KLAUSUR

Mathematik II (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

11.3.2010

(W.Seiler / W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Zeigen Sie, dass die Menge

$$U = \{(x, y, z) \,|\, x - 2\,y + i\,z = 0\,, x, y, z \in \mathbb{C}\}$$

einen Unterraum des $\mathbb{C}^3$ bildet und geben sie eine Orthonormalbasis von U an.

2. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird gegeben durch:

$$f(1, -2) = \left(-\frac{15}{4}, \frac{5}{2}\right)\,, \quad f(-1, 1) = (3, -2)\,.$$

Berechnen Sie den Kern von f.

3. Geben Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix an:

$$A = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\,.$$

(Ein Eigenwert ist 1). Geben Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Bitte wenden!

4. Gegeben sei die Funktion:

$$f(x,y) = \frac{y}{1-(x^2+y^2)}\,, \quad x^2+y^2 < 1\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Höhenlinien der Funktion f und fertigen Sie eine Skizze an.
(b) Wie lautet das Taylorpolynom der Funktion f vom Grad 7 um den Enwicklungspunkt $(0,0)$? (Hinweis: Benutzen Sie die geometrische Reihe).

5. Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = y - 2\,y^2 - 3\,x^2\,.$$

(a) Prüfen Sie, ob die Funktion f Extremalstellen im Gebiet $\dfrac{x^2}{4} + y^2 < 1$ besitzt?
(b) Welche Punkte kommen als Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ infrage?

6. Sei K ein gerader Kreiskegel mit der Spitze im Punkt $(0,0,H)$, $H > 0$, und der z-Achse als Mittelachse. Der Radius des Grundkreises in der $x_1 - x_2$-Ebene sei H. Man berechne das Integral:

$$\int\limits_K (x^2+y^2)\,d(x,y,z)\,.$$

Lösungen

1. Seien $(x, y, z), (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in U$ zwei beliebige Punkte in U und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl.

   - Offensichtlich gilt $(0, 0, 0) \in U$; also ist die Menge U nicht leer.
   - Es gilt $(x+\tilde{x})-2(y+\tilde{y})+i(z+\tilde{z}) = (x-2y+iz)+(\tilde{x}-2\tilde{y}+i\tilde{z}) = 0$ (da $(x, y, z), (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in U$) und damit liegt auch $(x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, z + \tilde{z})$ in U.
   - Es gilt $(\lambda x) - 2(\lambda y) + i(\lambda z) = \lambda(x - 2y + iz) = 0$ und damit auch $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in \mathbb{U}$.

   Also ist U ein Unterraum von $\mathbb{C}^3$.

   Durch Lösen des einzeiligen LGS $x - 2y + iz = 0$ erhält man zuerst die parametrische Darstellung

   $$U = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = 2s - it,\ y = s,\ z = t,\ s, t \in \mathbb{C}\big\}$$

   und damit folgende Basis von U:

   $$\vec{v}_1 = (2, 1, 0) \qquad \vec{v}_2 = (-i, 0, 1)\ .$$

   Es gilt $||\vec{v}_1|| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ und damit ist $\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$ ein Einheitsvektor. Da $\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1 = -2i/\sqrt{5}$ (Gram-Schmidt!), steht der Vektor

   $$\vec{\tilde{w}}_2 = \vec{v}_2 + \frac{2i}{\sqrt{5}}\,\vec{w}_1 = (-\frac{i}{5}, \frac{2i}{5}, 1)$$

   senkrecht auf $\vec{w}_1$. Wegen $||\vec{\tilde{w}}_2|| = \sqrt{(1/5)^2 + (2/5)^2 + 1} = \sqrt{6/5}$ bilden damit die Vektoren

   $$\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2, 1, 0), \qquad \vec{w}_2 = \sqrt{\frac{5}{6}}\,\vec{\tilde{w}}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\,(-i, 2i, 5)$$

   eine Orthonormalbasis von U.

