KLAUSUR

Mathematik III (E)

27.9.2002

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 10 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Man bestimme die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' - \frac{2}{x}\, y = x^2\, \sin(3\, x)\,, \quad y(1) = 1\,.$$

(4P)

2. Man bestimme die allgemeine Lösung des Systems

$$y_1' = a\, y_1\,, \quad y_2' = b\, y_1 + c\, y_2\,,$$

mit Konstanten a, b, c.
(4P)

3. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y^{(4)} + y = x\,.$$

(6P)

4. Gegeben sei das System: $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Man bestimme ein Fundamentalsystem, indem man Eigenwerte und Eigenvektoren von A berechnet.
(6P)

Lösungen

1.) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet für $x > 0$:

$$y_h(x) = c\, e^{\int \frac{2}{x}\, dx} = c\, e^{2\, \ln(x)} = c\, x^2\,.$$

Wir bestimmen eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten:

$$y_p(x) = C(x)\, x^2\,.$$

Einsetzen ergibt die Bedingung:

$$x^2\, C'(x) + 2\, x\, C(x) - \frac{2}{x}\, x^2\, C(x) = x^2\, \sin(3\, x)$$

bzw.

$$C'(x) = \sin(3\, x)\,.$$

Wir wählen die Stammfunktion:

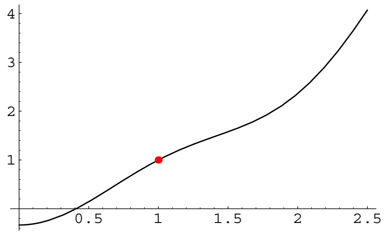
$$C(x) = -\frac{1}{3}\, \cos(3\, x)$$

und bekommen die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y(x) = c\, x^2 - \frac{1}{3}\, x^2\, \cos(3\, x)\,.$$

Das Anfangswertproblem wird gelöst, wenn man setzt:

$$c = 1 + \frac{1}{3}\, \cos(3)\,.$$



Die Lösung des Anfangswertproblems
$y' - \frac{2}{x}\, y = x^2\, \sin(3\, x)$,
$y(1) = 1$

2.) Die Gleichungen sind entkoppelt. Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung lautet mit einer Konstanten C:

$$y_1(x) = C\, e^{a\, x}\,.$$

Damit bekommen wir für y_2 die Einzelgleichung:

$$y_2' = b\, y_1 + c\, C\, e^{a\,x}\,.$$

Die allgemeine Lösung der zu dieser Gleichung gehörigen homogenen Gleichung lautet mit einer Konstanten D:

$$y_{2h}(x) = D\, e^{c\,x}\,.$$

Durch Variation der Konstanten erhält man eine partikuläre Lösung

$$y_{2p}(x) = F(x)\, e^{c\,x}\,,$$

wobei $F(x)$ folgende Bedingung erfüllen muss:

$$F'(x)\, e^{b\,x} = C\, b\, e^{a\,x}\,.$$

Im Fall $a = c$ setzen wir:

$$F(x) = C\, b\, x\,.$$

Im Fall $a \neq c$ setzen wir:

$$F(x) = \frac{C\, b}{a - c}\, e^{(a-c)\,x}\,.$$

Insgesamt ergibt sich folgende allgemeine Lösung des Systems:

$$y_1(x) = C\, e^{a\,x} + F(x)\, e^{c\,x}\,.$$

3.) Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung kann man sofort sehen:

$$y_p(x) = x\,.$$

Nun zur homogenen Gleichung. Die charakteristische Gleichung lautet:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 1 = 0\,.$$

Wir schreiben:

$$\lambda^4 = -1 = e^{\pi\, i} = e^{\pi\, i + k\, 2\,\pi\, i}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Hieraus ergeben sich folgende vier Wurzeln der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\right)\, i\,, \quad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Mit

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \cos\left(\frac{3\,\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

und

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{3\,\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

bekommen wir das folgende Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:

$$y_1(x) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\,x}\,\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,x\right)\,,$$

$$y_2(x) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\,x}\,\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,x\right)\,,$$

$$y_3(x) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\,x}\,\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,x\right)\,,$$

$$y_4(x) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\,x}\,\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,x\right)\,.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich dann zu:

$$y(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) + c_3\,y_3(x) + c_4\,y_4(x) + x\,.$$

4.) Das charakteristische Polynom nimmt folgende Gestalt an:

$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 10 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)\,(-1-\lambda) + 10 = \lambda^2 - 4\,\lambda + 5\,.$$

Hieraus bekommt man zwei Eigenwerte als Nullstellen:

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i\,.$$

Wir benötigen nur einen Eigenwert und berechnen einen Eigenvektor aus dem System:

$$(5-(2+i))\,u_1 + 10\,u_2 = 0\,,$$

$$(-1)\,u_1 + (-1-(2+i))\,u_2 = 0\,,$$

bzw.

$$(3-i)\,u_1 + 10\,u_2 = 0\,,$$

$$-u_1 + (-3-i))\,u_2 = 0\,.$$

Die beiden Gleichungen sind linear abhängig und besitzen einen eindimensionalen Nullraum. Ein Basisvektor des Nullraums lautet:

$$u_1 = 1\,, \quad u_2 = -\frac{3-i}{10}\,.$$

Damit bekommen wir zunächst eine komplexe Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3-i}{10} \end{pmatrix} e^{2\,x}\,(\cos(x) + i\,\sin(x))$$

und ein reelles Fundamentalsystem durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{pmatrix} e^{2\,x}\,\cos(x) \\ e^{2\,x}\,\left(-\frac{3}{10}\,\cos(x) - \frac{1}{10}\,\sin(x)\right) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{2\,x}\,\sin(x) \\ e^{2\,x}\,\left(\frac{3}{10}\,\cos(x) - \frac{1}{10}\,\sin(x)\right) \end{pmatrix}$$