Klausur Mathematik I

(E-Techniker/Mechatroniker/Informatiker/W-Ingenieure)

1. März 2007

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (6 Punkte):

a) Berechnen Sie alle komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

$$z \cdot \bar{z} = 1 \text{ und } (z - \sqrt{2}) \cdot (\bar{z} - \sqrt{2}) = 1 \ .$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in karthesischen Koordinaten (Real- und Imaginärteil) als auch in Polarkoordinaten (Winkel und Betrag) an.

b) Berechnen Sie alle komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

$$z^{17} = 2007 \ .$$

Aufgabe 2 (8 Punkte):

a) Die Ebene E_1 gehe durch die drei Punkte $(-1, 0, -1)$, $(-5, 1, 1)$ und $(4, 1, -2)$. Bestimmen Sie eine implizite Ebenengleichung für E_1, d.h. finden Sie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass

$$E_1 = \Big\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \Big\} \ .$$

b) Welchen Abstand hat der Punkt $(12, 3, -1)$ von der Ebene E_2, die in der Parameterform

$$E_2 = \Big\{ \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Big\}$$

gegeben ist?

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = (x-1)\, e^{-\frac{1}{2}x^2+x} \; .$$

a) Berechnen Sie alle lokalen Minima und lokalen Maxima von f.

b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Wieviele Wendepunkte hat f? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Geben Sie mit Hilfe von a) und b) das Maximum der Menge $\{f(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (10 Punkte):

Betrachten Sie die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+x-6} \; .$$

a) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x)$.

b) Geben Sie eine Stammfunktion von $f(x)$ an.

c) Benutzen Sie a) zur Berechnung der Taylorreihe von $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 5 (6 Punkte):

a) Berechnen Sie (durch Anwendung einer geeigneten Substitution) das bestimmte Integral

$$\int_{\frac{2}{\pi-2}}^{\frac{3}{\pi-3}} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{x+1}{x}\right) dx \; .$$

b) Berechnen Sie (durch Anwendung der partiellen Integration) das bestimmte Integral

$$\int_1^e \ln(x)\, x \, dx \; .$$

Lösungen:

1. a) Schreibe $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
Die beiden Gleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ (x - \sqrt{2})^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $-2x\sqrt{2} + 2 = 0$ oder $\underline{x = \frac{1}{2}\sqrt{2}}$. Dann folgt weiter $y^2 = 1 - x^2 = \frac{1}{2}$, also $\underline{y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}}$.
Man sieht sofort, dass auch umgekehrt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2})$ Lösungen obiger Gleichungen sind.
Somit hat man die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}, \\ z_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = e^{i\frac{7\pi}{4}}. \end{aligned}$$

b) Laut Vorlesung sind es die Lösungen

$$z_k = \sqrt[17]{2007}\, e^{i\frac{2\pi k}{17}} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, ..., 16.$$

2. a) <u>1. Möglichkeit:</u>
Man betrachte $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und setze die Punkte $(-1, 0, -1), (-5, 1, 1)$ und $(4, 1, -2)$ ein. Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem in a, b, c, d.
<u>2. Möglichkeit:</u>
Man bestimme Richtungsvektoren für E_1:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Normalenvektor für E_1 ist

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ auch ein Normalenvektor für E_1. Die Normalengleichung für E_1 lautet damit:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

oder ausgerechnet $\underline{-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4}$.

b) Man berechne einen Normalenvektor für E_2:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man normiere ihn:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann erhält man mit der Abstandsformel für den gesuchten Abstand d:

$$d = \left| \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

3. Als erstes berechnen wir die Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)e^{-\frac{1}{2}x^2+x}, \\ f'(x) &= e^{-\frac{1}{2}x^2+x}\big(1+(x-1)(-x+1)\big) = e^{-\frac{1}{2}x^2+x}(-x^2+2x), \\ f''(x) &= e^{-\frac{1}{2}x^2+x}\big(-2x+2+(-x^2+2x)(-x+1)\big) = e^{-\frac{1}{2}x^2+x}(x^3-3x^2+2). \end{aligned}$$

a) Die Nullstellen von $f'(x)$ sind gerade die Nullstellen von $-x^2+2x$. Dies sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.
Da $f''(0) = 2 > 0$, liegt ein lokales Minimum bei $x_1 = 0$ vor, $(f(0) = -1)$.
Da $f''(2) = -2 < 0$, liegt ein lokales Maximum bei $x_2 = 2$ vor, $(f(2) = 1)$.

