KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker/Mechatroniker

26.2.2010

W. Seiler , W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = -\cos(x) + (\cos(x) + 1)\, e^x\,, \quad y(0) = -1\,.$$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''' - 2\,y'' - 3\,y' = 3\,x^2\,.$$

   Hinweis: verwenden Sie zur Bestimmung einer speziellen Lösung den Ansatz $y_{\text{spez}}(x) = p(x)$ mit einem Polynom $p(x)$ vom Grad 3.

3. Gegeben ist das Differenzialgleichungssystem:

$$Y' = A\,Y\,, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

   Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem. Wie lautet die Matrixexponentialfunktion $e^{A\,x}$.

4. Die Kurve Γ werde gegeben durch $\Gamma = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_\Gamma z\,dz$ und $\int_\Gamma \mathrm{Im}(z)\,dz$.

5. Was für Singularitäten besitzt die Funktion

$$f(z) = \frac{(1+i)z}{z^3 - 2iz}\,?$$

   Berechnen Sie an allen Polstellen das Residuum von f. Hinweis: benutzen Sie zur Vereinfachung, daß $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$.

Lösungen

1. y tritt auf der rechten Seite nicht auf $\rightsquigarrow$ direkte Integration

$$y(x) - y(0) = \int_0^x \Big(-\cos(\xi) + \big(\cos(\xi) + 1\big)e^{\xi}\Big)d\xi$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -1 + \big[-\sin(\xi)\big]_0^x + \big[e^{\xi}\big]_0^x + \int_0^x \cos(\xi)e^{\xi}d\xi$$

Nebenrechnung:

$$\int_0^x \cos(\xi)e^{\xi}d\xi = \big[\cos(\xi)e^{\xi}\big]_0^x + \int_0^x \sin(\xi)e^{\xi}d\xi$$

$$= \cos(x)e^x - 1 + \big[\sin(\xi)e^{\xi}\big]_0^x - \int_0^x \cos(\xi)e^{\xi}d\xi$$

(zweimal partiell Integrieren). Also gilt

$$\int_0^x \cos(\xi)e^{\xi}d\xi = \frac{1}{2}\big(\cos(x)e^x + \sin(x)e^x - 1\big)$$

Endergebnis:

$$y(x) = -\frac{5}{2} - \sin(x) + \frac{1}{2}\big(\cos(x) + \sin(x) + 2\big)e^x$$

2. inhomogene lineare Differentialgleichung $\rightsquigarrow$ betrachte zunächst zugehörige homogene Gleichung mit charakteristisches Polynom:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem der homogenen Gleichung: 1, e^{-x}, e^{3x}

Ansatz für spezielle Lösung: $y_{\text{spez}}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

also: $y'_{\text{spez}}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$, $y''_{\text{spez}}(x) = 2a_2 + 6a_3x$, $y'''_{\text{spez}}(x) = 6a_3$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(6a_3 - 4a_2 - 3a_1) - 6(2a_3 + a_2)x - 9a_3x^2 = 3x^2$$

und ein Koeffizientenvergleich ergibt dann

$$a_3 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_1 = -\frac{14}{9}, \quad a_0 \text{ beliebig}$$

Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = -\frac{14}{9}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{3x}$$

mit Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3.

3. Berechne Eigenwerte und -vektoren von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-1)(\lambda-5)$$

Zwei Eigenwerte: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$

Zugehörige Eigenvektoren:

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Basis von } E_1$$

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Basis von } E_5$$

$$\Rightarrow \quad \text{Fundamentalsystem:} \quad Y_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^x,\ Y_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}$$

Bestimmung der Matrixexponentialfunktion:

$$S = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$e^{Ax} = S \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{5x} \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^x + 2e^{5x} & -4e^x + 4e^{5x} \\ -e^x + e^{5x} & 2e^x + 2e^{5x} \end{pmatrix}$$

4. Kurve Γ ist ein Kreis um den Ursprung mit Radius 2 $\rightsquigarrow$
Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto 2e^{it} = 2\cos(t) + 2i\sin(t)$
$\Rightarrow \qquad \gamma'(t) = 2ie^{it} = -2\sin(t) + 2i\cos(t)$

   - $f(z) = z$ ist eine holomorphe Funktion, Γ eine geschlossene Jordan-Kurve $\quad\Rightarrow$ (Cauchyscher Integralsatz) $\quad \int_\Gamma f(z)\,dz = 0$
   (Alternativ: $\quad F(z) = z^2/2$ ist eine Stammfunktion von $f(z)$)
   - $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ ist nicht holomorph, daher explizite Integration nötig.

$$\begin{aligned}\int\limits_\Gamma f(z)\,dz &= \int\limits_0^{2\pi} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} 2\sin(t)\big(-2\sin(t) + 2i\cos(t)\big)\,dt \\ &= -4\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt + 4i\int\limits_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\,dt\end{aligned}$$

Nebenrechnungen:

$$\int \sin(t)\cos(t)\,dt = \int s\,ds = \frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2}\sin^2(t)$$

(Substitution von $s = \sin(t)$) $\qquad\Rightarrow\qquad \int\limits_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\,dt = 0$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt = [-\sin(t)\cos(t)]_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(t)\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \big(1 - \sin^2(t)\big)\,dt$$

(partielle Integration, Einsetzen von $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$). Also gilt:

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi$$

Einsetzen der Ergebnisse der Nebenrechnungen ergibt dann:

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = -4\pi$$

5.

$$f(z) = \frac{(1+i)z}{z^3 - 2iz} = \frac{(1+i)z}{z(z^2-2i)} = \frac{(1+i)z}{z(z+\sqrt{2i})(z-\sqrt{2i})}$$

Nebenrechnung: $\sqrt{2i} = \sqrt{2}\sqrt{i} = 1+i$

Also besitzt $f(z)$ drei Singularitäten:

- $z = 0$ hebbare Singularität (da $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \dfrac{1+i}{-2i}$)
- $z = \pm(1+i)$ Pole erster Ordnung

Berechnung der Residuen an den Polen: Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{1+i}{\big(z+(1+i)\big)\big(z-(1+i)\big)} = \frac{A}{z+(1+i)} + \frac{B}{z-(1+i)}$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$Az - A(1+i) + Bz + B(1+i) = 1+i$$

Koeffizientenvergleich führt zu dem LGS

$$A + B = 0 \quad -A + B = 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

Dies ergibt

$$f(z) = \frac{-1/2}{z+(1+i)} + \frac{1/2}{z-(1+i)}$$

und damit

$$\operatorname{Res}\big(f(z),(1+i)\big) = -\frac{1}{2} \qquad \operatorname{Res}\big(f(z),-(1+i)\big) = \frac{1}{2}$$