KLAUSUR

Mathematik IV

17. 2. 2004

Wolfram Koepf

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben
und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. **(7P)** Gegeben sei folgende Tabelle von Stützwerten und Stützstellen:

k	1	2	3
x_k	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y_k	0	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Man bestimme das Interpolationspolynom $L(x)$ zweiten Grades in der Form von Lagrange und gebe eine Abschätzung des Interpolationsfehlers im Intervall $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. **(5P)** Die Gleichung $x = \cos x$ hat im Intervall $[0, 1]$ genau eine Lösung. Skizzieren Sie dies. Lösen Sie die Gleichung numerisch auf 6 Dezimalstellen durch Anwendung des Newtonverfahrens.

3. **(5P)** Gegeben sei die Wertetabelle

j	1	2	3	4	5	6	7
x_j	1	2	4	6	8	8	9
y_j	3	4	6	8	10	11	13

Man bestimme die Regressionsgerade nach der Gaußschen Fehlerquadratmethode.

4. **(6P)** Durch $Q_3(f) = A_0\, f(0) + A_1\, f(1) + A_2\, f(2) + A_3\, f(3)$ werde eine Quadraturformel für das Integral $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx$ dargestellt. Man bestimme die Gewichte A_0, A_1, A_2, A_3 so, dass Polynome vom Grad ≤ 3 exakt integriert werden. Man wende die Quadraturformel auf das Integral $\displaystyle\int_0^3 \sin x\, dx$ an und vergleiche das Ergebnis mit dem exakten Wert des Integrals.

5. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x}{y}\,, \qquad y(0) = 1\,.$$

(a) **(5P)** Wenden Sie das Euler-Cauchy-Verfahren mit $h = 0{,}2$ im Intervall $[0, 2]$ an.
(b) **(2P)** Stellen Sie die erhaltene Approximationslösung graphisch dar.

Lösungen

1.) Mit $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ergibt sich:

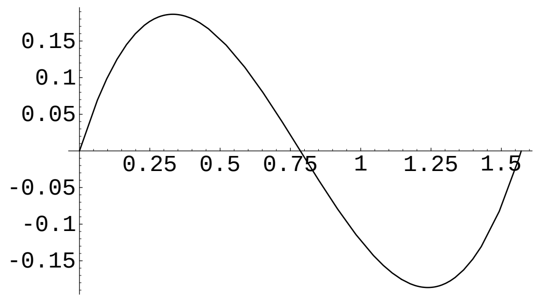
$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{8\,x\,\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\pi^2} - \frac{8\sqrt{2}\,x\,\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^2} \\ &= \left(\frac{4\sqrt{2}}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right)\,x + \left(\frac{8}{\pi^2} - \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}\right)\,x^2\;. \end{aligned}$$

Mit $f(x) = \sin(x)$, $n = 2$ und $f'''(x) = -\cos(x)$ bekommen wir zunächst die Abschätzung:

$$|\sin(x) - L(x)| \leq \frac{1}{6}\max_{0\leq x\leq\frac{\pi}{2}}|\cos(x)|\max_{0\leq x\leq\frac{\pi}{2}}\left|\prod_{k=1}^{3}(x-x_k)\right|\;.$$

Ferner rechnet man leicht nach, dass die Funktion

$$\omega(x) := \prod_{k=1}^{3}(x-x_k) = x\,\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\,\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$



Das Hilfspolynom $\omega(x) = x\,\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\,\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

an den Stellen

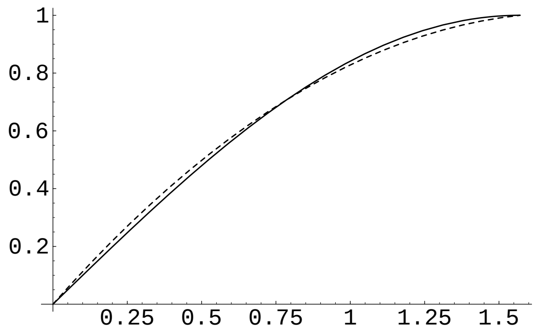
$$\frac{3\,\pi - \sqrt{3}\,\pi}{12} \quad \text{bzw.} \quad \frac{3\,\pi + \sqrt{3}\,\pi}{12}$$

ein Maximum bzw. ein Minimum annimmt. Die Auswertung an den Extremalstellen ergibt:

$$\left|\prod_{k=1}^{3}(x-x_k)\right| \leq \frac{\pi^3}{96\sqrt{3}}\;.$$

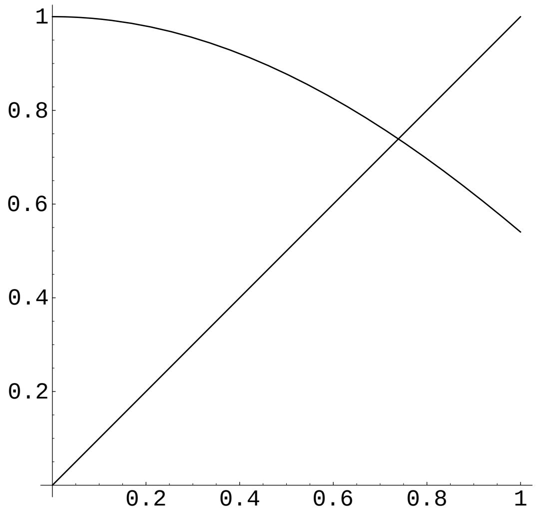
Insgesamt ergibt sich damit folgende Abschätzung für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

$$|\sin(x) - L(x)| \leq \frac{\pi^3}{576\sqrt{3}} \approx 0.031079\,.$$



Die Sinusfunktion und (gestichelt) ihre Interpolationsfunktion $L(x)$

2.) Es geht um die Lösung der Gleichung $x = \cos x$ mit der graphischen Darstellung