b) Mit l'Hospital rechnet man (dabei muss geprüft werden, dass man diesen Satz anwenden kann):

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} (x-1)e^{-\frac{1}{2}x^2+x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{e^{\frac{1}{2}x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-1)e^{\frac{1}{2}x^2-x}} = 0, \\ \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^{-\frac{1}{2}x^2+x} &\overset{t=-x}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{-t-1}{e^{\frac{1}{2}t^2+t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{(t+1)e^{\frac{1}{2}t^2+t}} = 0. \end{aligned}$$

c) <u>1. Möglichkeit</u>:
Man berechnet die Nullstellen von $f''(x)$, also von x^3-3x^2+2, und erhält $x_1 = 1, x_2 = 1+\sqrt{3}, x_3 = 1-\sqrt{3}$ und zeigt dann, dass $f'''(x_i) \neq 0$ für $i = 1, 2, 3$.
Es war aber <u>nicht</u> verlangt, die Nullstellen zu berechnen.
<u>2. Möglichkeit</u>:
Man fertigt eine Skizze an, und argumentiert, dass die Steigungen zwischen den lokalen Extremwerten und $\pm\infty$ jeweils (zu- und abnehmen) bzw. (ab- und zunehmen). Es muß folglich dazwischen eine Stelle geben, an der die Ableitung ein lokales Extremum hat. Somit hat man 3 Wendepunkte.

d) Aus der Skizze sieht man, $\max\{f(a) \mid a \in \mathbb{R}\} = f(2) = 1$. Da an den Rändern $\pm\infty$ nach Aufgabenteil b) der Grenzwert 0 ist, ist das lokale Maximum auch das globale Maximum.

4. a) Der Nenner hat die Nullstellen $x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+6} = 2$ und $x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+6} = -3$. Der Ansatz lautet deshalb:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}.$$

Multipliziert man mit x^2+x-6, erhält man

$$2x = A(x-2) + B(x+3) = x(A+B) + (-2A+3B).$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$2 = A+B, \quad 0 = -2A+3B.$$

Hieraus berechnet man $A = \frac{6}{5}$ und $B = \frac{4}{5}$. Also erhält man

$$\frac{2x}{x^2+x-6} = \frac{\frac{6}{5}}{x+3} + \frac{\frac{4}{5}}{x-2}.$$

b) Laut Vorlesung folgt dann sofort

$$\int \frac{2x}{x^2+x-6} dx = \frac{6}{5}\ln|x+3| + \frac{4}{5}\ln|x-2|.$$

c) Wir rechnen

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^i = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^i x^i.$$

Dabei haben wir die geometrische Reihe $\frac{1}{1-u} = \sum_{i=0}^{\infty} u^i$ benutzt.
Analog gilt

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^i = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i x^i.$$

Dies setzen wir in die Partialbruchzerlegung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{x+3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x-2} \\ &= \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^i x^i - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{2}{5}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^i - \left(\frac{1}{2}\right)^i\right)x^i. \end{aligned}$$

5. (a) Wir substituieren:

$$t = \frac{x+1}{x}, \text{ damit gilt dann } \frac{dt}{dx} = \frac{-1}{x^2},\ dx = -x^2 dt\ .$$

Dies ergibt die neuen Grenzen:

$$\frac{\frac{2}{\pi-2}+1}{\frac{2}{\pi-2}} = \frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{\frac{3}{\pi-3}+1}{\frac{3}{\pi-3}} = \frac{\pi}{3}\ .$$

Also erhält man

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{x^2}\sin(t)(-x^2)dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(t)dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln(x)\cdot x\,dx &= \left[\ln(x)\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2\,dx \\
&= \left[\ln(x)\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx = \left[\ln(x)\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_1^e - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(e)e^2 - \ln(1)1^2\right) - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \\
&= \underline{\frac{1}{4}(e^2+1)} \approx \underline{2.097}.
\end{aligned}$$

Anmerkung: Aufgabenteil (b) wurde als unbestimmtes Integral wortwörtlich in der Vorlesung besprochen.