KLAUSUR

Mathematik IV

15. 3. 2007

Wolfram Koepf

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei folgende Tabelle von Stützstellen und Stützwerten:

j	1	2	3
x_j	1	3	4
y_j	1	8	27

(a) **(4P)** Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom in der Form von Newton.
(b) **(2P)** Bestimmen Sie die Nullstellen des Interpolationspolynoms $N_2(x) = \frac{9x^2}{2} - \frac{29x}{2} + 11$.
(c) **(3P)** Bestimmen Sie die Regressionsgerade der Daten.
(d) **(3 Extrapunkte)** Bestimmen Sie durch lineare Regression die beste Approximation der Form $a + b\,e^x$.
(e) **(2P)** Skizzieren Sie die Datenwolke, das Interpolationspolynom, die Regressionsgerade sowie ggfs. die Regression aus (d) in einem gemeinsamen Schaubild.

2. Approximieren Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

(a) **(2P)** mit der Trapezregel,
(b) **(2P)** mit der Simpsonregel,
bei einer Unterteilung in jeweils $n = 4$ Teilintervalle auf 6 Dezimalstellen genau.
(c) **(3P)** Wie groß ist der jeweilige relative Fehler bzgl. des exakten Werts des Integrals?

3. (a) **(2P)** Bestimmen Sie das fünfte Legendrepolynom $P_5(x)$ unter Verwendung von $P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$ und $P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$ sowie der Rekursionsgleichung

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\Big(x(2n+1)P_n(x) - n\,P_{n-1}(x)\Big) .$$

(b) **(4P)** Bestimmen Sie die zwei positiven Nullstellen t_4, t_5 von $P_5(x)$ auf 6 Dezimalstellen genau.
(c) **(1P)** Welches sind die drei weiteren Nullstellen t_1, t_2 und t_3 von $P_5(x)$?

4. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sin(x + 2y) \ , \qquad y(0) = 1 \ .$$

(a) **(5P)** Wenden Sie das Euler-Cauchy-Verfahren mit $h = 0{,}1$ im Intervall $[0, 1]$ an.
(b) **(2P)** Stellen Sie die erhaltene Approximationslösung graphisch dar.

Lösungen

1.) Das Interpolationspolynom in der Form von Newton ist gegeben durch

$$N_2(x) = b_1 + (x-1)b_2 + (x-3)(x-1)b_3 \ .$$

Die Koeffizienten b_1, b_2 und b_3 finden wir durch dividierte Differenzen oder durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$b_1 = 1, b_1 + 2b_2 = 8, b_1 + 3b_2 + 3b_3 = 27 \ ,$$

welches wir durch Einsetzen der Daten in den Ansatz erhalten. Das Gleichungssystem liefert die Lösung

$$N_2(x) = \left(\frac{31(x-3)}{6} + \frac{7}{2}\right)(x-1) + 1 = \frac{31x^2}{6} - \frac{103x}{6} + 13 \ .$$

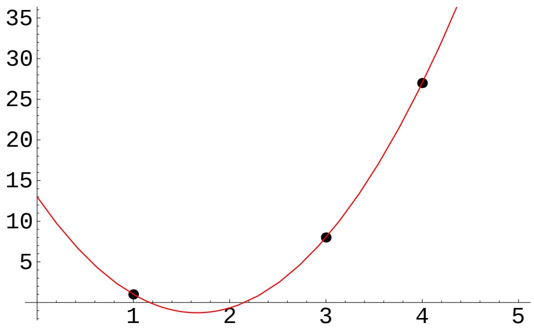
(b): Das Polynom

$$N_2(x) = \frac{9x^2}{2} - \frac{29x}{2} + 11 = \frac{1}{2}\left(9x^2 - 29x + 22\right)$$

gehört zu einem anderen Interpolationsproblem. Man sieht durch Einsetzen, dass $x_1 = 2$ eine Nullstelle ist. Nach Polynomdivision erhalten wir die faktorisierte Form

$$N_2(x) = \frac{1}{2}(x-2)(9x-11) \ ,$$

aus welcher man die zweite Nullstelle $x_2 = \frac{11}{9}$ direkt ablesen kann. Man kann natürlich auch die pq-Formel verwenden, um die Nullstellen zu finden.



Die Daten und das Interpolationspolynom

(c): Gegeben sind $N = 3$ Datenpaare. Die Daten liefern die Mittelwerte

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k = \frac{8}{3}$$

und

$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k = \frac{34}{3} \ .$$

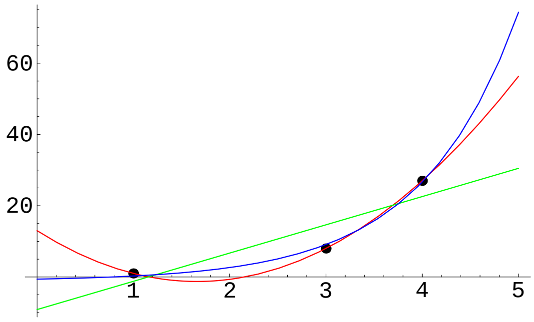
Die Steigung m der Regressionsgeraden $y = m\,x + n$ ist also gleich

$$m = \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k y_k - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^2 - \overline{x}^2} = \frac{111}{14} = 7{,}92857$$

und der Achsenabschnitt n ergibt sich zu

$$n = \overline{y} - m \cdot \overline{x} = -\frac{64}{7} = -9{,}14286 \ .$$

(d): Eine analoge Rechnung mit den Zielfunktionen $f_1(x) = 1$ und $f_2(x) = e^x$ liefert die Bestapproximation $-1{,}11032 + 0{,}508139e^x$.



