	8.

Punkte:	Note:

Klausur (8. 3. 2007)

1. Aufgabe (5+8 Punkte)
   a) Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^3 \not\equiv 2 \bmod 4$.
   b) Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^5 \equiv a \bmod 30$.
   Hinweis: $a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)$

2. Aufgabe (9 Punkte)
   Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(6785, 5474)$ sowie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(6785, 5474) = x \cdot 6785 + y \cdot 5474$.

3. Aufgabe (10 Punkte)
   Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(1508, 1218)$ mit Hilfe des binären euklidischen Algorithmus.

4. Aufgabe (9 Punkte)
   Untersuchen Sie, ob die Kongruenz $91x \equiv 143 \bmod 221$ in $\mathbb{Z}$ lösbar ist und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

5. Aufgabe (8+12 Punkte)
   Bestimmen Sie für die folgenden beiden Kongruenzsysteme jeweils in $\mathbb{Z}$ die gemeinsame Lösungsmenge:
   a) $x \equiv 7 \bmod 13$, $x \equiv 11 \bmod 17$
   b) $x \equiv 2 \bmod 3$, $x \equiv 3 \bmod 5$, $x \equiv 5 \bmod 7$

6. Aufgabe (6 Punkte)
   Untersuchen Sie, ob die Zahl 34 ein primer Rest modulo 143 ist. Falls ja, so berechnen Sie den zugehörigen inversen primen Rest.

7. Aufgabe (20 Punkte)
   Es sei G der Teilergraph von 30, d.h. es sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ sowie $E = \big\{\{a, b\} : a, b \in V,\ a \neq b,\ \min(a, b) \mid \max(a, b)\big\}$, d.h. also zwei verschiedene Zahlen aus V sind genau dann in G durch eine Kante verbunden, wenn die kleinere ein Teiler der größeren ist.
   a) Geben Sie die Kantenmenge E explizit an (d.h. zählen Sie E auf). Wieviele Kanten hat G?
   b) Geben Sie auch die Adjazenzmatrix von G an.
   c) Welche Grade haben die acht Knoten von G jeweils?
   d) Ist G zusammenhängend? Welchen Durchmesser hat G?
   e) Zeichnen Sie G mit möglichst wenig Kantenüberschneidungen.
   f) Ist G plättbar?
   g) Ist G eulersch?
   h) Ist G hamiltonsch?

8. Aufgabe (13 Punkte)
   Der Graph $G = (V, E)$ sei dreiecksfrei (d.h. G enthalte keinen Kreis der Länge 3) und es gelte $|V| = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie per Induktion, daß dann $|E| \leq k(k + 1)$ gilt, und geben Sie auch ein Beispiel eines solchen Graphen an, bei dem $|E| = k(k + 1)$ gilt.

Musterlösung zur Klausur (8. 3. 2007)

1. Aufgabe (5+8 Punkte)

   a) Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^3 \not\equiv 2 \bmod 4$.

   Wenn a gerade ist, d.h. wenn $2 \mid a$, so gilt $8 = 2^3 \mid a^3$, d.h. $a^3 \equiv 0 \bmod 8$, also auch $a^3 \equiv 0 \bmod 4$ und folglich $a^3 \not\equiv 2 \bmod 4$. Wenn a ungerade ist, d.h. wenn $2 \nmid a$, so gilt auch $2 \nmid a^3$, d.h. $a^3 \not\equiv 0 \bmod 2$, also auch $a^3 \not\equiv 2 \bmod 2$, und demzufolge $a^3 \not\equiv 2 \bmod 4$.
   Oder:
   Da aus $a \equiv b \bmod 4$ auch $a^3 \equiv b^3 \bmod 4$ folgt, genügt es $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ zu betrachten:
   $0^3 = 0 \not\equiv 2 \bmod 4$, $1^3 = 1 \not\equiv 2 \bmod 4$, $2^3 = 8 \equiv 0 \not\equiv 2 \bmod 4$, $3^3 = 27 \equiv 3 \not\equiv 2 \bmod 4$.

   b) Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^5 \equiv a \bmod 30$.

