KLAUSUR

Mathematik I/II für Elektrotechniker

01. 09. 2005

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 32 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)

Punkte:	Note:

1. **(9P)** Man bestimme die Maximalstelle x_M der Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, welche durch
$$f(x)=x\,e^{-x}$$
gegeben ist, ihren Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ sowie den Wendepunkt x_W. Geben Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt an und skizzieren Sie f.

2. **(9P)** Man bestimme eine Stammfunktion für
$$f(x)=\sin(e^x)\,e^{2\,x}\,.$$
Hinweis: Substitution von $t=e^x$ in $\int f(x)dx$, dann Produktintegration (partielle Integration).

3. **(8P)** Seien a, b_1, b_2 beliebige reelle Zahlen. Welche Lösungen besitzen folgende Gleichungssysteme:
(a)
$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, \\ -5\,x_1 & - & 2\,x_2 & = & b_2\,. \end{array}$$
(b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & = & b_1\,, \\ 6\,x_1 & + & 6\,x_2 & - & 9\,x_3 & = & b_2\,. \end{array}$$
Man interpretiere die Ergebnisse geometrisch.

4. **(8P)** Gegeben sind die komplexen Zahlen $a=-1-i$ und $b=-1+i$.
   (a) Man stelle die Zahlen a, b und a^7 in Polarkoordinaten dar und skizziere ihre Lage in der komplexen Ebene.
   (b) Man berechne die Lösungen der Gleichung $z^4=b$ und skizziere ihre Lage in der komplexen Ebene.

5. **(16 P)** Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

   Bestimmen Sie hieraus die Eigenvektoren der Matrix A und geben Sie eine Matrix B an mit: $B^{-1}\,A\,B = D = 4 \times 4$-Diagonalmatrix. Testen Sie das Resultat durch Überprüfung der Beziehung $A\,B = B\,D$.
   (Zwischenergebnis $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)\,(\lambda + 3)^3$.)

6. **(7P)** Man berechne:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\, x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\, x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial\, x_3^2} \right) \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,.$$

7. **(9P)** Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = 3 + (2x - 3y - 1)^2 + 2(x - 3y + 2)^2$$

   für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und überprüfen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt. Welche Ungleichung ergibt sich aus Ihren Berechnungen für f?

   Welche Gestalt haben die Höhenlinien $f(x, y) = \text{const}$? Um dies festzustellen, berechnen Sie die Eigenwerte der zu der quadratischen Form gehörigen Matrix.

Lösungen
1.) Wir bestimmen die Extremalstelle:

$$f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1-x)\,e^{-x}\ .$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_M = 1\ .$$

Es gilt $f(x_M) = \frac{1}{e}$.

Wir bestimmen den Wendepunkt:

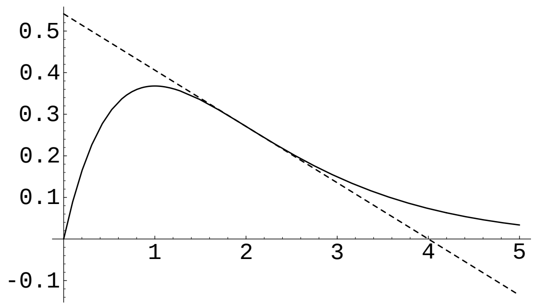
$$f''(x) = (x-2)\,e^{-x}\ .$$

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_W = 2\ .$$

Es gilt $f(x_W) = \frac{2}{e^2}$. Wegen $f''(x_M) = -\frac{1}{e} < 0$ ist x_M ein Maximum.

Eigenschaften der Exponentialfunktion liefern $\lim\limits_{x\to\infty} x\,e^{-x} = 0$, und die Tangente am Wendepunkt ergibt sich zu

$$t(x) = f(x_W) + f'(x_W)\,(x - x_W) = \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2}(x-2) = \frac{1}{e^2}(4-x)\ .$$



Die Funktion $f(x) = x\,e^{-x}$
mit Tangente am Wendepunkt

2.) Sei $f(x) = \sin(x)\,e^{2x}$. Dann folgt aus der Substitution $t = e^x$ die Regel $dt = e^x\,dx$ und daher

$$\int \sin(e^x)\,e^{2\,x}\,dx = \int t\,\sin t\,dt\ .$$

Mit partieller Integration folgt weiter $u(t) = t, v'(t) = \sin t$, also $u'(t) = 1$ und $v(t) = -\cos t$, schließlich

$$\int t\,\sin t\,dt = -t\,\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t\ .$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int \sin(e^x)\, e^{2x}\, dx = \sin(e^x) - e^x\ \sin(e^x)\,.$$

3.a) Wir lösen das System mit dem Gaußschen Algorithmus:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{(I)} & x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, \\ \text{(II)} & -5\,x_1 & - & 2\,x_2 & = & b_2\,. \end{array}$$

