KLAUSUR

Mathematik IV

15. 9. 2006

Wolfram Koepf

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei folgende Tabelle von Stützstellen und Stützwerten:

j	1	2	3	4
x_j	1	2	3	4
y_j	1	8	27	65

   (a) **(4P)** Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom.
   (b) **(1P)** Geben Sie an, wie sich die Folge für $j = 5, \ldots, 10$ weiterentwickelt.
   (c) **(3P)** Zeigen Sie, dass das Interpolationspolynom für alle positiven ganzen Zahlen ganzzahlige Werte besitzt.
   (d) **(1P)** Was antworten Sie, wenn Sie nach dem nächsten Glied der Folge $1, 8, 27, \ldots$ gefragt werden?
   (e) **(4P)** Bestimmen Sie die Regressionsgerade der Daten und zeichnen Sie diese in die Datenwolke ein.

2. **(6P)** Bestimmen Sie das Approximationspolynom zweiten Grades im quadratischen Mittel der Funktion $f(x) = \cos(\pi x)$ im Intervall $[a, b] = [-1, 1]$.

3. (a) **(2P)** Bestimmen Sie das fünfte Chebyshev-Polynom $T_5(x)$ unter Verwendung von $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ und $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.
   (b) **(4P)** Bestimmen Sie die Nullstelle $x_0 \in (0; 0{,}7)$ von $T_5(x)$ auf 6 Dezimalstellen genau. Erstellen Sie eine Skizze im Intervall $[0, 1]$.

4. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sin(x + y) \; , \qquad y(0) = 1 \; .$$

   (a) **(5P)** Wenden Sie das Euler-Cauchy-Verfahren mit $h = 0{,}2$ im Intervall $[0, 2]$ an.
   (b) **(2P)** Stellen Sie die erhaltene Approximationslösung graphisch dar.

Lösungen

1.) Das Interpolationspolynom in der Form von Lagrange ergibt sich zu

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(2-x)\ (3-x)\ (4-x)}{6} + 4\ (3-x)\ (4-x)\ (-1+x) \\ &+ \frac{27\ (4-x)\ (-2+x)\ (-1+x)}{2} + \frac{65\ (-3+x)\ (-2+x)\ (-1+x)}{6} \\ &= \frac{7x^3}{6} - x^2 + \frac{11x}{6} - 1 \end{aligned}$$

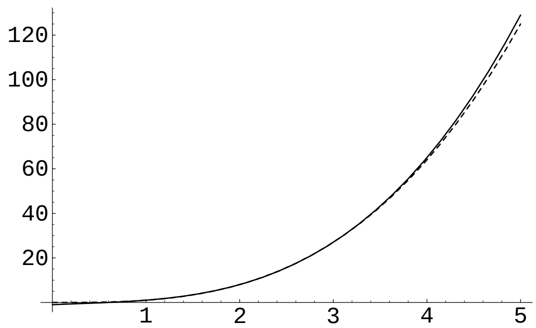
(b): Die Folge entwickelt sich gemäß $1, 8, 27, 65, 129, 226, 363, 547, 785, 1084, \ldots$.
(c) Die Aussage stimmt für $j = 1$ (Induktionsanfang). Sei also $L_3(x)$ eine ganze Zahl. Dann müssen wir nachweisen, dass die Zahl

$$g(x) := L_3(x+1) - L_3(x) = \frac{7x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 2$$

wieder eine ganze Zahl ist. Dies sieht man aus der Darstellung

$$g(x) = 2 + \frac{1}{2}x(7x+3)\ ,$$

denn eine der beiden Zahlen x bzw. $7x + 3$ muss gerade sein.
(d): Auf den ersten Blick sieht die Folge wie die Kubikzahlen aus. Sie kann sich aber auch gemäß einem anderen mathematischen Gesetz anders weiterentwickeln. Ein Beispiel dieser Art ist das berechnete Lagrangepolynom vom Grad 3.



Das Lagrangepolynom und die Funktion x^3 (gestrichelt)

(e): Gegeben sind $N = 4$ Datenpaare. Die Daten liefern die Mittelwerte

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k = \frac{5}{2}$$

und

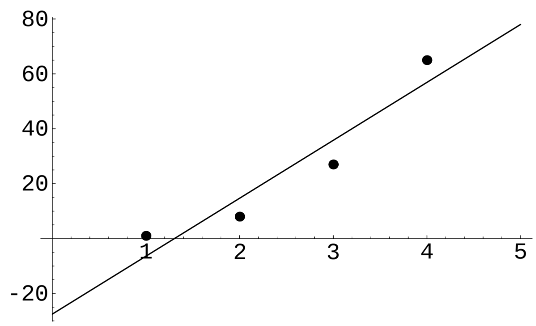
$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k = \frac{101}{4} \ .$$