   Hinweis: $a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)$
   Unter drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen $a - 1$, a, $a + 1$ gibt es immer genau eine Zahl, die durch 3 teilbar ist, und auch immer mindestens eine Zahl, die durch 2 teilbar ist. Folglich gilt immer $6 = 2\cdot 3 \mid (a-1)a(a+1)$. Falls $5 \nmid (a-1)a(a+1)$, so gilt $a \equiv 2 \bmod 5$ oder $a \equiv 3 \bmod 5$. Falls $a \equiv 2 \bmod 5$, so gilt auch $a^2 \equiv 2^2 = 4 \bmod 5$ und folglich $a^2 + 1 \equiv 0 \bmod 5$. Falls $a \equiv 3 \bmod 5$, so gilt auch $a^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 4 \bmod 5$ und folglich wieder $a^2 + 1 \equiv 0 \bmod 5$. Somit folgt aus $5 \nmid (a-1)a(a+1)$ immer $5 \mid (a^2+1)$ und demzufolge gilt dann immer $30 = 6 \cdot 5 \mid (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1) = a^5 - a$, d.h. es gilt immer $a^5 \equiv a \bmod 30$.
   Oder:
   Da 30 die Primfaktorzerlegung $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ hat, gilt für $a \in \mathbb{Z}$ genau dann die Kongruenz $a^5 \equiv a \bmod 30$, wenn die Kongruenz $a^5 \equiv a \bmod p$ für jedes $p \in \{2, 3, 5\}$ gilt. Da aus $a \equiv b \bmod p$ auch $a^5 \equiv b^5 \bmod p$ folgt, genügt es dabei $a \in \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$ zu betrachten: Natürlich gilt $0^5 = 0$, $1^5 = 1$ und $(p-1)^5 \equiv (-1)^5 = -1 \equiv p-1 \bmod p$ und desweiteren gilt auch $2^5 = 32 \equiv 2 \bmod 5$ sowie $3^5 = 243 \equiv 3 \bmod 5$.

2. Aufgabe (9 Punkte)

   Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(6785, 5474)$ sowie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(6785, 5474) = x \cdot 6785 + y \cdot 5474$.

   Der erweiterte euklidische Algorithmus liefert das Ergebnis

$$\mathrm{ggT}(6785, 5474) = 23 = 71 \cdot 6785 - 88 \cdot 5474.$$

k	$c_k a_k$	a_k	c_k	z_k	x_k	y_k
0		6785		**−88**	1	0
1	5474	5474	1	**71**	0	1
2	5244	1311	4	−17	1	−1
3	1150	230	5	3	−4	5
4	161	161	1	−2	21	−26
5	138	69	2	1	−25	31
6	69	**23**	3	0	**71**	**−88**
7		0				

$a_0 := 6785 > a_1 := 5474 > 0$ und dann $a_{k-1} = c_k a_k + a_{k+1}$ mit $c_k, a_{k+1} \in \mathbb{N}$, wobei $0 \leq a_{k+1} < a_k$, für $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, stopp bei $a_7 = 0$, dann $\mathrm{ggT}(a_0, a_1) = a_6$

$z_6 := 0$, $z_5 := 1$ und $z_{k-1} := z_{k+1} - c_k z_k$ für $k = 5, 4, 3, 2, 1$, dann $x = z_1$, $y = z_0$

$x_0 := 1$, $x_1 := 0$, $y_0 := 0$, $y_1 := 1$ und $x_{k+1} := x_{k-1} - c_k x_k$, $y_{k+1} := y_{k-1} - c_k y_k$ für $k = 1, 2, 3, 4, 5$, dann $x = x_6$, $y = y_6$

Zur Verifikation der Ergebnisse kann man nachrechnen, daß $6785/23 = 295 = 5\cdot 59$ und $5474/23 = 238 = 2 \cdot 7 \cdot 17$ sowie $71\cdot 6785 = 481735$ und $88 \cdot 5474 = 481712$ gelten.

3. Aufgabe (10 Punkte)
Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(1508, 1218)$ mit Hilfe des binären euklidischen Algorithmus.