Die Regressionsgerade (grün) und die exponentielle Approximation $-0{,}711573 + 0{,}466845e^x$ (blau).

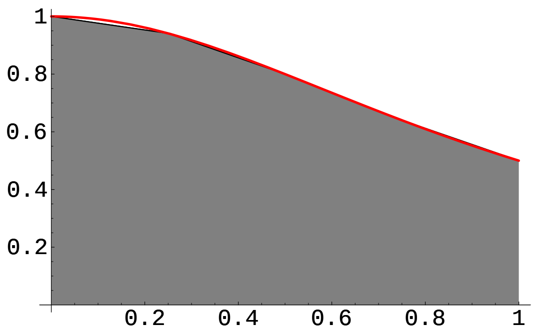
2.) Sei $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ im Intervall $[a,b] = [0,1]$ gegeben. Wir unterteilen das Intervall in $n = 4$ Teile. Approximiert wird das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \ .$$

(a): Die summierte Trapezformel liefert die Approximation

$$I_{\text{Trapez}} = \frac{b-a}{2n}\Big(f(a) + f(b)\Big) + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{4}{17} + \frac{1}{5} + \frac{4}{25} = \frac{5323}{6800} \approx 0{,}782794 \ .$$



Die Trapezapproximation der Funktion $\frac{1}{1+x^2}$.

(b): Die summierte Simpsonformel liefert die Approximation

$$I_{\text{Simpson}} = \frac{b-a}{3n}\Big(f(a) + f(b)\Big) + \frac{b-a}{3n} \sum_{k=1}^{n-1} m_k\, f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{16}{51} + \frac{2}{15} + \frac{16}{75} = \frac{8011}{10200} \approx 0{,}785392 \ ,$$

wobei der Multiplikator $m_k = 2$ für gerade k und $m_k = 4$ für ungerade k ist.
(c): Der exakte Wert des Integrals ist $= \pi/4 \approx 0{,}785398$. Der relative Fehler der Trapezapproximation ist also

$$E_{\text{Trapez}} = \left| \frac{I - I_{\text{Trapez}}}{I} \right| = 0{,}00331557 \ ,$$

beläuft sich also auf 0,33 %, den man – gerade noch – auf der Abbildung sehen kann. Der relative Fehler der Simpsonapproximation ist minimal:

$$E_{\text{Simpson}} = \left| \frac{I - I_{\text{Simpson}}}{I} \right| = 0{,}00000765 \ .$$

3.) Aus $P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$ und $P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$ erhält man mit der Rekursionsgleichung

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\Big(x(2n+1)P_n(x) - n\,P_{n-1}(x)\Big)$$

der Legendrepolynome

$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right) \ .$$

Für $f(x) = P_5(x)$ ergibt sich

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{28\,(9x^5 - 5x^3)}{15\,(21x^4 - 14x^2 + 1)} \ .$$

Beim Newtonverfahren wird also die Funktion $g(x)$ iteriert. Beginnen wir mit dem Startwert $x_0 = 0{,}5$, so erhalten wir aus

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

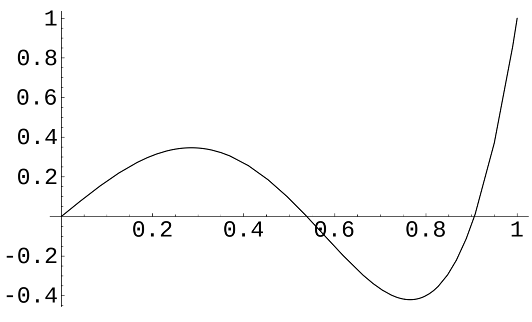
die Folge (x_n) mit

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0,5	0,540351	0,538472	0,538469	0,538469	0,538469

Also ist $t_4 = 0{,}538469$. Die fünfte Nullstelle erhalten wir analog mit Startwert $x_0 = 0{,}9$. Dies liefert die Liste

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0,9	0,906382	0,90618	0,90618	0,90618	0,90618

Also ist $t_5 = 0{,}90618$. Da $P_5(x)$ ungerade ist, sind weiter $t_1 = -t_5$, $t_2 = -t_4$ sowie $t_3 = 0$.



Die Funktion $P_5(x)$ und ihre positiven Nullstellen

4.) Das Euler-Cauchy-Verfahren liefert mit $h = 0{,}1$ und $n = 10$ die Iteration

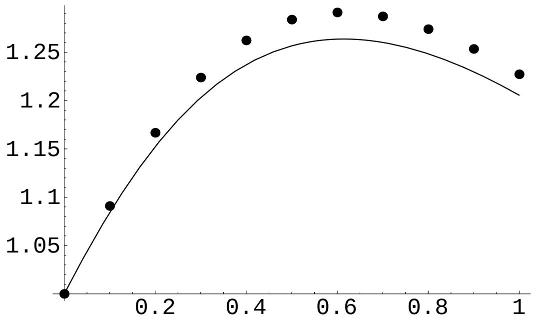
$$\begin{aligned} x_j &= j\,h = 0{,}1\,j \\ y(x_j) = y_j &= y_{j-1} + h\,g(x_{j-1}, y_{j-1}) = y_{j-1} + 0{,}1\,\sin(x_{j-1} + 2\,y_{j-1}) \end{aligned}$$

$(j = 1, \ldots, n)$ mit dem Anfangswert

$$y_0 = y(0) = 1\ .$$

Eine Rechnung liefert die Datentabelle

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_j	1.09093	1.1667	1.22384	1.26222	1.28376	1.29116	1.28709	1.27387	1.2534	1.22719



Der Lösung des Euler-Cauchy-Verfahrens zusammen mit der Lösung des Anfangwertproblems