KLAUSUR

Diskrete Strukturen I

24. 9. 2002

Prof. Dr. Reinhard Hochmuth / Dr. Andreas Klein

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt!

Für jede der Aufgaben 1–5 gibt es 8 Punkte. Vier der Aufgaben sind zu bearbeiten. Bearbeiten Sie alle Aufgaben werden die besten vier bewertet.

Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 13 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. Beantworten Sie die folgenden Fragen (Rechenweg und Zahlergebnis):

   a) Wie viele 8-elementige Teilmengen hat eine 14-elementige Menge?

   b) Wie viele Autonummern gibt es, die aus 3 Buchstaben gefolgt von 3 Ziffern bestehen?

   c) Wie viele Permutationen von $\{1, \ldots, 10\}$ haben genau 8 Fixpunkte?

   d) Auf wie viele Arten kann man mit drei (nicht unterscheidbaren) Würfeln die Augenzahl 15 werfen?

2. Bearbeiten Sie zwei der folgenden drei Aufgaben:

   a) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$.

   b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $S(n, n-1) = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$.

   c) Zeigen Sie: Für drei natürliche Zahlen a, b, c ist $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$ durch 12 teilbar.

3. Lösen Sie die folgende Rekursionsgleichung:

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

4. **a)** Stellen Sie den Multigraphen G für die folgende Adjazenzmatrix dar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) Ist G eulersch? Begründen Sie Ihre Antwort!

   c) Wie kann G so abgeändert werden, daß geschlossene Eulersche Linien existieren?

   d) Bestimmen Sie die Anzahl der Kantenfolgen der Länge 3 zwischen jeweils zwei Knoten von G.

5. Bearbeiten Sie drei der folgenden vier Aufgaben:

   a) Welche Gittergraphen besitzen Eulersche Linien? Begründen Sie!

   b) Welche vollständigen Graphen sind eulersch? Begründen Sie!

   c) Zeigen Sie: Jeder Baum ist bipartit.

   d) Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie!

   - $n = \mathcal{O}(n^2)$
   - $n^2 = \mathcal{O}(n)$

Lösungen zur Klausur vom 24.9.02

1. Beantworten Sie die folgenden Fragen (Rechenweg und Zahlergebnis):

   a) Wie viele 8-elementige Teilmengen hat eine 14-elementige Menge?

   $$\begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 8} = 3003.$$

   b) Wie viele Autonummern gibt es, die aus 3 Buchstaben gefolgt von 3 Ziffern bestehen?

   Es gibt 26 Buchstaben und 10 Ziffern, insgesamt also $26^3 \cdot 10^3 = 17,576 \cdot 10^6$ Möglichkeiten .

   c) Wie viele Permutationen von $\{1, \ldots, 10\}$ haben genau 8 Fixpunkte?

   1. Möglichkeit: Jeweils 2 Elemente werden vertauscht. Dies ergibt $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = 45$ Möglichkeiten.
   2. Möglichkeit: Genau 8 Fixpunkte ergeben genau 9 Zyklen. Dies ergibt mittels Stirlingzahlen erster Art $s(10, 9) = 45$.

   d) Auf wie viele Arten kann man mit drei (nicht unterscheidbaren) Würfeln die Augenzahl 15 werfen?

   Es gibt genau drei Möglichkeiten. Diese lauten $(3, 6, 6)$, $(4, 5, 6)$ und $(5, 5, 5)$.

---

2. Bearbeiten Sie zwei der folgenden drei Aufgaben:

   a) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$.

   Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = \sum_{i=1}^{1} i \cdot i! = 1$ und

   $$(n+1)! - 1 = (1+1)! - 1 = 1.$$

   Die Behauptung ist also für $n = 1$ wahr.
   Induktionsschritt: Für $n = k \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{i=1}^{k} i \cdot i! = (k+1)! - 1$. Daraus folgt für $n = k + 1$:

   $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i \cdot i! &= \sum_{i=1}^{k} i \cdot i! + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+2)(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

   Also ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\quad S(n, n-1) = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Möglichkeit: Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $S(n, n-1) = S(1, 0) = 0$ und $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$. Die Behauptung ist also für $n = 1$ wahr.

Induktionsschritt: Für $n = k \in \mathbb{N}$ gelte $S(k, k-1) = \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$. Daraus folgt für $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} S(k+1, k) &= S(k, k-1) + kS(k, k) = \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot 1 \\ &= \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.
2. Möglichkeit: $S(n, n-1)$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, eine n-elementige Menge in genau $n-1$ disjunkte und nichtleere Teilmengen zu zerlegen. Jede solche Zerlegung besteht aus einer 2-elementigen Menge und $n-2$ 1-elementigen Mengen. Dafür gibt es gerade $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ Möglichkeiten.

c) Zeigen Sie: Für drei natürliche Zahlen a, b, c ist $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$ durch 12 teilbar.

Zwei der drei Zahlen a, b, c besitzen bei Division durch 2 den gleichen Rest. O.B.d.A. seien dies a und b. Dann ist sowohl $a - b$ wie auch $a + b$ durch 2, also $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ durch 4 teilbar.
Besitzen zwei der drei Zahlen a, b, c bei Divison durch 3 den gleichen Rest, so ist $(a - b)(a - c)(b - c)$ durch 3 teilbar.
Schließlich nehme man an, daß die drei Zahlen a, b, c bei Divison durch 3 jeweils einen voneinander verschiedenen Rest besitzen. O.B.d.A. besitze a bei Division durch 3 den Rest 1, b den Rest 2 und a den Rest 0. Dann ist $a + b$ offenbar durch 3 teilbar.
Insgesamt ist $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$ also durch 12 teilbar.