Zuerst bestimmt man die Binärdarstellungen der beiden Zahlen 1508 und 1218: Es gilt $1508 = 1024+256+128+64+32+4 = 2^{10}+2^8+2^7+2^6+2^5+2^2 \mathrel{\widehat{=}} 101111001\underline{\underline{00}}$ und $1218 = 1024 + 128 + 64 + 2 = 2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^1 \mathrel{\widehat{=}} 1001100001\underline{\underline{0}}$. Die beiden doppelt unterstrichenen Nullen repräsentieren einen gemeinsamen Faktor 2. Man rechnet nun

$$\begin{array}{r} 1001100001 \\ -101111001 \\ \hline 11101\underline{000} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101111001 \\ -11101 \\ \hline 1010111\underline{00} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1010111 \\ -11101 \\ \hline 11101\underline{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11101 \\ \mathbf{-11101} \\ \hline 0 \end{array}$$

und erhält so $\mathrm{ggT}(1508/2, 1218/2) = 29 \mathrel{\widehat{=}} 11101$, also $\mathrm{ggT}(1508, 1218) = 58 \mathrel{\widehat{=}} 11101\underline{\underline{0}}$.

Zur Verifikation des Ergebnisses kann man nachrechnen, daß $1508/58 = 26 = 2\cdot 13$ und $1218/58 = 21 = 3 \cdot 7$ gelten.

4. Aufgabe (9 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die Kongruenz $91x \equiv 143 \bmod 221$ in $\mathbb{Z}$ lösbar ist und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

Diese Kongruenz ist genau dann in $\mathbb{Z}$ lösbar, wenn $\mathrm{ggT}(91, 221) \mid 143$ gilt. Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus berechnet man $\mathrm{ggT}(91, 221) = 13 = 5\cdot 91 - 2\cdot 221$. Da $13 \mid 143 = 11\cdot 13$ gilt, ist die Kongruenz also in $\mathbb{Z}$ lösbar, und da $91 = 7\cdot 13$ sowie $221 = 17 \cdot 13$ gelten, ist die Kongruenz äquivalent zu der Kongruenz $7x \equiv 11 \bmod 17$, bei welcher nun $\mathrm{ggT}(7, 17) = 1 = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17$ gilt. Folglich haben beide Kongruenzen eine modulo 17 eindeutig bestimmte Lösung und $x_0 := 11 \cdot 5 = 55 \equiv 4 \bmod 17$ ist eine spezielle Lösung. Demzufolge ist die Lösungsmenge dieser beiden äquivalenten Kongruenzen identisch mit der Restklasse $[4]_{17}$.

Zur Verifikation des Ergebnisses rechnet man nach, daß $7\cdot 4 = 28 \equiv 11 \bmod 17$ bzw. $91\cdot 4 = 364 = 221 + 143 \equiv 143 \bmod 221$ gilt.

5. Aufgabe (8+12 Punkte)
Bestimmen Sie für die folgenden beiden Kongruenzsysteme jeweils in $\mathbb{Z}$ die gemeinsame Lösungsmenge:

a) $x \equiv 7 \bmod 13$, $x \equiv 11 \bmod 17$
Da 13 und 17 Primzahlen sind, gilt natürlich $\mathrm{ggT}(13, 17) = 1$ sowie $\mathrm{kgV}(13, 17) = 13\cdot 17 = 221$ und folglich sind die beiden Kongruenzen gemeinsam in $\mathbb{Z}$ lösbar, wobei die gemeinsame Lösung modulo 221 eindeutig ist.
Da $7 \equiv -6 \bmod 13$ und $11 \equiv -6 \bmod 17$ gelten, sind die beiden Kongruenzen zusammengenommen äquivalent zu $x \equiv -6 \bmod 221$ (siehe hierzu Lemma (1.4)f) und Übungsaufgabe 3.2 oder den Chinesischen Restsatz), d.h. die gemeinsame Lösungsmenge der beiden Kongruenzen ist identisch mit der Restklasse $[-6]_{221} = [215]_{221}$.
Oder:
Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus findet man $\mathrm{ggT}(13, 17) = 1 = 4\cdot 13 - 3\cdot 17$, hiermit nach dem Chinesischen Restsatz dann die spezielle gemeinsame Lösung $x_0 := 11\cdot 4\cdot 13 + 7\cdot(-3)\cdot 17 = 4\cdot 4\cdot 13 + 7(4\cdot 13 - 3\cdot 17) = 4\cdot 52 + 7 = 215$ und folglich die Restklasse $[215]_{221}$ als gemeinsame Lösungsmenge, da ja $13 \cdot 17 = 221$.
Zur Verifikation des Ergebnisses kann man nachrechnen, daß $215 - 7 = 208 = 16\cdot 13$ und $215 - 11 = 204 = 12 \cdot 17$ gelten.