2. Die Vektoren $\vec{v}_1 = (1, -2)$ und $\vec{v}_2 = (-1, 1)$ sind linear unabhängig und bilden damit eine Basis B des $\mathbb{R}^2$. Wenn wir im Definitionsraum von f diese Basis und im Bildraum die Standardbasis $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ nehmen, dann ist die Abbildungsmatrix von f

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{15}{4} & 3 \\ \frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir mit dem Gauß-Algorithmus das LGS $A\vec{x} = 0$ lösen, erhalten wir als Lösungsmenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x = 4y\}$. Diese Lösungsmenge beschreibt den Kern von f **bezüglich der Basis** B**.** Bezüglich der Standardbasis wird also der Kern von f aufgespannt von dem Vektor

$$\vec{v} = 4\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 = (-1, -3).$$

(Alternativ kann man die Abbildungsmatrix $\tilde{A}$ bezüglich der Standardbasis in Bild- und Definitionsraum aufstellen:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{A} = AS^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Anwenden des Gauß-Algorithmus auf die Matrix $\tilde{A}$ ergibt das ebenfalls als Basis des Kerns der Abbildung f den Vektor $\vec{v}$.)

3. Aufstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) = \det(A - xE) &= \begin{vmatrix} 1-\sqrt{2}-x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1+\sqrt{2}-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x) \begin{vmatrix} 1-\sqrt{2}-x & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{2}-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)\big((1-\sqrt{2}-x)(1+\sqrt{2}-x) - 1\big) \\
&= (1-x)\big((1-x)^2 - 3\big) = (1-x)(x^2 - 2x - 2)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir drei Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}, \quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$$

Nun berechnen wir zu jedem der Eigenwerte die Eigenvektoren:

- Bei λ_1 braucht man nicht einmal den Gauß-Algorithmus:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

  Die erste und die letzte Spalte sind linear unabhängig, also $\vec{v}_1 = (0,1,0)$.

- Bei λ_2 multipliziert man die letzte Zeile von $A - \lambda_2 E$ mit $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ und addiert sie zu der ersten:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

  Damit erhalten wir für denörigen Eigenvektor $\vec{v}_2 = (1, 0, \sqrt{2} + \sqrt{3})$.

- Bei λ_3 muß man nur ein paar Vorzeichen anpassen im Vergleich zu λ_2:

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

  Damit erhalten wir für denörigen Eigenvektor $\vec{v}_3 = (1, 0, \sqrt{2} - \sqrt{3})$.

Da die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets senkrecht aufeinander stehen, bilden $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ bereits eine Orthogonalbasis. Wir müssen die drei Vektoren also nur noch normalisieren, um die gesuchte Orthonormalbasis zu erhalten.

- $||\vec{v}_1|| = 1$; also ist $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$.
- $||\vec{v}_2|| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{6 + 2\sqrt{6}}$; also $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{6}}} \vec{v}_2$.
- $||\vec{v}_3|| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{6 - 2\sqrt{6}}$; also $\vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{6}}} \vec{v}_3$.

4. **(a)** Sei $f(x, y) = \frac{y}{1-x^2-y^2} = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Beschränkung $x^2 + y^2 < 1$ ist der Nenner immer positiv und wird damit insbesondere nie Null. Für $c = 0$ muß offensichtlich $y = 0$ gelten und die zugehörige Höhenlinie ist der zwischen -1 und 1 gelegene Teil der x-Achse.

Sei nun $c \neq 0$. Ausmultiplizieren ergibt $y = c - cx^2 - cy^2$ und damit

$$y^2 + y/c + x^2 = 1 .$$

Quadratisches Ergänzen führt nun zu der Gleichung

$$(y + \frac{1}{2c})^2 + x^2 = 1 + \frac{1}{4c^2} = \frac{4c^2 + 1}{4c^2} ,$$

die einen Kreis mit Mittelpunkt $(0, -1/2c)$ und Radius $\sqrt{4c^2 + 1}/2|c|$ beschreibt (man beachte, daß sich all diese Kreise in den Punkten $(\pm 1, 0)$ schneiden – siehe Abbildung 1). Die Höhenlinie zu c ist der Teil des Kreises, der die Bedingung $x^2+y^2 < 1$ erfüllt (der gelb schraffierte Bereich in Abbildung 1). Da das Vorzeichen von c nur die y-Koordinate des Mittelpunkts beeinflußt, überlegt man sich leicht, daß die Höhenlinien spiegelsymmetrisch zur x-Achse liegen. Den Graphen von f kann man in Abbildung 2 sehen.