Erster Schritt:

$$\begin{array}{lrcrcll} \text{(I,1)} & x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, & \\ \text{(II,1)} & 0 & - & (5\,a+2)\,x_2 & = & 5\,b_1 + b_2\,. & \text{(II)} + 5\,\text{(I)} \end{array}$$

Zweiter Schritt:

$$\text{(A)}:\quad a \neq -\frac{2}{5}\,,\quad \text{(B)}:\quad a = -\frac{2}{5}\,.$$

(A):

$$\begin{array}{lrcrcll} \text{(I,2)} & x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, & \\ \text{(II,2)} & 0 & + & x_2 & = & -\frac{5\,b_1+b_2}{5\,a+2}\,. & -\frac{1}{5\,a+2}\,\text{(II,2)} \end{array}$$

Das System ist eindeutig lösbar:

$$x_2 = -\frac{5\,b_1 + b_2}{5\,a+2}\,,\quad x_1 = -\frac{2\,b_1 + a\,b_2}{5\,a+2}\,.$$

Es liegen zwei sich schneidende Geraden in der Ebene vor.
(B): Das System lautet:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{(I,2)} & x_1 & + & \frac{2}{5}\,x_2 & = & b_1\,, \\ \text{(II,2)} & 0 & + & 0 & = & 5\,b_1 + b_2\,. \end{array}$$

(B1): $5\,b_1 + b_2 = 0$. Das System besteht nur aus einer Gleichung:

$$x_1 - a\,x_2 = b_1$$

und besitzt folgende Lösungen:

$$x_2 = \lambda\,,\quad x_1 = a\,\lambda + b_1\,,$$

mit beliebigem λ.
Es liegen zwei zusammenfallende (identische) Geraden in der Ebene vor.
(B2): $5\,b_1 + b_2 \neq 0$. Das System besitzt keine Lösung.
Es liegen zwei parallele, nicht zusammenfallende Geraden in der Ebene vor.
3.b)

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{(I)} & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & = & b_1\,, \\ \text{(II)} & 6\,x_1 & + & 6\,x_2 & - & 9\,x_3 & = & b_2\,. \end{array}$$

Wir gehen nach dem Gaußschen Algorithmus vor.

$$\begin{array}{rrcrcrcll} \text{(I,1)} & x_1 & + & x_2 & - & \frac{3}{2}\,x_3 & = & \frac{b_1}{2}\,, & \frac{1}{2}\,\text{(I)} \\[2ex] \text{(II,1)} & 6\,x_1 & + & 6\,x_2 & - & 9\,x_3 & = & b_2\,. & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrcll} \text{(I,2)} & x_1 & + & x_2 & - & \frac{3}{2}\,x_3 & = & \frac{b_1}{2}\,, & \\[2ex] \text{(II,2)} & 0 & + & 0 & + & 0 & = & -3\,b_1 + b_2\,, & \text{(II,1)} - 4\,\text{(I,1)} \end{array}$$

Falls $b_1 = \dfrac{b_2}{3}$ besteht das System nur aus einer einzigen Gleichung. Wir bekommen dann folgende Lösungen mit beliebigem $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$x_3 = \lambda_3\,, \quad x_2 = \lambda_2\,, \quad x_1 = \frac{b_1}{2} - \lambda_2 + \frac{3}{2}\,\lambda_3\,.$$

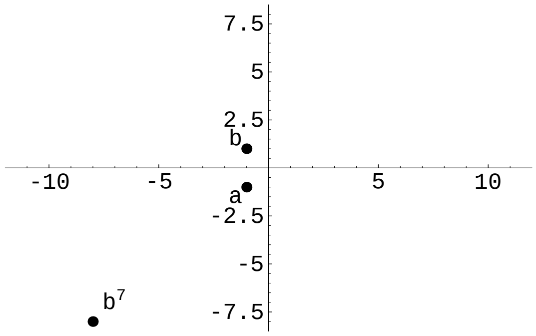
Es liegen zwei parallele, zusammenfallende Ebenen im Raum vor.

Falls $b_1 \neq \dfrac{b_2}{3}$ endet der Gaußsche Algorithmus mit einem Widerspruch. Das System besitzt keine Lösung.
Es liegen zwei parallele, nicht zusammenfallende Ebenen im Raum vor.
4.)
(a) Es gilt offenbar:

$$a = \sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{4}\,\pi\,i}\,, \quad b = \sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\,\pi\,i}\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a^7 &= (\sqrt{2})^7\,e^{-\frac{21}{4}\,\pi\,i} \\ &= 2^3\,\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\,\pi\,i}\,e^{-6\,\pi\,i} \\ &= 8\,\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\,\pi\,i} \\ &= 8\,b = -8 + 8i\,. \end{aligned}$$