b) $x \equiv 2 \bmod 3$, $x \equiv 3 \bmod 5$, $x \equiv 5 \bmod 7$

Die drei Primzahlen 3, 5 und 7 sind natürlich paarweise teilerfremd und folglich sind die drei Kongruenzen gemeinsam in $\mathbb{Z}$ lösbar, wobei die gemeinsame Lösung modulo 105 eindeutig ist, da ja $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Da $3 \equiv -2 \bmod 5$ und $5 \equiv -2 \bmod 7$ gelten, sind die zweite und die dritte Kongruenz zusammengenommen äquivalent zu $x \equiv -2 \bmod 35$, da ja $5 \cdot 7 = 35$. Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus findet man $\mathrm{ggT}(3, 35) = 1 = 12 \cdot 3 - 1 \cdot 35$, hiermit gemäß dem Chinesischen Restsatz dann die spezielle gemeinsame Lösung $x_0 := (-2) \cdot 12 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 35 = -2(36 + 35) = -2 \cdot 71 = -142 \equiv 68 \bmod 105$ für die drei Kongruenzen und folglich die Restklasse $[68]_{105}$ als gemeinsame Lösungsmenge für die drei Kongruenzen, da ja $3 \cdot 35 = 105$.

Oder:

Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus findet man $\mathrm{ggT}(3, 35) = 1 = 12 \cdot 3 - 1 \cdot 35$ und $\mathrm{ggT}(5, 21) = 1 = -4 \cdot 5 + 1 \cdot 21$ sowie $\mathrm{ggT}(7, 15) = 1 = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 15$, hiermit gemäß dem Chinesischen Restsatz dann die spezielle gemeinsame Lösung $x_0 := 2 \cdot (-1) \cdot 35 + 3 \cdot 1 \cdot 21 + 5 \cdot 1 \cdot 15 = -70 + 63 + 75 = 68$ für die drei Kongruenzen und folglich die Restklasse $[68]_{105}$ als gemeinsame Lösungsmenge für die drei Kongruenzen, da ja $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Zur Verifikation des Ergebnisses kann man nachrechnen, daß $68 - 2 = 66 = 22 \cdot 3$ und $68 - 3 = 65 = 13 \cdot 5$ sowie $68 - 5 = 63 = 9 \cdot 7$ gelten.

6. Aufgabe (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die Zahl 34 ein primer Rest modulo 143 ist. Falls ja, so berechnen Sie den zugehörigen inversen primen Rest.

