KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker

25. September 2003

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sind 14 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. **(6P)** Lösen Sie für $x \in [0, \infty)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{1}{1+x^2}\, y^2 \,, \\ y(0) &= 1 \,. \end{aligned}$$

   Berechnen Sie die Lösungsfunktion $y(x)$, zeigen Sie, dass diese monoton fallend ist, und bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$. Skizzieren Sie die Lösung.

2. **(7P)** Gegeben sei das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 2\, y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + 2\, y_2(x) \,. \end{aligned}$$

   Man bestimme die allgemeine Lösung des Systems.

3. **(7P)** Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + 2\, y'(x) + \; y(x) = \sin(3x) \,.$$

   Bestimmen Sie die Lösung mit den Anfangswerten

$$y(0) = 0 \,, \quad y'(0) = 1 \,.$$

4. **(4P)** Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{1-z}\, dz \,,$$

   wobei Γ die einmal geschlossene Kreislinie mit Radius 2 um den Ursprung sei.

5. **(6P)** Berechnen Sie das Residuum von $f(z) = \frac{\tan z - \sin z}{z^4}$ an der Stelle $z = 0$.

Lösungen:

1. Separation der Variablen liefert

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \ ,$$

und wir erhalten

$$\frac{1}{y} = \arctan x + C \ .$$

Bestimmung der Konstanten C mittels $y(0) = 1$ liefert $C = 1$ und durch Auflösen nach y

$$y(x) = \frac{1}{\arctan x + 1} \ .$$

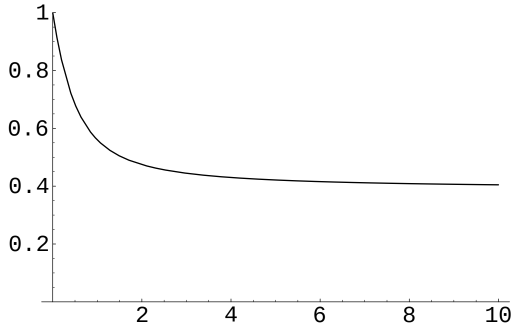
Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{2}{2+\pi} \ .$$

Dass die Lösungsfunktion monoton fallend ist, folgt direkt aus der Differentialgleichung, welche ja besagt, dass

$$y'(x) = -\frac{1}{1+x^2}\, y^2 \leqq 0 \ ,$$

da ja $x^2 \geqq 0$ als auch $y^2 \geqq 0$ ist.



Die Lösungsfunktion
$y(x) = \dfrac{1}{\arctan x + 1}$

2. Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det(A - \lambda\, E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0\,.$$

Damit ergeben sich folgende Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 2 + i\,, \quad \lambda_2 = 2 - i\,.$$

Wir suchen einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_1:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,.$$

Dieses homogene System besitzt einen Lösungsraum der Dimension eins. Eine Basislösung ergibt sich aus der ersten Gleichung:

$$-i\,x_1 + x_2 = 0\,.$$

(Die zweite Gleichung des Systems ist von der ersten linear abhängig und wird somit mit erfüllt). Setzen wir $x_1 = 1$, so ergibt sich $x_2 = i$. Eine komplexwertige Lösung des Differentialgleichungsystems lautet damit:

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(2+i)\,x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{2x} \,(\cos x + i\,\sin x)\,.$$

Um ein Fundamentalsystem aus zwei reellwertigen Lösungen zu bekommen, bestimmen wir Real- und Imaginärteil von $\vec{y}(x)$:

$$y_1(x) = \text{Re}\,\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x)\,e^{2x} \\ -\sin(x)\,e^{2x} \end{pmatrix} \,,$$

$$y_2(x) = \text{Im}\,\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} \sin(x)\,e^{2x} \\ \cos(x)\,e^{2x} \end{pmatrix} \,,$$

also ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{y}(x) \;=\; c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) = \begin{pmatrix} c_1\,\cos(x)\,e^{2x} + c_2\,\sin(x)\,e^{2x} \\ -c_1\,\sin(x)\,e^{2x} + c_2\,\cos(x)\,e^{2x} \end{pmatrix}$$

3. Wir lesen das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 1$$

ab, welches die doppelte Nullstelle $\lambda_1 = -1$ besitzt. Dies liefert die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y_1(x) = c_1\,e^{-x} + c_2\,x\,e^{-x} \,.$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, setzen wir den Ansatz

$$y_2(x) = A\,\cos(3x) + B\,\sin(3x)$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten wegen

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= -3A\,\sin(3x) + 3B\,\cos(3x) \\ y_2''(x) &= -9A\,\cos(3x) - 9B\,\sin(3x) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$-9A\,\cos(3x) - 9B\,\sin(3x) + 2(-3A\,\sin(3x) + 3B\,\cos(3x))$$

$$+(A\,\cos(3x) + B\,\sin(3x)) = \sin(3x)\ .$$

Sortieren nach den linear unabhängigen Funktionen $\sin(3x)$ und $\cos(3x)$ und Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -8A + 6B &= 0 \\ -6A - 8B &= 1 \end{aligned}$$

mit der Lösung $A = -\frac{3}{50}$ und $B = -\frac{2}{25}$. Um c_1 und c_2 zu bestimmen, setzt man die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1\,e^{-x} + c_2\,x\,e^{-x} - \frac{3}{50}\,\cos(3x) - \frac{2}{25}\,\sin(3x)$$

in die Anfangsbedingungen ein und erhält schließlich die eindeutige Lösung

$$y(x) = \frac{3}{50}\,e^{-x} + \frac{13}{10}\,x\,e^{-x} - \frac{3}{50}\,\cos(3x) - \frac{2}{25}\,\sin(3x)\ .$$

4. Aus dem Residuensatz folgt

$$\int\limits_\Gamma \frac{1}{1-z}\,dz = 2\pi i\,\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{1-z} = -2\pi i\ ,$$

da die Polstelle des Integranden $z_1 = 1$ im Innern des geschlossenen Integrationswegs liegt.
5. Wir entwickeln $\cot z$ in eine Laurentreihe

$$\begin{aligned}
\frac{\tan z - \sin z}{z^4} &= \frac{\frac{\sin z}{\cos z} - \sin z}{z^4} = \frac{\sin z}{z^4}\left(\frac{1}{\cos z} - 1\right) \\
&= \frac{z - \frac{z^3}{6} + \cdots}{z^4}\left(\frac{1}{1 - \frac{z^2}{2} + \cdots} - 1\right) \\
&= \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \cdots\right)\left(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} + \cdots - 1\right) = \frac{1}{2z} + \cdots
\end{aligned}$$

und lesen ab

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\tan z - \sin z}{z^4} = a_{-1} = \frac{1}{2} \; .$$