(b) Die geometrische Reihe ist die Reihe

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k , \qquad \text{für } |q| < 1 .$$

Da nach Voraussetzung $x^2 + y^2 < 1$ gilt, können wir diese Formel für $q = x^2 + y^2$ anwenden und erhalten nach Multiplikation mit y, daß

$$f(x, y) = \frac{y}{1 - (x^2 + y^2)} = y \sum_{k=0}^{\infty} (x^2 + y^2)^k .$$

Für das Taylor-Polynom vom Grad 7 zum Entwicklungspunkt $(0, 0)$ benötigen wir die ersten vier Summanden der Reihe:

$$\begin{aligned} T\big(f, (0,0), 7\big) &= y + y(x^2 + y^2) + y(x^2 + y^2)^2 + y(x^2 + y^2)^3 \\ &= y + x^2y + y^3 + x^4y + 2x^2y^3 + y^5 + \\ &\quad x^6y + 3x^4y^3 + 3x^2y^5 + y^7 . \end{aligned}$$

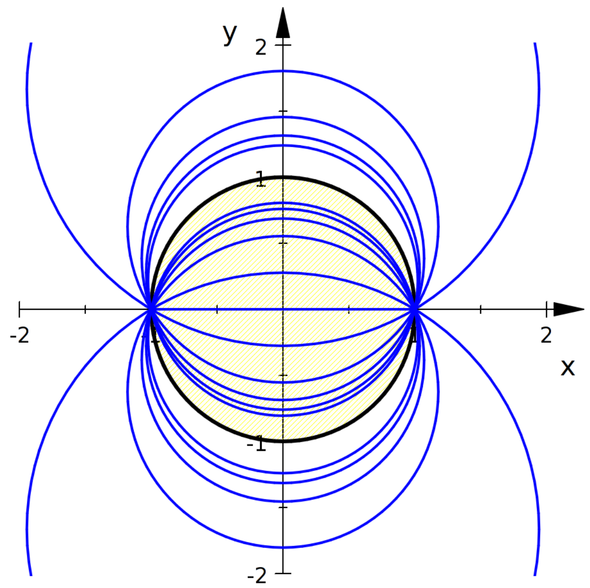

Abbildung 1: Höhenlinien zu Aufgabe 4(a)

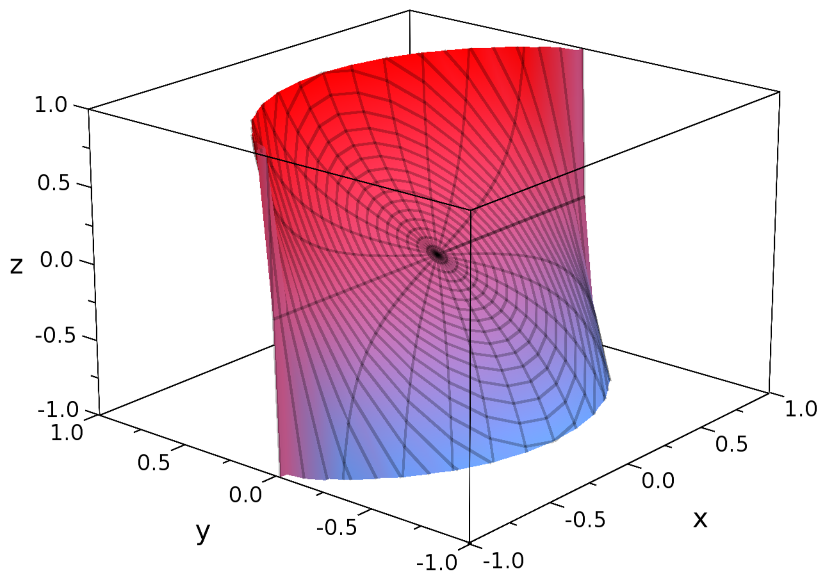

Abbildung 2: Funktionsgraph zu Aufgabe 4(a)

5. **(a)** In kritischen Punkten verschwinden alle ersten Ableitungen. Also stellen wir die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6x = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 4y = 0$$

auf. Offensichtlich besitzen sie nur eine Lösung, nämlich den Punkt $P = (0, 1/4)$. Eine Kontrollrechnung ergibt $0/4 + (1/4)^2 = 1/16 < 1$, so daß P in dem betrachteten Gebiet liegt.

Zur Überprüfung, ob die kritische Stelle auch wirklich ein Extremum ist, müssen wir die Hesse-Matrix von f an der Stelle P auswerten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\,.$$

Also erhalten wir die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\,.$$

H ist negativ definit, da alle Eigenwerte negativ sind (eine alternative Begründung ist, daß $\det H > 0$ und der linke obere Eintrag kleiner Null ist). Damit handelt es sich bei p um ein Maximum.