Die Zahl 34 ist genau dann ein primer Rest modulo 143, wenn sie modulo 143 multiplikativ invertierbar ist, d.h. wenn die Kongruenz $34x \equiv 1 \bmod 143$ in $\mathbb{Z}$ lösbar ist, d.h. wenn $\mathrm{ggT}(34, 143) = 1$ gilt, d.h. wenn 34 und 143 teilerfremd sind.
Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus berechnet man $\mathrm{ggT}(143, 34) = 1 = 5 \cdot 143 - 21 \cdot 34$. Demzufolge ist 34 ein primer Rest modulo 143 und der zugehörige inverse prime Rest ist 122, da ja $-21 \equiv 122 \bmod 143$ gilt.
Oder:
Es gilt $143 = 11 \cdot 13$, wobei 11 und 13 natürlich Primzahlen sind, und folglich $\varphi(143) = 10 \cdot 12 = 120$. Falls 34 ein primer Rest modulo 143 ist, dann gilt gemäß dem Satz von Euler $34^{120} \equiv 1 \bmod 143$ und demzufolge ist dann der Rest $x_0 \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 142\}$ mit $34^{119} \equiv x_0 \bmod 143$ der inverse prime Rest zu 34. Man kann nun diesen Rest x_0 berechnen und dann prüfen ob er tatsächlich die Kongruenz $34x \equiv 1 \bmod 143$ erfüllt. Falls ja, so ist 34 tatsächlich ein primer Rest modulo 143 und x_0 der zugehörige inverse prime Rest. Falls nein, so ist 34 kein primer Rest modulo 143. Zur Berechnung von x_0 schreibt man $119 = 64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1$ und berechnet durch fortlaufendes modulares Quadrieren der Reihe nach modulo 143 die Potenzen 34^1, 34^2, 34^4, 34^8, 34^{16}, 34^{32}, 34^{64}, und anschließend modulo 143 das Produkt $34^{119} = 34^{64} 34^{32} 34^{16} 34^4 34^2 34^1$. Man berechnet also zuerst $34^2 = (2 \cdot 17)^2 = 4 \cdot 289 = 4(300 - 11) = 1200 - 44 = 1156 = 8 \cdot 143 + 12 \equiv 12 \bmod 143$ und hiermit dann $34^4 = (34^2)^2 \equiv 12^2 = 144 \equiv 1 \bmod 143$. Hieraus folgt bereits, daß $x_1 := 34^3$ eine Lösung für $34x \equiv 1 \bmod 143$ ist und somit daß 34 ein primer Rest modulo 143 ist. Desweiteren gilt $x_1 = 34^3 = 34^2 34 \equiv 12 \cdot 34 \bmod 143$ und $12 \cdot 34 = 408 = 286 + 122 = 2 \cdot 143 + 122 \equiv 122 \bmod 143$, so daß 122 der inverse prime Rest zu 34 ist.

Zur Verifikation des Ergebnisses kann man verwenden, daß $122 \equiv -21 \bmod 143$ gilt, also auch $34 \cdot 122 \equiv -34 \cdot 21 \bmod 143$, und nachrechnen, daß $-34 \cdot 21 = -714 = -715 + 1 = -5 \cdot 143 + 1 \equiv 1 \bmod 143$ gilt.

7. Aufgabe (20 Punkte)
Es sei G der Teilergraph von 30, d.h. es sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ sowie $E = \big\{\{a, b\} : a, b \in V,\ a \neq b,\ \min(a, b) \mid \max(a, b)\big\}$, d.h. also zwei verschiedene Zahlen aus V sind genau dann in G durch eine Kante verbunden, wenn die kleinere ein Teiler der größeren ist.

a) Geben Sie die Kantenmenge E explizit an (d.h. zählen Sie E auf). Wieviele Kanten hat G?

$$E = \Big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{1,10\}, \{1,15\}, \{1,30\}, \{2,6\}, \{2,10\}, \{2,30\},$$
$$\{3,6\}, \{3,15\}, \{3,30\}, \{5,10\}, \{5,15\}, \{5,30\}, \{6,30\}, \{10,30\}, \{15,30\}\Big\}$$

und somit $|E| = 19$, d.h. G hat 19 Kanten.

b) Geben Sie auch die Adjazenzmatrix von G an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Welche Grade haben die acht Knoten von G jeweils?

v	1	2	3	5	6	10	15	30
$\deg(v)$	7	4	4	4	4	4	4	7

d) Ist G zusammenhängend? Welchen Durchmesser hat G?
Ja, G ist zusammenhängend, denn wenn zwei Knoten von G nicht schon benachbart sind, so gibt es eine Verbindung der Länge 2, via 1 oder via 30, zwischen den beiden Knoten. Demzufolge ist der Durchmesser von G nicht größer als 2 und er ist sogar gleich 2, da es in G ja auch Knoten gibt, die nicht benachbart sind, z.B. 2 und 3.
Oder:
Da $|V| = 8$ und somit, siehe c), für alle $v \in V$ stets $\deg(v) \geq 4 = \frac{1}{2}|V|$ gilt, folgt gemäß Übungsaufgabe 13.1, daß G zusammenhängend und sein Durchmesser nicht größer als 2 ist. Wie zuvor schon bemerkt ist der Durchmesser dann sogar gleich 2, da es in G auch Knoten gibt, die nicht benachbart sind.