Die Steigung m der Regressionsgeraden $y = m\,x + n$ ist also gleich

$$m = \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k y_k - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^2 - \overline{x}^2} = \frac{211}{10} = 21{,}1$$

und der Achsenabschnitt n ergibt sich zu

$$n = \overline{y} - m\cdot\overline{x} = -\frac{55}{2} = -27{,}5 \ .$$



Die Regressionsgerade
$f(x) = 21{,}1\,x - 27{,}5$

2.) Das Approximationspolynom zweiten Grades im quadratischen Mittel der Funktion $f(x) = \cos(\pi x)$ im Intervall $[-1, 1]$ ist gerade, da die zu approximierende Funktion gerade ist. Wir machen also den Ansatz

$$\varphi(x) = c_0 + c_2\,x^2 \ .$$

Die Funktion $\varphi(x)$ ist nun dadurch eindeutig bestimmt, dass der Integralabstand

$$F(c_0, c_2) := \int\limits_{-1}^{1} \Big(\cos(\pi x) - \varphi(x)\Big)^2\,dx = 2c_0^2 + \frac{4}{3}c_2c_0 + \frac{2c_2^2}{5} + \frac{8c_2}{\pi^2} + 1$$

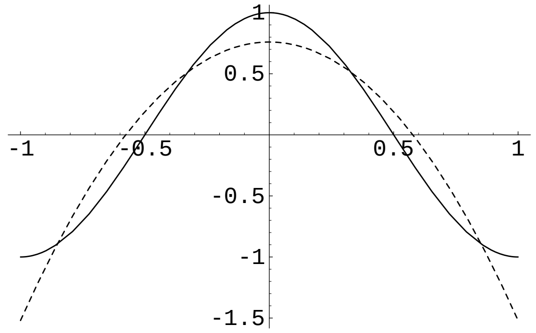
minimiert wird, d. h. also, dass die partiellen Ableitungen von $F(c_0, c_2)$ bzgl. c_0 und c_2 gleich Null sind. Das lineare Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial c_0}F(c_0, c_2) = 4c_0 + \frac{4}{3}c_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial c_0}F(c_0, c_2) = \frac{4}{3}c_0 + \frac{4}{5}c_2 + \frac{8}{\pi^2} = 0$$

hat die Lösung

$$c_0 = \frac{15}{2\pi^2} \approx 0{,}759909 \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{45}{2\pi^2} \approx -2{,}27973 \,.$$

Folglich ist $\varphi(x) = \frac{15}{2\pi^2}\,(1 - 3x^2)$.



Die Funktion $\cos(\pi x)$ und ihre Approximationsfunktion im quadratischen Mittel (gestrichelt)

3.) Aus $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ und $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ erhält man mit der Rekursionsgleichung

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

der Chebyshevpolynome

$$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \,.$$

Für $f(x) = T_5(x)$ ergibt sich

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{16x^5 - 20x^3 + 5x}{80x^4 - 60x^2 + 5} \,.$$

Beim Newtonverfahren wird also die Funktion $g(x)$ iteriert. Beginnen wir mit dem Startwert $x_0 = 0{,}5$, so erhalten wir aus

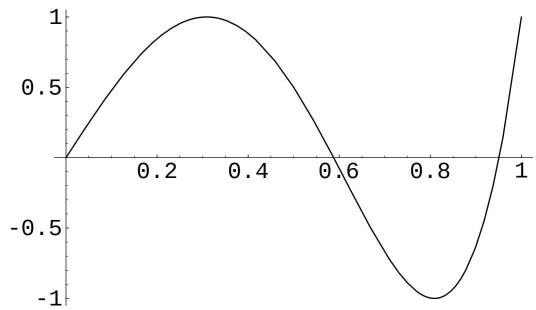
$$x_{n+1} = g(x_n)$$

die Folge (x_n) mit

n	0	1	2	3	4
x_n	0,5	0,6	0,587831	0,587785	0,587785

Auf 20 Stellen genau erhalten wir auch per Formel

$$x_\infty = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 0{,}58778525229247312917 \; .$$



Die Funktion $T_5(x)$ und ihre positiven Nullstellen

4.) Das Euler-Cauchy-Verfahren liefert mit $h = 0{,}2$ und $n = 10$ die Iteration

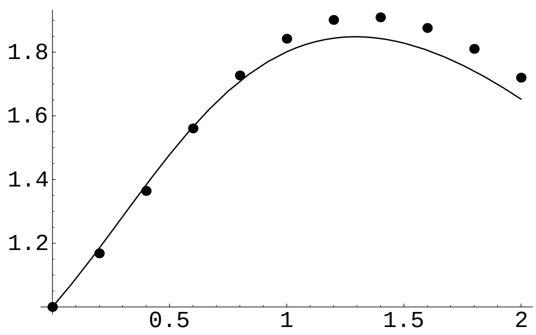
$$\begin{aligned} x_j &= j\,h = 0{,}2\,j \\ y(x_j) = y_j &= y_{j-1} + h\,g(x_{j-1}, y_{j-1}) = y_{j-1} + 0{,}2\,\sin(x_{j-1} + y_{j-1}) \end{aligned}$$

$(j = 1, \ldots, n)$ mit dem Anfangswert

$$y_0 = y(0) = 1 \; .$$

Eine Rechnung liefert die Datentabelle

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y_j	1.1683	1.3642	1.5605	1.7267	1.8421	1.9011	1.9092	1.8758	1.8102	1.7199



Eine Zeichnung der Lösung des Euler-Cauchy-Verfahrens

Die explizite Lösung des Anfangswertproblems ist übrigens

$$y(x) = -x - 2\ \arctan \frac{x\ \tan(1/2) + x + 2\ \tan(1/2)}{x\ \tan(1/2) + x - 2}\ .$$