Klausur Mathematik II

(Informatiker)

11. März 2008

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Betrachten Sie im $\mathbb{R}^2$ die folgenden Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

a) Zeigen Sie, dass $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei durch die folgende Festlegung gegeben:

$$f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 - 2\,\vec{v}_2 \ , \ f(\vec{v}_2) = \vec{v}_1 - 2\,\vec{v}_2 \, .$$

Berechnen Sie die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

c) Berechnen Sie eine Basis des Kerns von f und eine Basis des Bildes von f.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Für eine beliebige reelle Zahl α betrachte man die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A_α.

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren von A_α.

c) Für welche reellen α ist A_α diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Gegeben seien im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Der Unterraum U werde von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannt, der Unterraum W von $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$.

a) Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(W)$.

b) Berechnen Sie eine Basis von $U \cap W$ *(Hinweis: $U \cap W \neq \{\vec{0}\}$)*.

Lösungen:

1. a) Es reicht hier offensichtlich die lineare Unabhängigkeit zu überprüfen. Aus $\lambda\vec{v}_1+\mu\vec{v}_2=\vec{0}$ folgt sofort: $\lambda=0$ und $\mu=0$.

   b) <u>Naive Methode</u>:
   Sei $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

   Löse nach a, b, c, d:

$$\begin{aligned} a+2b &= -1, \\ c+2d &= -4, \\ a+3b &= -1, \\ c+3d &= -4. \end{aligned}$$

   Man sieht sofort (oder mit dem Gauß-Algorthmus):

$$b=0,\ d=0,\ a=-1,\ c=-4,$$

   also $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.
   <u>Mit Übergangsmatrizen</u>:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   c) <u>Basis des Kerns</u>:

   Löse $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}$, also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis vom Kern(f).

   <u>Basis des Bildes</u>:

   Das Bild hat die Dimension 1, also ist $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ eine Basis vom Bild(f).

2. a) Berechne zunächst das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned}\chi(X) &= \det\begin{pmatrix} 1-\alpha-X & 0 & \alpha \\ 0 & 1-X & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha+1-X \end{pmatrix} \\ &= (1-X)\big((1-\alpha-X)(\alpha+1-X)+\alpha^2\big) \\ &= (1-X)\big((1-X)^2-\alpha^2+\alpha^2\big) = (1-X)^3.\end{aligned}$$

   $\lambda=1$ ist der einzige Eigenwert.

   b) Eigenvektoren zum Eigenwert 1:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha-1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fall 1:

Falls $\alpha \neq 0$, dann lässt sich die Matrix vereinfachen zu $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraumes.

Fall 2:

Falls $\alpha = 0$, dann ist die Matrix die Nullmatrix und eine Basis des Eigenraumes ist:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) A_α ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\alpha = 0$ ist. Dies folgt aus b) und der Tatsache, dass es zu einer diagonalisierbaren Abbildung stets eine Basis aus Eigenvektoren gibt und umgekehrt.

3. a) Man sieht sofort mit dem Gauß-Algorithmus, dass jeweils die beiden Erzeuger linear unabhängig sind. Also gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U) = \dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$.

b) Sei $\vec{v} \in U \cap W$, dann ergibt der Ansatz

$$\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein lineares Gleichungssystem in λ, μ, α und β mit der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei β beliebig. Dann ist die Lösung $\alpha = -\beta, \mu = \beta, \lambda = -\beta$. Also ist $\vec{v} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $U \cap W$.