e) Zeichnen Sie G mit möglichst wenig Kantenüberschneidungen.
Der Graph G kann mit einer einzigen Kantenüberschneidung gezeichnet werden: Man zeichnet dazu z.B. ein Sechseck mit den Knoten $6, 2, 10, 5, 15, 3$ (in dieser Reihenfolge), plaziert z.B. die 30 innerhalb und die 1 außerhalb des Sechsecks, verbindet diese beiden Knoten jeweils überschneidungsfrei mit den sechs Knoten des Sechsecks und zeichnet zuletzt eine Kante zwischen 1 und 30, welche notgedrungen eine Kante des Sechsecks, z.B. Kante $\{3, 6\}$, aber sonst keine andere Kante schneidet (siehe Zeichnung A auf Seite 6).
Oder:
Man identifiziert mittels der Bijektion $\{0,1\}^3 \to V$, $(x, y, z) \mapsto 5^x 3^y 2^z$, die Knotenmenge V mit den acht Ecken eines Würfels. Hierbei entspricht dann jeder der zwölf Kanten des Würfels auch jeweils eine Kante von G. Die restlichen sieben Kanten

von G entsprechen dann sechs Seitendiagonalen des Würfels, eine pro Seitenfläche, und der Raumdiagonalen zwischen $(0,0,0)$ und $(1,1,1)$, welche der Kante $\{1,30\}$ entspricht. Bis auf diese Raumdiagonale ist es möglich, den Würfel mitsamt den sechs Seitendiagonalen auch überschneidungsfrei zu zeichnen. Wenn man dann noch die Kante $\{1,30\}$ hinzufügen will, so muß man eine Kantenüberschneidung in Kauf nehmen (siehe Zeichnung B auf Seite 6).

f) Ist G plättbar?

Nein, G ist nicht plättbar, denn:
Nach c) ist G zusammenhängend und es gilt $|V| = 8 \geq 3$. Wenn G plättbar wäre, so würde gemäß Korollar (2.4) die Ungleichung $|E| \leq 3|V| - 6 = 3 \cdot 8 - 6 = 18$ gelten. Dies ist aber nicht möglich, da ja $|E| = 19$ gilt, siehe a).
Oder:
Man kann auch direkt die Eulersche Polyederformel verwenden: Wenn G plättbar wäre, d.h. also ohne Kantenüberschneidungen gezeichnet werden könnte, so würde G nach der Eulerschen Polyederformel die Zeichenebene in $|E|-|V|+2 = 19-8+2 = 13$ Gebiete zerlegen. Dies kann aber nicht stimmen, denn G enthält ja 18 verschiedene Dreiecke, nämlich, wenn man das Würfelmodell aus e) verwendet, zwölf Dreiecke in den sechs Seitenflächen, zwei pro Fläche, und sechs Dreiecke, deren Ecken $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ und noch jeweils eine weitere der übrigen sechs Ecken des Würfels sind.
Oder:
Wenn man in G z.B. zuerst die beiden Knoten 2 und 6 miteinander verschmelzt, anschließend die beiden Knoten 3 und 15 miteinander verschmelzt und danach noch die beiden Knoten 5 und 10 miteinander verschmelzt, so erhält man einen K_5. Nach Satz (2.7) ist dann G nicht plättbar (siehe Zeichnung C auf Seite 6).
Oder:
Wenn man aus G z.B. die sechs Kanten $\{1,5\}$, $\{1,10\}$, $\{1,15\}$, $\{5,30\}$, $\{10,30\}$, $\{15,30\}$ entfernt, so erhält man einen Teilgraphen, der einen K_5 als Kantenminor hat. Nach dem Satz (2.6) von Kuratowski ist dann G nicht plättbar (siehe Zeichnung D auf Seite 6)