---

3. Lösen Sie die folgende Rekursionsgleichung:

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

Der Ansatz $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ führt auf

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (-a_{n-1} + 2a_{n-2}) x^n = x - A(x)x + 2x^2 A(x),$$

also

$$A(x) = \frac{x}{1 + x - 2x^2}.$$

Partialbruchzerlegung, d.h.

$$\frac{x}{1 + x - 2x^2} = \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x},$$

liefert $\alpha = -2,\ \beta = 1,\ A = -1/3$ und $B = 1/3$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{x}{1 + x - 2x^2} \\
&= \frac{1}{3}(\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 + 2x} \\
&= \frac{1}{3}(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(1 - (-2)^n)x^n.
\end{aligned}$$

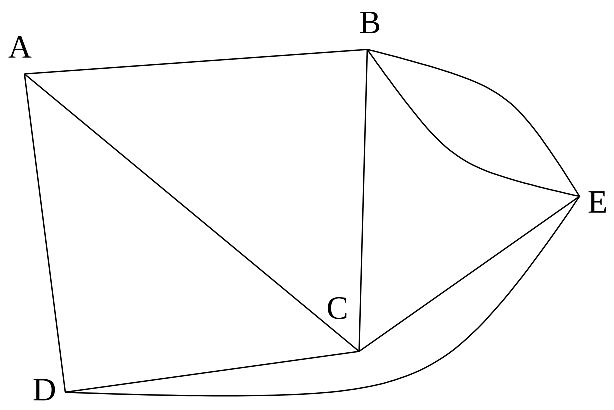
Somit gilt

$$a_n = \frac{1}{3} - \frac{(-2)^n}{3}.$$

---

4. **a)** Stellen Sie den Multigraphen G für die folgende Adjazenzmatrix dar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

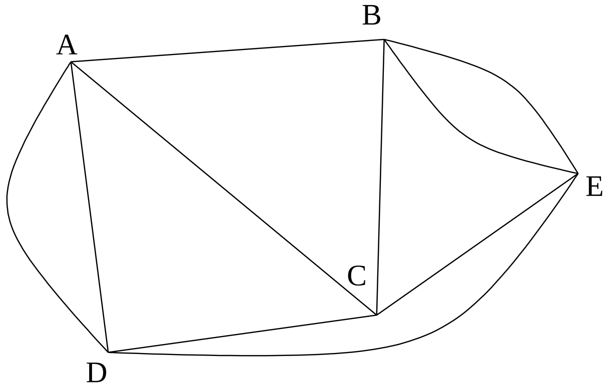


b) Ist G eulersch? Begründen Sie Ihre Antwort!

G ist nicht eulersch, da ungerade Knoten (A und D) existieren.

c) Wie kann G so abgeändert werden, daß geschlossene Eulersche Linien existieren?

Zum Beispiel durch Ergänzen einer Kante zwischen A und D.



d) Bestimmen Sie die Anzahl der Kantenfolgen der Länge 3 zwischen jeweils zwei Knoten von G.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 13 & 9 & 9 & 5 \\ 13 & 6 & 12 & 5 & 19 \\ 9 & 12 & 10 & 9 & 12 \\ 9 & 5 & 9 & 4 & 13 \\ 5 & 19 & 12 & 13 & 6 \end{pmatrix}.$$

---

5. Bearbeiten Sie drei der folgenden vier Aufgaben:

a) Welche Gittergraphen besitzen Eulersche Linien? Begründen Sie!

Alle anderen besitzen mehr als 2 ungerade Knoten.

b) Welche vollständigen Graphen sind eulersch? Begründen Sie!

Graphen mit einer ungeraden Anzahl von Knoten größer gleich 3, denn dann besitzt jeder Knoten geraden Grad.

c) Zeigen Sie: Jeder Baum ist bipartit.

Wähle einen Knoten als Wurzel und führe den Abstand aller Knoten zur Wurzel ein: Der Abstand ist $k \in \mathbb{N}_0$, wenn der eindeutig bestimmte Kantenzug zur Wurzel (Es gibt keine Kreise!) k Kanten enthält. Zerlege nun die Menge der Knoten in die mit geradem bzw. ungeradem Abstand. Dies definiert eine disjunkte Zerlegung der Knotenmenge so, daß es Kanten nur zwischen jeweils 2 Knoten aus den beiden Teilmengen gibt.

d) Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie!

- $n = \mathcal{O}(n^2)$
- $n^2 = \mathcal{O}(n)$

$n = \mathcal{O}(n^2)$: Richtig, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \leq n^2$.
$n^2 = \mathcal{O}(n)$: Falsch, da für jedes $C > 0$ und jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ existiert mit $n > C$ und damit $n^2 > Cn$. Es gibt demnach kein $C > 0$, so daß bezüglich einem geeigneten $n_0 \in \mathbb{N}$ für alle $n \geq n_0$ gilt: $n^2 \leq Cn$.