Die Zahlen
$a = -1 - i$, $b = -1 + i$ und a^7
in der Gaußschen Ebene

(b) Die Gleichung

$$z^4 = \sqrt{2}\; e^{\frac{3}{4}\,\pi\, i}$$

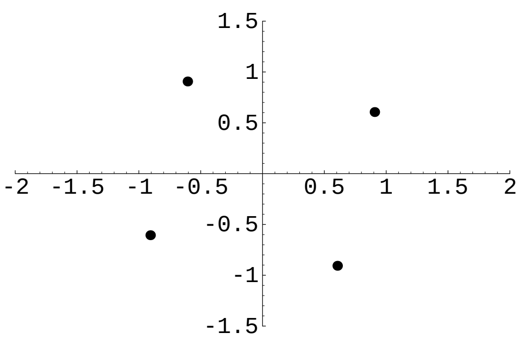
besitzt folgende vier Lösungen:

$$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\, e^{\frac{3}{16}\,\pi\, i + k\,\frac{2}{4}\,\pi}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Das heißt:

$$z_k = 2^{\frac{1}{8}}\; e^{\frac{3}{16}\,\pi\, i + k\,\frac{1}{2}\,\pi}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

mit $|z_k| = \sqrt[8]{2} \approx 1.09051$ und $\arg(z_0) = \frac{3}{16}\pi = 33{,}75°$.



Die vier Lösungen der Gleichung
$z^4 = -1 + i$
in der Gaußschen Ebene

5.) Mit dem Gauß-Algorithmus bringt man die Matrix $A - \lambda E$ in Dreiecksform und kann dann die Determinante als Produkt der Diagonalelemente ablesen. Man erhält so das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^4 + 8\,\lambda^3 + 18\,\lambda^2 - 27$.

Abspalten des Faktors $\lambda - 1$ (da $\lambda = 1$ Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist) sowie des Faktors $\lambda + 3$ (da $\lambda = -3$ Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist) und der pq-Formel liefert schließlich $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)\,(\lambda + 3)^3$.

Die Eigenwerte sind offenbar $\lambda_1 = 1$ (einfach) und $\lambda_2 = -3$ (dreifach). Die Matrix A ist symmetrisch, also hat der Eigenraum von $\lambda_1 = 1$ die Dimension 1 und der von $\lambda_2 = -3$ die Dimension 3. Wir geben Basen der Eigenräume an.

$$(A - E) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Man sieht sofort $\vec{u} = (1,1,1,1)$ ist ein Eigenvektor.

$$(A + 3\,E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Man sieht sofort, $\vec{v_1} = (-1,0,0,1)$, $\vec{v_2} = (0,-1,0,1)$, $\vec{v_3} = (0,0,-1,1)$, sind linear unabhängige Eigenvektoren. Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

welche die Eigenvektoren als Spaltenvektoren enthält, erfüllt dann die Beziehung

$$B^{-1}\,A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

Eine Überprüfung zeigt, dass

$$A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = B\,D\,.$$

6.) Für die ersten partiellen Ableitungen erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial\,x_j}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

und daraus:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} - \frac{x_j^2}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}}\,.$$

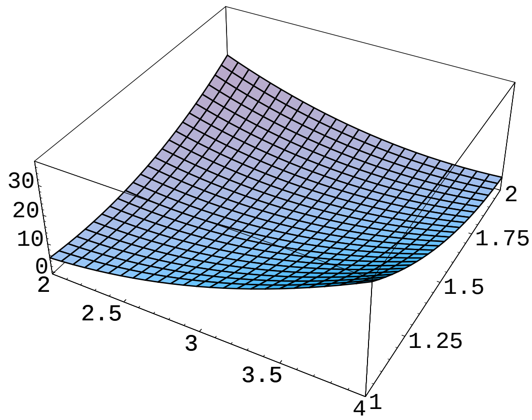
Bilden wir nun die Summe, so folgt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} - \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}} = \frac{2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\,.$$

7.) Ausmultipliziert ist $f(x,y) = 6x^2 - 24xy + 27y^2 + 4x - 18y + 12$.
Nullsetzen des Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x - 24y + 4 \\ -24x + 54y - 18 \end{pmatrix}$$

liefert ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung $x = 3$ und $y = \frac{5}{3}$. Wegen $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 72$ und $f_{xx} = 12 > 0$ handelt es sich um ein (globales) Minimum mit $f(3,\frac{5}{3}) = 3$. Also gilt $f(x,y) \geqq 3$ für $x,y \in \mathbb{R}$. Das erkennt man (aufgrund der Quadrate) aber auch bereits an der ursprünglichen Darstellung von f.



Der Graph der Funktion $f(x,y) = 3 + (2x-3y-1)^2 + 2(x-3y+2)^2$

Die zu f gehörige symmetrische Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 27 \end{pmatrix}\,.$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich zu $\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \lambda^2 - 33\lambda + 18$ und hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2}\left(11 \pm \sqrt{113}\right)$. Da beide Eigenwerte $\lambda_1 \approx 32{,}4452$ bzw. $\lambda_2 \approx 0{,}554781$ positiv sind, handelt es sich bei den Höhenlinien um Ellipsen.