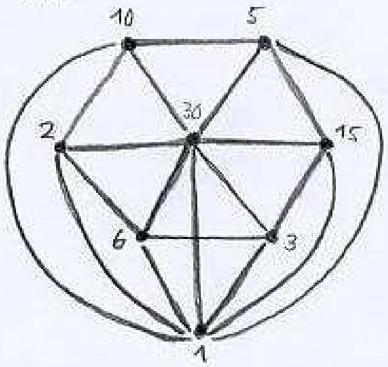
g) Ist G eulersch?

Nein, G ist nicht eulersch, da nicht alle seine Knoten geraden Grad haben, denn es gilt ja $\deg(1) = 7 = \deg(30)$, siehe c) und den Satz (2.8) von Euler.

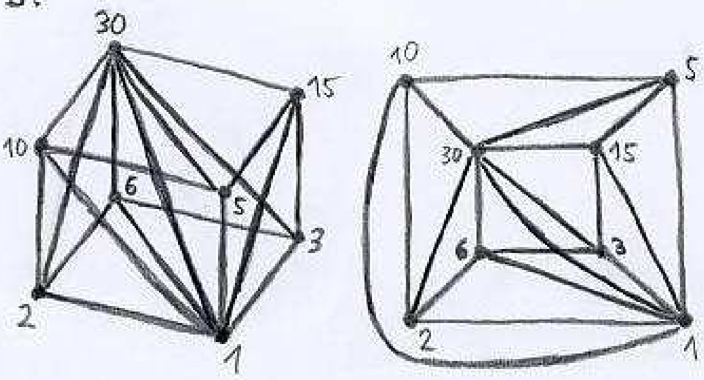
h) Ist G hamiltonsch?

Ja, G ist hamiltonsch, da ja $\deg(v) \geq 4 = \frac{1}{2}|V|$ für alle $v \in V$ gilt und da (folglich auch) G zusammenhängend ist, siehe c), d) und Korollar (2.10) (sowie Übungsaufgabe 13.1).
Oder:
Man kann direkt einen Hamiltonkreis in G angeben, z.B. $(1,2,6,3,15,5,10,30,1)$.

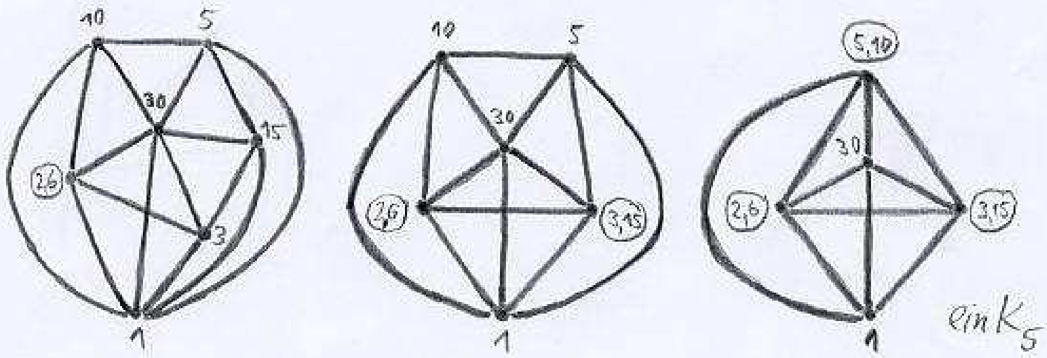
A:



