

KLAUSUR

Mathe II (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

01.03.2011

(W. Strampp / W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:
-------	----------	------------------------	--------------

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 22 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)
----	----	----	----	----

Punkte:	Note:
---------	-------

**Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!**

1. Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

- (a) das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte von A .
 - (b) die Eigenvektoren von A .
 - (c) eine Matrix B , so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix D ist. Geben Sie auch D an.
2. (a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten x , y und z

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a-2 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a und b seien beliebige reelle Zahlen).

Unter welcher Bedingung ist das System

- (i) nicht lösbar?
 - (ii) eindeutig lösbar?
 - (iii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?
- (b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird durch die folgende Matrix A von f bezüglich der kanonischen Basen des \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^2 (d. h. die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) gegeben:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns sowie eine Basis des Bildes von f , und bestätigen Sie die Dimensionsformel.

Bitte wenden!

3. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = 2(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2).$$

(a) Wie lauten die Taylorpolynome vom Grad 2, 3 und 4 um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$?

(b) Welche Punkte kommen als Extremalstellen von f infrage?

(c) Welche Punkte kommen als Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ infrage?

4. (a) Welcher Wert ergibt sich für das Integral:

$$\int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right) dx?$$

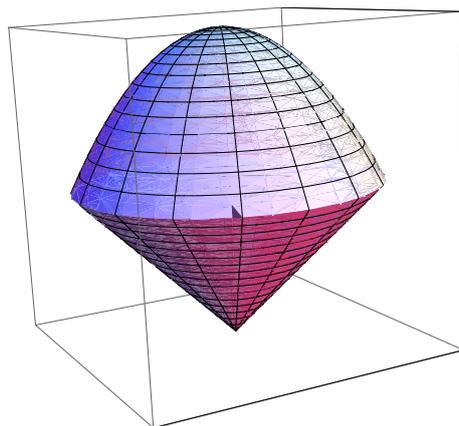
(b) Berechnen Sie dasselbe Integral mithilfe von Polarkoordinaten.

5. Die Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ wird gegeben als Schnittmenge von

$$\{(x, y, z) \mid z \leq 2 - (x^2 + y^2)\} \quad \text{und} \quad \{(x, y, z) \mid z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Verwenden Sie Zylinderkoordinaten, und berechnen Sie das folgende Integral :

$$\int_D (x^2 + y^2 + z^2) \, d(x, y, z).$$



Die Schnittmenge D

Lösungen

1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1a

Charakteristisches Polynom von A .

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -2 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda) \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\mathcal{X}_A(\lambda)$. D.h. $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.

1b

Eigenvektoren von A .

Die Eigenvektoren von A sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems

$(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$ für $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.

Für $\lambda_1 = -1$

$$(A - \lambda_1 E)\vec{u} = \vec{0} \iff (A + E)\vec{u} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus hat man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') \\ (3') \end{array} = 2(1) + (2)$$

Man kann feststellen, dass das Gleichungssystem unterbestimmt ist. Man setze $z = \mu$ und $y = \gamma$.

$$\begin{aligned} (1') \rightsquigarrow -x - 2\gamma + \mu = 0 &\implies x = -2\gamma + \mu. \\ \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2\gamma + \mu \\ \gamma \\ \mu \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass man für den Eigenwert $\lambda = -1$ die l.u. Eigenvektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält.

Genauso erhält man für den Eigenwert $\lambda = 2$ den Eigenvektor $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1c

Eine Matrix B , so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist, wird spaltenweise gebildet aus den Eigenvektoren. Die entsprechende Diagonalmatrix D enthält die Eigenwerte in der Diagonalen.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2a

Gleichungssystem für die Unbekannten x , y und z

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a-2 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a und b seien beliebige reelle Zahlen).

Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 3 & a & a-2 & | & 0 \\ -1 & 2 & a & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 0 & -3+a & a+1 & | & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & | & b \end{pmatrix} \begin{matrix} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & b \\ 0 & -3+a & a+1 & | & -3b \\ 0 & 0 & a(a-7) & | & b(a+6) \end{pmatrix} \begin{matrix} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -3(2') + (-3+a)(3') \end{matrix}$$

Das Gleichungssystem ist

(i) nicht lösbar, wenn

$a(a-7) = 0$ und $b(a+6) \neq 0$. D.h. wenn ($a = 0$ oder $a = 7$) und $b \neq 0$.

