KLAUSUR

Mathematik I/II für Informatiker

20. Februar 2003

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sind 17 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. **(10P)** Im $\mathbb{R}^3$ seien die Geraden g durch die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie h durch die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

   (a) Bestimmen Sie die Parameterdarstellungen der gegebenen Geraden, also $\vec{v}_0, \vec{v}, \vec{w}_0, \vec{w}$ mit

   $$\begin{aligned} g : \vec{x} = \vec{v}_0 + s\,\vec{v}\ ,\ \ s \in \mathbb{R}\ , \\ h : \vec{x} = \vec{w}_0 + t\,\vec{w}\ ,\ \ t \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

   (b) Zeigen Sie: Die Geraden g und h sind windschief, das heißt weder parallel noch haben sie gemeinsame Punkte.

   (c) Finden Sie einen Vektor $\vec{n}$ der Länge 1, welcher sowohl auf $\vec{v}$ als auch auf $\vec{w}$ senkrecht steht.

   (d) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g und h.

2. **(8P)** Gegeben sei das Gleichungssystem

   $$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

   (a) Finden Sie die vollständige Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußschen Algorithmus.
   (b) Geben Sie eine Basis des Kerns der linearen Abbildung

   $$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

   an. *Hinweis:* Verwenden Sie (a).

3. **(8P)** Die Funktion $f : [0, \infty)$ sei gegeben durch $f(x) = x\,e^{-x}$.

   Man bestimme Maximum und Minimum dieser Funktion sowie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und skizziere den Graphen. Geben Sie jeweils den Lösungsweg an!

   Für welche $y \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $f(x) = y$ Lösungen? Wie viele Lösungen gibt es?

4. **(10P)** Sei

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2} \ .$$

Man bestimme die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) \ ,$$

zeige, dass $f(x)$ eine ungerade Funktion ist, d. h. $f(-x) = -f(x)$, und skizziere den Graphen der Funktion $f(x)$.

Man bestimme für $x > 0$ die Stammfunktion

$$\int f(x)\, dx \ .$$

(*Hinweis:* Bei dem unbestimmten Integral $\int \frac{1}{e^x - 1}$ verwende man die Substitution $x = \ln t$.)

Lösungen:

1. (a): Als Ortsvektoren nehmen wir einen der gegebenen definierenden Punkte, als Richtungsvektoren dienen die Differenzen der definierenden Punkte:

$$
\begin{aligned}
g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; , s \in \mathbb{R} \\
h : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; , t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

(b): Das Kreuzprodukt $\vec{u}$ der Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ verschwindet nicht:

$$
\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Daher sind sie linear unabhängig: g und h sind nicht parallel.
Ein $\vec{x} \in g \cap h$ muß beiden Geradengleichungen genügen, dann muss es also s, t mit

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

geben. Aus der dritten Zeile folgt $t = 1$, damit ergibt sich aus der ersten Zeile $s = -1$ aber aus der zweiten $s = +1$, ein Widerspruch. Die Geraden schneiden sich also nicht. Damit sind g, h windschief zueinander.

(c): Einen Vektor $\vec{u}$, senkrecht auf beiden Richtungsvektoren, haben wir bereits in (b) ausgerechnet, dieser ist nur noch zu normieren:

$$
\vec{n} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .
$$

(d): Um den Abstand der Geraden zu bestimmen, verwenden wir die Formel aus der Vorlesung:

$$
d = \left| \vec{n} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \vec{0} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{\sqrt{6}} \approx 0,8165 \; .
$$

2. (a): Wir müssen das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

lösen. Zwei Gaußumformungen bringen dieses System in Zeilenstufenform: von der zweiten das doppelte der ersten Zeile abziehen. Anschließend von der dritten die zweite Zeile subtrahieren:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Die dritte Zeile enthält keine Aussage, der Rang unserer Abbildung ist also 2.

Wir erhalten also für beliebiges $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

$$x_2 = \frac{4}{2}\,x_3 - \frac{3}{2}\,x_4$$

und

$$x_1 = -2\,x_3 + x_4 \ .$$

In Vektorform haben wir schließlich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} 2x_4 \ .$$

(b): Das Bild von φ ist nach (a) zweidimensional und somit auch der Kern, denn die Summe der Dimensionen muß die Dimension des $\mathbb{R}^4$ sein.

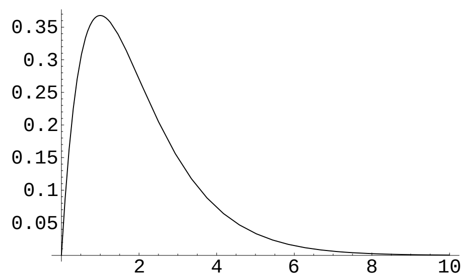
Nach (a) lösen die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ das Gleichungssystem und liegen somit im Kern. Aus den letzten beiden Komponenten kann man ablesen, dass die gefundenen Elemente des Kerns linear unabhängig sind, also haben wir mit $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des Kerns gefunden!

3. Für $f(x) = x\,e^x$ erhalten wir $f'(x) = (1-x)\,e^{-x}$ und $f''(x) = (x-2)\,e^{-x}$. Also liegt genau an der Stelle $x_1 = 1$ ein lokales Extremum vor, welches wegen $f''(1) = -\frac{1}{e} < 0$ ein Maximum ist. Übrigens liegt an der Stelle $x_2 = 2$ ein Wendepunkt. Es gilt $f(0) = 0$, und für $x \to \infty$ erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\,e^{-x} = 0\ .$$

Somit hat f Werte zwischen dem Minimum $f(0) = 0$ und dem Maximum $f(1) = \frac{1}{e}$, welche wegen der Stetigkeit alle angenommen werden (Zwischenwertsatz).

Daher besitzt die Gleichung $f(x) = y$ nur dann Lösungen, wenn $y \in [0, \frac{1}{e}]$, und zwar genau eine für $y = 0$ und für $y = \frac{1}{e}$, sonst genau zwei.



Die Funktion
$f(x) = x\,e^{-x}$
für $x \geqq 0$

4. Mit der Regel von de l'Hospital gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\,(e^x-1)} - \frac{1}{2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\,e^x + e^x - 1} - \frac{1}{2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} = 0\ .
\end{aligned}$$

Genauso bekommt man:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ .$$

Mit der Umformung

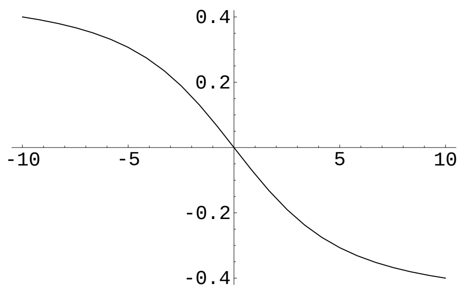
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+e^x}{1-e^x}$$

sieht man, dass f ungerade ist:

$$f(-x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1} = -f(x)$$

und daher

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}\ .$$



Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2}$$

Die Substitution $x = \ln t$ ($x > 0, t > 1$) ergibt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x - 1}\, dx &= \left.\int \frac{1}{t-1}\,\frac{1}{t}\, dt\right|_{t=e^x} \\
&= \left.\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt\right|_{t=e^x} \\
&= \ln(t-1) - \ln t|_{t=e^x} \\
&= \ln(e^x - 1) - x\,.
\end{aligned}$$

Also für $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2}\right) dx &= \ln x - \ln(e^x - 1) + x - \frac{x}{2} \\
&= \ln\left(\frac{x}{e^x - 1}\right) + \frac{x}{2}\,.
\end{aligned}$$