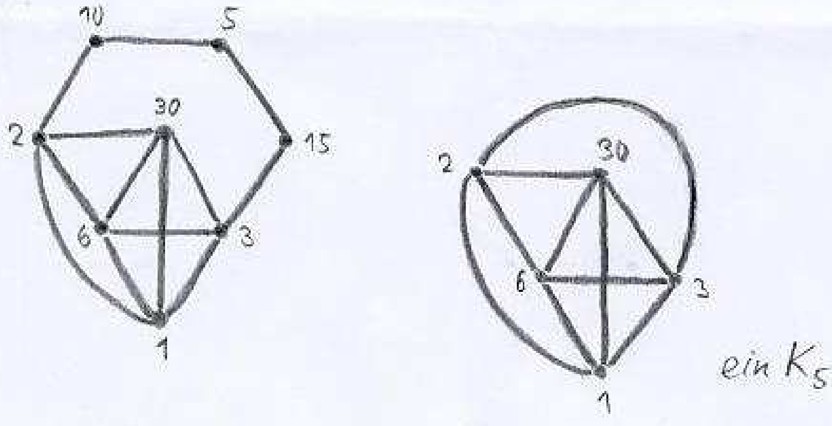
B:



C:



D:



8. Aufgabe (13 Punkte)
Der Graph $G = (V, E)$ sei dreiecksfrei (d.h. G enthalte keinen Kreis der Länge 3) und es gelte $|V| = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie per Induktion, daß dann $|E| \leq k(k+1)$ gilt, und geben Sie auch ein Beispiel eines solchen Graphen an, bei dem $|E| = k(k+1)$ gilt.

Induktionsanfang:
Es sei $k = 0$. Wenn $|V| = 2k+1 = 1$ gilt, d.h. also wenn G nur einen Knoten hat, so kann G natürlich keine Kanten haben, d.h. es gilt dann $|E| = 0 \leq k(k+1)$.

Induktionsvoraussetzung:
Wir nehmen für ein festes $k \in \mathbb{N}$ an, daß jeder dreiecksfreie Graph mit $2k+1$ Knoten höchstens $k(k+1)$ Kanten hat.

Induktionsschritt (von k nach $k+1$):
Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung zeigen wir, daß dann auch jeder dreiecksfreie Graph mit $2(k+1)+1$ Knoten höchstens $(k+1)(k+2)$ Kanten hat:
Es sei dazu $G = (V, E)$ ein dreiecksfreier Graph mit $|V| = 2(k+1)+1 = 2k+3$.
Falls $|E| = 0$ gilt, so gilt auch $|E| = 0 \leq (k+1)(k+2)$ und es ist nichts mehr zu zeigen.
Falls $|E| > 0$, so sei $\{u, w\} \in E$ eine Kante von G, wobei $u, w \in V$, $u \neq w$, und es sei $V' := V \setminus \{u, w\}$, also $|V'| = |V| - 2 = 2k+1$. Da G dreiecksfrei ist, kann in G keiner der $2k+1$ Knoten aus V' sowohl mit u als auch mit w benachbart sein und folglich gilt

$$\Big|\big\{\{v, u\} : v \in V', \{v, u\} \in E\big\} \cup \big\{\{v, w\} : v \in V', \{v, w\} \in E\big\}\Big| \leq 2k+1.$$

Da G dreiecksfrei ist, ist der von V' induzierte Teilgraph $G' := G|_{V'} = (V', E')$ ebenfalls dreiecksfrei, wobei $E' = E \cap \mathcal{P}_2(V') = \big\{\{v_1, v_2\} : v_1, v_2 \in V',\ v_1 \neq v_2,\ \{v_1, v_2\} \in E\big\}$, und es gilt wie schon erwähnt $|V'| = 2k+1$, d.h. G' hat $2k+1$ Knoten. Gemäß der Induktionsvoraussetzung hat dann G' höchstens $k(k+1)$ Kanten, d.h. $|E'| \leq k(k+1)$.
Da wir E als Vereinigung

$$E = E' \cup \big\{\{v, u\} : v \in V', \{v, u\} \in E\big\} \cup \big\{\{v, w\} : v \in V', \{v, w\} \in E\big\} \cup \big\{\{u, w\}\big\}$$

schreiben können, folgt dann $|E| \leq |E'| + (2k+1) + 1 \leq k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$, also $|E| \leq (k+1)(k+2)$.

Im Fall $G = K_{k,k+1}$ gilt $|V| = 2k+1$ sowie $|E| = k(k+1)$ und G ist auch dreiecksfrei.