(ii) eindeutig lösbar, wenn

$$a(a - 7) \neq 0 \text{ D.h. wenn } a \neq 0 \text{ und } a \neq 7.$$

(iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn

$$a(a - 7) = 0 \text{ und } b(a + 6) = 0 \text{ D.h. wenn } (a = 0 \text{ oder } a = 7) \text{ und } b = 0.$$

2b

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird durch die folgende Matrix A (mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung einer Basis des Kerns von f .

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Kern}(f) \iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} (1') \\ (2') \end{matrix} = 2(1) + (2)$$

Man $z = \mu$ und $y = \gamma$. $(1') \rightsquigarrow -x + 2\gamma + \mu \implies x = 2\gamma + \mu$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma + \mu \\ \gamma \\ \mu \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Kerns von f ist

$$B_1 = \left\{ \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Dim}(\text{Kern}(f)) = 2$$

Bestimmung einer Basis des Bildes von f .

Die linear unabhängigen Spalten von A bilden eine Basis des Bildes von f . Mit Spaltenumformungen erhält man

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (S'_2(2. \text{ Spalte})) = 2(S_1) + (S_2) \\ (S'_3) = (S_1) + (S_3) \end{matrix}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Bildes von f ist

$$B_2 = \left\{ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Dim (Bild } (f)) = 1$$

Bestätigung der Dimensionsformel.

$$\begin{aligned} \text{Dim}(\mathbb{R}^3) &= \text{Dim}(\text{Kern } (f)) + \text{Dim}(\text{Bild } (f)) \iff \\ 3 &= 2 + 1 \end{aligned}$$

3a)

Die Taylorpolynome vom Grad 2,3,4 um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ lauten:

$$-(x^2 - y^2), \quad -(x^2 - y^2), \quad 2(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2).$$

3b)

Als Extremalstellen kommen nur Punkte infrage mit:

$$\text{grad}f(x, y) = (0, 0).$$

Das System:

$$8x(x^2 + y^2) - 2x = 0, \quad 8y(x^2 + y^2) + 2y = 0,$$

besitzt folgende Lösungen:

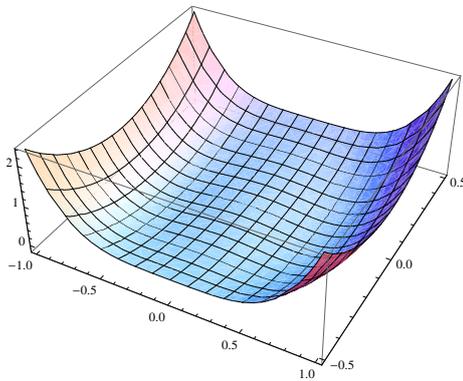
$$(0, 0), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Zunächst ist offenbar $x = 0, y = 0$ ein Lösung. Der Fall $x \neq 0$ führt auf:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \quad y = 0.$$

Der Fall $y \neq 0$ führt auf:

$$x^2 + y^2 + 2 = 0.$$



Die Funktion $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$

3c)

Als Extremalstellen von f unter g kommen nur Punkte infrage mit:

$$\text{grad}f(x, y) - \lambda \text{grad}g(x, y) = (0, 0).$$

Das System:

$$8x(x^2 + y^2) - 2x - \lambda 2x = 0, \quad 8y(x^2 + y^2) + 2y - \lambda 2y = 0,$$

