KLAUSUR

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

26.2.2003

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben
und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Man bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)\,.$$

Hinweis: Mit den Koordinaten $\xi = x + ct$ und $\eta = x - ct$ transformiere man in die hyperbolische Normalform.
(6P)

2. Man bestimme die Charakteristiken der Differenzialgleichung

$$y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

und stelle eine parabolische Normalform her.
(6P)

3. In Kugelkoordinaten:

$$x = r\cos(\phi)\sin(\theta)\,, y = r\sin(\phi)\sin(\theta)\,, z = r\cos(\theta)\,,$$

$$0 < r\,, \quad 0 \le \theta \le \pi\,, \quad 0 \le \phi < 2\pi\,,$$

nimmt die Potenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

die Gestalt an:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{(\sin(\theta))^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0\,.$$

Mit dem Separationsansatz

$$u(r,\theta) = h(r)\,g(\cos(\theta))$$

werden von ϕ unabhängige Lösungen gesucht. Welche gewöhnlichen Differenzialgleichungen ergeben sich für die Funktionen h und g?
(6P)

Lösungen

1.) Wir führen eine neue Funktion ein:

$$u(x,t) = \tilde{u}(\xi(x,t), \eta(x,t))\,, \quad \xi(x,t) = x + c\,t\,, \eta(x,t) = x - c\,t)\,.$$

Hieraus erhält man durch Ableiten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - 2\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\right)\,.$$

Einsetzen ergibt die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} = -\frac{1}{4\,c}\,f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)\,.$$

Durch Integration kann man $\tilde{u}(\xi, \eta)$ bekommen:

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\,c}\int\int f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right) d\xi\, d\eta$$

und daraus $u(x,t)$.

2.) Wegen

$$b^2 - a\,c = (y)^2 - y^2\,1 = 0$$

ist die Gleichung parabolisch. Eine Schar von Charakteristiken ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = \frac{1}{y}\,.$$

Separation der Variablen ergibt:

$$\frac{y^2}{2} = x + c\,.$$

Wir führen neue Koordinaten ein:

$$\xi(x,y) = x\,, \quad \eta(x,y) = \frac{y^2}{2} - x\,,$$

und setzen wieder:
$$u(x,t) = \tilde{u}(\xi(x,t), \eta(x,t))\,.$$
Wir bekommen folgende Ableitungen:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - 2\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\,,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = y\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} - y\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\,,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y^2\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\,.$$
Einsetzen ergibt folgende Normalform:
$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{2\,(\xi+\eta)}\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\,.$$
Man kann auch andere Koordinaten einführen, beispielsweise:
$$\xi(x,y) = y\,, \quad \eta(x,y) = x - \frac{y^2}{2}\,,$$
und erhält:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\,,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} - y\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\,,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - 2\,y\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + y^2\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\,.$$
Einsetzen ergibt dann folgende Normalform:
$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\,.$$
3.) Wir schreiben $' = \frac{d}{dr}$ und $\dot{} = \frac{d}{d\xi}$ und $g(\xi(\theta)) = g(\cos(\theta))$. Ableiten ergibt:
$$\frac{\partial}{\partial r} u(r,\theta) = h'(r)\,g(\cos(\theta))$$

und

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta)) = (r^2\,h''(r) + 2\,r\,h'(r))\,g(\cos(\theta))\,.$$

Weiter ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}u(r,\theta) = -h(r)\ \sin(\theta)\,g^{\cdot}(\cos(\theta))$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\,\frac{\partial}{\partial\theta}u(r,\theta)\right) &= -h(r)\,2\,\sin(\theta)\ \cos(\theta)\,g^{\cdot}(\cos(\theta))\\ &\quad +h(r)\,(\sin(\theta))^3\,g^{\cdot\cdot}(\cos(\theta))\,.\end{aligned}$$

Einsetzen und Separieren liefert mit $\xi = \cos(\theta)$ und $1-\xi^2 = (\sin(\theta))^2$:

$$\frac{r^2\,h''(r) + 2\,r\,h'(r)}{h(r)} = -\frac{(1-\xi^2)\,g^{\cdot\cdot}(\xi) - 2\,\xi\,g^{\cdot}(\xi)}{g(\xi)} = c\,,$$

also

$$\begin{gathered} r^2\,h''(r) + 2\,r\,h'(r) - c\,h(r) = 0\,,\\ (1-\xi^2)\,g^{\cdot\cdot}(\xi) - 2\,\xi\,g^{\cdot}(\xi) + c\,g(\xi) = 0\,.\end{gathered}$$