KLAUSUR

Mathematik I/II für Informatiker

11. September 2002

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sind 20 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. **(10P)** Sei A die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom sowie alle Eigenwerte von A und geben sie für jeden Eigenwert den zugehörigen Eigenraum in möglichst einfacher Form an (ganzzahlig).
(Zwischenergebnis: $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$).

(b) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, finden Sie eine reguläre reelle Matrix B derart, dass $B^{-1}AB$ Diagonalgestalt hat.

2. **(8P)** Sei A die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie am Beispiel der Matrix A den Gaußalgorithmus zur Berechnung der inversen Matrix A^{-1} vor.

(b) Berechnen Sie alle Lösungen $\vec{v}$ der Gleichung $A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) **(4P)** Man bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{n^4 + n^2} - n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(b) Man bestimme die Grenzwerte

(i): **(4P)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{\sin^2 x}$,

(ii): **(4P)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \sin x}{x^3}$.

Geben Sie jeweils den Lösungsweg an!

4. **(10P)** (a) Mittels vollständiger Induktion weise man nach: Für die Integrale

$$I_n := \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n .$$

(Hinweis: Partielle Integration mit $v'(x) = x\, e^{-x^2}$.)
(b) Mit Hilfe von (a) bestimme man das Integral

$$J := \int_0^\infty e^{-x^2} \cos\, x\, dx\ .$$

(Anleitung: Man verwende die Taylorreihe von $\cos x$ (um $x_0 = 0$), integriere summandenweise und berechne mit (a) den Wert der entstehenden Taylorreihe.)

Lösungen:
1. (a)

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Mit der Regel von Sarrus bestimmt sich diese Determinante zu

$(-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda)+6+6-(-\lambda)3(-2)-(-1)(-3)(3-\lambda)-1(-2-\lambda)(-2),$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen ergibt

$(2\lambda+\lambda^2)(3-\lambda)+12-6\lambda-9+3\lambda-4-2\lambda = 6\lambda-2\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3-1-5\lambda,$

und schließlich

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1.$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$. Durch Einsetzen sieht man sofort eine Nullstelle $\lambda = 1$. Polynomdivision durch den Linearfaktor $(\lambda-1)$:

$$\begin{array}{rrrrcccl} -\lambda^3 & +\lambda^2 & +\lambda & -1 & : & \lambda-1 & = & -\lambda^2+1 \\ \hline -\lambda^3 & +\lambda^2 & & & & & & \\ & 0 & +\lambda & -1 & & & & \\ & & +\lambda & -1 & & & & \\ \cline{1-4} & & & 0 & & & & \end{array}$$

führt zu
$\chi_A(\lambda) = (-\lambda^2+1)(\lambda-1) \overset{\text{bin.Formel}}{=} -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1).$
Also haben wir den Eigenwert $\lambda_1 = -1$ der algebraischen Vielfachheit 1 und den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ der algebraischen Vielfachheit 2.
Nun können wir die Eigenräume bestimmen, der zum Eigenwert -1 ist notwendig eindimensional, der Eigenraum zu 1 kann ein- oder zweidimensional sein.

$\underline{\lambda = -1}$**:** Der Eigenraum ist hier die Lösungsmenge der Vektorgleichung: $(A-(-1)E)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$. Eine Gaußelimination ergibt: $\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. Die dritte Zeile ist redundant, aus der zweiten ergibt sich $v_2 = \frac{3}{2}v_3$ mit beliebigem v_3, und damit aus der ersten: $v_1 = \frac{3}{2}v_3 - v_3 = \frac{1}{2}v_3$. Den ganzzahligen Basisvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ des Eigenraumes erhalten mit der Wahl $v_3 = 2$.

$\underline{\lambda = 1}$**:** Der Eigenraum ist hier die Lösungsmenge der Vektorgleichung: $(A - 1E)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$. Eine Gaußelimination ergibt: $\begin{pmatrix} \boxed{\text{-1}} & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nur die erste Zeile ist relevant, v_2, v_3 sind beliebig und legen v_1 zu $v_2 - v_3$ fest. Der Eigenraum ist hier also zweidimensional. Um kleine, positive ganze Einträge zu erhalten, wählen wir $v_2 = 1$ und $v_3 \in \{0, 1\}$ und erhalten die ganzzahligen Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Im ersten Teil haben wir gesehen, dass algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte übereinstimmen. Daher ist A diagonalisierbar, und die diagonalisierende Matrix B ergibt sich durch Aneinanderreihen der im ersten Teil gefundenen Basisvektoren:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Zunächst wird die Matrix um die Einheitsmatrix erweitert und dann mit elementaren Zeilenoperationen der linke Teil in die Einheitsmatrix überführt: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Die ersten zwei Zeilen werden vertauscht: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, nun von der dritten die erste Zeile subtrahiert: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$, und von der dritten die zweite:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$, schließlich von der ersten die dritte Zeile abgezogen und zur zweiten das Doppelte der dritten Zeile addiert:
$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$. Auf der rechten Seite steht nun A^{-1}.

(b) $A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eindeutig bestimmt.

3. (a)

$$a_n = \frac{\sqrt{n^4+n^2}^{\,2} - n^4}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2} = \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \to \frac{1}{2}$$

(b) i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots}{\left(x - \frac{x^3}{6} \pm \cdots\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + \cdots}{\left(1 - \frac{x^2}{6} \pm \cdots\right)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + \cdots\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} \pm \cdots\right)}{x^3} = \frac{1}{3}\,.$$

Oder alternativ unter 3-maliger Anwendung der L'Hospitalschen Regel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3} + \sin x}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}^5} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3} + \cos x}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

4. (a) $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ trifft zu (vgl. Aufgabe A30).
Angenommen, die Behauptung trifft zu für ein bestimmtes n:

$$I_n = \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Dann folgt

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int\limits_0^\infty x^{2n+2} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^\infty x^{2n+1}\, x e^{-x^2} dx \\
&= x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x^2}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int\limits_0^\infty (2n+1)x^{2n} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x^2} dx \\
&= 0 + \frac{2n+1}{2} \int\limits_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx \\
&= \frac{(2n+1)}{2} \cdot \frac{(2n+2)}{2(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Dies ist aber die Behauptung, formuliert für $n+1$ anstelle von n.
(b)

$$
\begin{aligned}
J &= \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos x \, dx \\
&= \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} dx \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int\limits_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{(wegen (a))} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}}.
\end{aligned}
$$