KLAUSUR

Mathematik III für E-Techniker

23.3.2005

(Prof. Dr. G. Malle, AG Computational Mathematics)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter. Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Rechnungen an!

Insgesamt gibt es 30 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. **(6 P)** Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{y^2}{x^2+1}, \qquad y(1) = -\frac{4}{\pi}.$$

Man skizziere die Lösung und gebe ihren maximalen Definitionsbereich an.

2. **(7 P)** Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \ y_1(x) - y_2(x), \\ y_2'(x) &= \ y_1(x) + y_2(x). \end{aligned}$$

Man bestimme die allgemeine Lösung des Systems.

3. **(7 P)** Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 20\sin(2x).$$

Bestimmen Sie die Lösung mit den Anfangswerten

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -5.$$

4. **(4 P)** Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma \frac{1}{2+z}dz,$$

wobei Γ die geschlossene Kreislinie (einmal gegen den Uhrzeigersinn) mit Radius 4 um den Ursprung sei.

5. **(6 P)** Berechnen Sie das Residuum an der Stelle $z = 0$ von

$$f(z) = \frac{\sin z - z}{z^4}.$$

Bestimmen Sie damit das Integral

$$\int_\Gamma f(z)dz,$$

wobei Γ die Kreislinie um den Nullpunkt vom Radius 1 sei.

Lösungen

1) Trennung der Variablen:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2+1}, \qquad -\frac{1}{y} = \arctan x + c, \qquad y = \frac{-1}{\arctan x + c}.$$

Anfangswert: $y(1) = -\frac{4}{\pi}$, also

$$-\frac{4}{\pi} = \frac{-1}{\pi/4 + c},$$

daher $c = 0$. Lösung somit

$$y = -\frac{1}{\arctan x}.$$

2) Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte $1 \pm i$, mit zugehörigen Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}.$$

Damit komplexwertige Lösungen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} e^x(\cos x + i \sin x).$$

Reelle Form:

$$e^x \begin{pmatrix} c_1 \cos x + c_2 \sin x \\ c_1 \sin x - c_2 \cos x \end{pmatrix}.$$

3) Zugehörige homogene Gleichung

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$$

hat charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + \lambda - 2$$

mit Nullstellen $1, -2$. Dies liefert Fundamentalsystem von Lösungen e^x, e^{-2x} des homogenen Systems.
Variation der Konstanten ergibt Lösung:

$$y = e^x - 3\sin(2x) - \cos(2x).$$

4) Die zu integrierende Funktion hat einen einfachen Pol bei $z = -2$ im inneren der Kreislinie Γ, mit Residuum 1. Nach dem Residuensatz ergibt sich daher das Integral zu $2\pi i$. (Alternativ: Cauchyscher Integralsatz.)

5) Entwickle $f(z)$ in eine Potenzreihe um die Stelle $z = 0$:

$$f(z) = \frac{\sin z - z}{z^4} = \frac{z - z^3/3! + z^5/5! - \ldots - z}{z^4} = -\frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \ldots.$$

Das Residuum von $f(z)$ bei $z = 0$ ist gleich dem Koeffizienten bei $1/z$, somit gleich $-1/3! = -1/6$.
Der einzige Pol von $f(z)$ innerhalb von Γ liegt bei $z = 0$ vor, nach dem Residuensatz ist somit das Kurvenintegral gleich $2\pi i \cdot (-1/6) = -\pi i/3$.