KLAUSUR

Vektoranalysis

31. 8. 2006

Wolfram Koepf

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 6 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. **(4P)** Verwenden Sie den Metriktensor der Kugelkoordinaten, um das Volumenelement $dV = dx^1\, dx^2\, dx^3$ in Kugelkoordinaten (r, φ, θ) darzustellen. Geben Sie die Kugelkoordinaten an und führen Sie die Berechnungen im Detail aus.

2. Gegeben sei das Vektorfeld

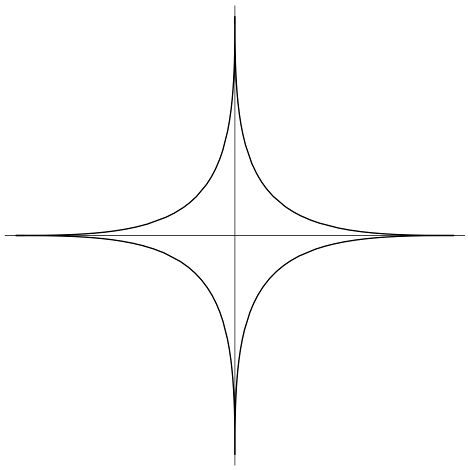
   $$T(x) = ((x^1)^2 + 2\,\lambda\, x^2 + \mu\, x^2\, x^3)\, \underline{e}_1 + (5\, x^1 + \mu\, x^1\, x^3)\, \underline{e}_2 + (3\,\lambda\, x^1\, x^2 + 2\, x^3)\, \underline{e}_3\ .$$

   (a) **(3P)** Berechnen Sie die Rotation von T.
   (b) **(1P)** Bestimmen Sie die Parameter λ und μ derart, dass das Vektorfeld T ein Potential besitzt.

3. **(5P)** Wie kann man mit dem Greenschen Satz den Flächeninhalt der Menge

   $$D = \{(x_1, x_2)\,|\, x_1^{\frac{2}{5}} + x_2^{\frac{2}{5}} \le R^{\frac{2}{5}}\}$$

   berechnen? Man parametrisiere die Randkurve wie folgt:

   $\phi \mapsto (R\, \cos^5 \phi, R\, \sin^5 \phi)\,,$
   $0 \le \phi \le 2\pi\,.$

   Geben Sie den Flächeninhalt durch ein Integral an. Wer das finale Integral auswerten kann, erhält einen Extrapunkt!

Lösungen

1.) Der Metriktensor der Kugelkoordinaten, welche durch $\xi^1 = r, \xi^2 = \vartheta, \xi^3 = \varphi$, $x^1 = r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi\,, x^2 = r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi\,, x^3 = r\,\cos\vartheta$ gegeben sind, hat die Darstellung

$$(g_{ij}) = \left(\underline{g}_i \cdot \underline{g}_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,\sin^2\vartheta \end{pmatrix} .$$

Das Volumenelement transformiert sich gemäß der Regel

$$dV = dx^1\,dx^2\,dx^3 = \sqrt{\det(g_{ij})}\,d\xi^1\,d\xi^2\,d\xi^3 .$$

Wegen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,\sin^2\vartheta \end{pmatrix} = r^4\,\sin^2\vartheta$$

ergibt sich das Volumenelement für Kugelkoordinaten also zu

$$dV = r^2\,\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi .$$

2.) Für die Rotation des Vektorfelds

$$T(x) = ((x^1)^2 + 2\,\lambda\,x^2 + \mu\,x^2\,x^3)\,\underline{e}_1 + (5\,x^1 + \mu\,x^1\,x^3)\,\underline{e}_2 + (3\,\lambda\,x^1\,x^2 + 2\,x^3)\,\underline{e}_3$$

erhält man

$$\operatorname{rot} T(x) = (3x^1\lambda - x^1\mu)\,\underline{e}_1 + (x^2\mu - 3x^2\lambda)\,\underline{e}_2 + (5 - 2\lambda)\,\underline{e}_3 .$$

Ein Potentialfeld erhalten wir genau für $\operatorname{rot} T(x) = 0$. Also müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} 3\lambda - \mu &= 0 \\ \mu - 3\lambda &= 0 \\ 5 - 2\lambda &= 0 \end{aligned}$$

gelten. Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $\lambda = \frac{5}{2}, \mu = \frac{15}{2}$. T hat also genau dann ein Potential, falls $\lambda = \frac{5}{2}$ und $\mu = \frac{15}{2}$ gilt.

3.) Betrachtet man das Vektorfeld

$$V(x_1, x_2) = (0, x_1) ,$$

so erhält man mit dem Greenschen Satz:

$$\int\limits_D dx = \int\limits_{\partial(D)} V \, ds \, .$$

Mit der angegebenen Parameterdarstellung folgt hieraus:

$$\begin{aligned}
\int\limits_D dx &= \int\limits_0^{2\pi} (0, R \, \cos^5 \phi) \cdot (-5 \, R \cos^4 \phi \sin \phi, 5 \, R \sin^4 \phi \cos \phi)^T \, d\phi \\
&= 5 \, R^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^6 \phi \, \sin^4 \phi \, d\phi = 20 \, R^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^6 \phi \, \sin^4 \phi \, d\phi \\
&= 20 \, R^2 \int\limits_0^1 (\sqrt{1-x^2})^5 \, x^4 \, dx = \frac{15}{128} \, \pi \, R^2 \, .
\end{aligned}$$

Es wurde die Substitution $\sin \phi = x$ verwendet.