(b) Zur Bestimmung der potentiellen Extrema unter Nebenbedingungen betrachten wir die Hilfsfunktion

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\big(g(x, y) - 1\big)\,.$$

Das Verschwinden der ersten Ableitungen führt zu den Gleichungen

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -6x + \lambda\frac{x}{2} = 0\,,$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - 4y + 2\lambda y = 0\,,$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0\,.$$

(1) ist erfüllt, wenn entweder $x = 0$ oder $\lambda = 12$ gilt. Wir müssen also eine Fallunterscheidung durchführen.

- Mit $x = 0$ folgt aus (3), daß $y = \pm 1$, und dann aus (2), daß $\lambda = -5/2$ bzw. $\lambda = 3/2$. Dieser Fall liefert also zwei potentielle Extrema, nämlich $(0, \pm 1)$.

- Mit $\lambda = 12$ liefert (2), daß $y = -1/20$, und dann (3), daß $x = \pm\sqrt{399/100}$. Wir erhalten also wieder zwei potentielle Extrema, nämlich $(\pm\sqrt{399/100}, -1/20)$.

Abbildung 3 zeigt einen Graphen der Funktion f. Die schwarze Linie kennzeichnet die Punkte, die die Nebenbedingung erfüllen. Man erkennt gut, daß es sich bei allen in (b) berechneten Punkten wirklich um Extrema handelt: die ersten beiden sind Maxima; die anderen beiden Minima.

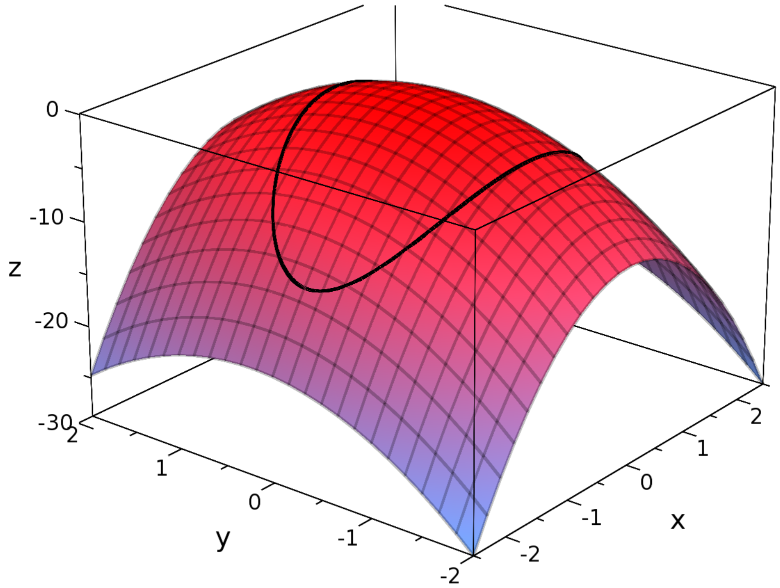

Abbildung 3: Funktionsgraph zu Aufgabe 5

6. Wenn wir den Kegel K mit der y-z-Ebene schneiden, erhalten wir ein gleichschenkeliges Dreieck mit Schenkellänge H. In der Höhe z beträgt die Breite des Dreiecks $r_z = H - z$ (Strahlensatz). Damit ist der Querschnitt des Kegels K in Höhe z die Kreisscheibe K_z mit dem Mittelpunkt $(0, 0, z)$ und dem Radius r_z. Dies liefert

$$\int\limits_K (x^2 + y^2)\, d(x, y, z) = \int\limits_0^H \int\limits_{K_z} (x^2 + y^2)\, d(x, y)\, dz\,.$$

Das innere Integral läßt sich leicht lösen durch das Einführen von Polarkoordinaten. Mit $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ erhalten wir $d(x, y) = r d(r, \phi)$, da für die Jacobi-Determinante gilt

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\,.$$

Damit bekommen wir

$$\int\limits_{K_z} (x^2+y^2)\,d(x,y) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_z} r^2\cdot r\,d(r,\phi) = \frac{\pi}{2}r_z^4 = \frac{\pi}{2}(H-z)^4$$

und für das gesuchte Integral

$$\int\limits_K (x^2+y^2)\,d(x,y,z) = \int\limits_0^H \frac{\pi}{2}(H-z)^4\,dz = \frac{\pi}{10}H^5\,.$$