Graphische Darstellung der Gleichung $x = \cos x$

Für $f(x) = x - \cos x$ ergibt sich

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x - \cos x}{1 + \sin x}\ .$$

Beim Newtonverfahren wird also die Funktion $g(x)$ iteriert. Beginnen wir mit dem Startwert $x_0 = 0$, so erhalten wir aus

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

die Folge (x_n) mit

n	x_n
0	0
1	1
2	0.7503638678402439
3	0.7391128909113617
4	0.7390851333852840
5	0.7390851332151607

und somit bereits bei der 4. Iteration auf 6 (und mehr) Stellen genau

$$x = 0.739085\,.$$

3.) Gegeben sind $N = 7$ Datenpaare. Die Daten liefern die Mittelwerte

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k = \frac{38}{7}$$

und

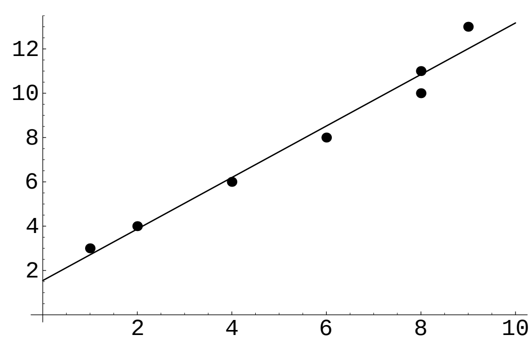
$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k = \frac{55}{7}\ .$$

Die Steigung m der Regressionsgeraden $y = m\,x + n$ ist also gleich

$$m = \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k y_k - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^2 - \overline{x}^2} = \frac{243}{209} = 1.16268\ ,$$

und der Achsenabschnitt n ergibt sich zu

$$n = \overline{y} - m\cdot\overline{x} = \frac{17}{11} \approx 1.54545\ .$$



Die Regressionsgerade
$f(x) = 1.16268\,x + 1.54545$

4.) Wir machen den Ansatz

$$\int_0^3 f(x)\,dx \approx A_0\,f(0) + A_1\,f(1) + A_2\,f(2) + A_3\,f(3)\ ,$$

setzen nacheinander die Monome $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ ein, für welche jeweils Gleichheit gelten soll, und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 &= 3 \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 &= \frac{9}{2} \\ A_1 + 4A_2 + 9A_3 &= 9 \\ A_1 + 8A_2 + 27A_3 &= \frac{81}{4}\ . \end{aligned}$$

Dieses hat die Lösung $A_0 = \frac{3}{8}$, $A_1 = \frac{9}{8}$, $A_2 = \frac{9}{8}$ sowie $A_2 = \frac{3}{8}$.

Für $f(x) = \sin x$ erhalten wir

$$\int_0^3 \sin x\,dx = 1 - \cos 3 \approx 1.98999\ ,$$

während die Näherung liefert

$$A_0\,f(0)+A_1\,f(1)+A_2\,f(2)+A_3\,f(3) = \frac{9\,\sin(1)}{8}+\frac{9\,\sin(2)}{8}+\frac{3\,\sin(3)}{8} \approx 2.02253\ .$$

5.) Das Euler-Cauchy-Verfahren liefert mit $h = 0.2$ und $n = 10$ die Iteration

$$\begin{aligned} x_j &= j\,h = 0.2\,j \\ y(x_j) = y_j &= y_{j-1} + h\,g(x_{j-1}, y_{j-1}) = y_{j-1} + 0.2\,\frac{x_{j-1}}{y_{j-1}} \end{aligned}$$

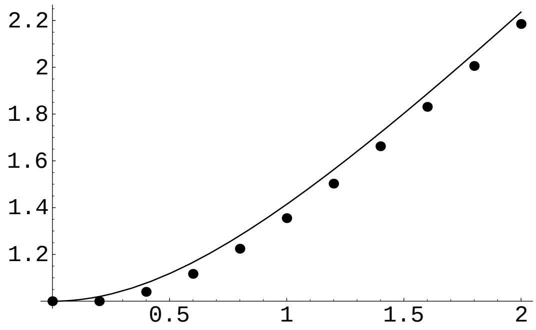
$(j = 1, \ldots, n)$ mit dem Anfangswert

$$y_0 = y(0) = 1\ .$$

Eine Rechnung liefert die Datentabelle

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y_j	1	1.04	1.117	1.224	1.355	1.503	1.662	1.831	2.006	2.185

Dies ergibt die folgende graphische Darstellung der Lösungsapproximation.



Eine Zeichnung der Lösung des Euler-Cauchy-Verfahrens