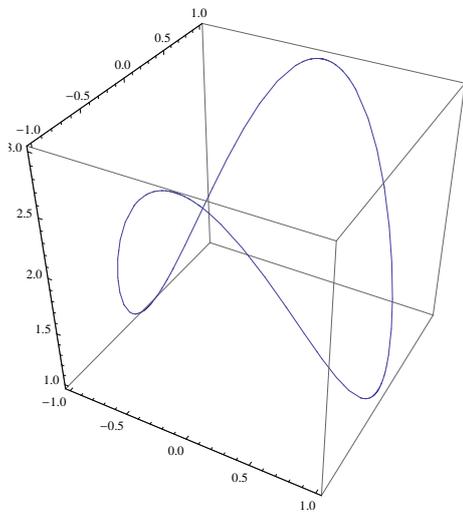
besitzt folgende Lösungen:

$$(0, -1), (0, 1), (-1, 0), (1, 0).$$

Zunächst ist offenbar $x = 0, y = 0$ keine Lösung. Der Nullpunkt erfüllt die Nebenbedingung nicht. Der Fall $x \neq 0$ und $y \neq 0$ ist wegen:

$$8(x^2 + y^2) - 2 - \lambda 2 = 0, \quad 8(x^2 + y^2) + 2 - \lambda 2 = 0,$$

ausgeschlossen. Der Fall $x = 0$ führt auf: $8y^2 + 2 - 2\lambda = 0$ und mit den Nebenbedingung auf $y^2 = 1$. Der Fall $y = 0$ führt auf: $8x^2 + 2 - 2\lambda = 0$ und mit den Nebenbedingung auf $x^2 = 1$.



Die Funktion $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$
auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

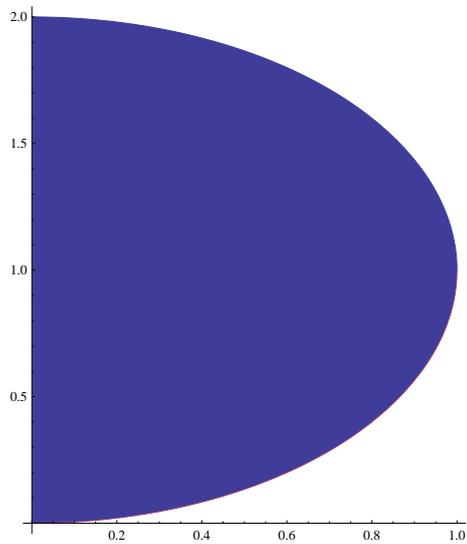
4a)

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right) dx &= \int_0^1 x y \Big|_{y=1-\sqrt{1-x^2}}^{y=1+\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} \, dx = -\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4b)

Das Integrationsgebiet wird begrenzt durch die y -Achse und den Halbkreis: $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x \geq 0$.



Das Integrationsgebiet

Wir betrachten Polarkoordinaten:

$$x = r \cos(\phi), \quad y = r \sin(\phi).$$

Auf der Kreislinie gilt:

$$(r \cos(\phi))^2 + (r \sin(\phi))^2 - 2r \sin(\phi) = 0,$$

bzw.

$$r = 2 \sin(\phi).$$

Damit bekommen wir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \sin(\phi)} r \cos(\phi) r \, dr \, d\phi \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \cos(\phi) (\sin(\phi))^3 \, d\phi = \frac{2}{3} (\sin(\phi))^4 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right) dx &= \int_0^2 \left(\int_{\arcsin(\frac{r}{2})}^{\frac{\pi}{2}} r \cos(\phi) r \, d\phi \, dr \right) \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5)

In Polarkoordinaten gilt:

$$x = r \cos(\phi), y = r \sin(\phi), r^2 = x^2 + y^2.$$

Der Schnitt der Flächen $z = 2 - (x^2 + y^2)$ und $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ergibt sich aus: $z = 2 - r^2, z = r$, zu: $z = 1, r = 1$. Damit bekommen wir die Integrationsgrenzen in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \int_D (x^2 + y^2 + z^2) d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_r^{2-r^2} (r^2 + z^2) r \, dz \right) dr \right) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r^3 z + \frac{z^3}{3} r \right) \Big|_{z=r}^{z=2-r^2} dr \right) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\frac{8}{3} r - 2r^3 - \frac{4}{3} r^4 + r^5 - \frac{1}{3} r^7 \right) dr \right) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{83}{120} d\phi = \frac{83}{60} \pi. \end{aligned}$$