Wintersemester 2002/2003 2.9.2003

Diskrete Strukturen II, Nachklausur

Name	Vorname	Matrikelnummer

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
Punkte											

Bitte schreiben Sie auf jeden Zettel, den Sie abgeben, deutlich Ihren Namen. Bei Multiple-Choice-Aufgaben ergibt jedes korrekte, falsche bzw. nicht angekreuzte Kästchen $+1/2$, $-1/2$ bzw. 0 Punkte.

Aufgabe 1: *(2 + 4 + 4 Punkte)*

(a) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring, der Nullteiler hat.

(b) Welche Elemente haben die zyklischen Untergruppen von $(\mathbb{F}_{11}\backslash\{0\}, \cdot)$, die von den Elementen 3 bzw. 4 erzeugt werden?

(c) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 105 und 156 und stellen Sie ihn als Linearkombination der beiden Zahlen dar. Ist 105 in $\mathbb{Z}/156\mathbb{Z}$ invertierbar?

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*
Hat $X^2 + X + 1$ Nullstellen in $\mathbb{C}, \mathbb{F}_2$ bzw. $\mathbb{F}_3$, falls ja welche?

Aufgabe 3: *(6 Punkte, minimal 0 Punkte)*
Welche Aussagen gelten für $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$ mit $n > 1$?

	Wahr	Falsch
$a \mid (b+c) \quad \Rightarrow \quad a \mid b$ oder $a \mid c$.		
$a \mid (b+c) \quad \Rightarrow \quad a \mid b$ und $a \mid c$.		
$a \equiv b \pmod{n}, \quad c \equiv d \pmod{n} \quad \Rightarrow \quad a + c \equiv b + d \pmod{n}$.		
$a \equiv b \pmod{n}, \quad b \equiv c \pmod{n} \quad \Rightarrow \quad a \equiv c \pmod{n}$.		
n Primzahl, $a \mid n \quad \Rightarrow \quad a = 1, a = -1, a = n$ oder $a = -n$.		
$\mathrm{kgV}(a, b) \mid a \cdot b$.		

Welche Aussagen gelten in allen Gruppen $(G, \circ)$?

	Wahr	Falsch
Für alle $a, b, c, d \in G$: $\quad (a \circ b) \circ (c \circ d) = a \circ ((b \circ c) \circ d)$.		
Für alle $a, b \in G$: $\quad a \circ b = b \circ a$.		
$(G, \circ)$ ist eine Halbgruppe.		
Für alle $a \in G$: $\quad a \circ a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a \circ a$		
Für alle $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $b^{-1} \circ a \circ b = e$.		
Es gibt genau ein $e \in G$ mit $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in G$.		

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*
Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsbereich (ein Ring ohne Nullteiler) mit 4 Elementen. Zeigen Sie:

$$1 + 1 = 0.$$

Hinweis: Sie dürfen die Gleichung $1 + 1 + 1 + 1 = 0$ verwenden.

Aufgabe 5: *(2 + 3 Punkte)*
Berechnen Sie alle Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$ zu den Gleichungssystemen

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 6 \\ x &\equiv 2 \pmod 3), \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} y &\equiv 4 \pmod 6 \\ y &\equiv 5 \pmod 7). \end{aligned}$$

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 3}, \quad a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $Ax = a$.

Aufgabe 7: *(2 + 5 Punkte)*
Man löse das lineare Programm

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 11 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad Q(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 = \text{ Min!}$$

(a) graphisch

(b) mit dem Simplex-Algorithmus.

Aufgabe 8: *(1 + 2 + 3 Punkte)*
Es seien 3 Urnen gegeben. Die i-te Urne enthält eine weiße und i schwarze Kugeln. Aus jeder Urne wird eine Kugel gezogen. Es sei X die Anzahl der weißen Kugeln.

(a) Welche Werte nimmt die Zufallsvariable X an?

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$.

(c) Bestimmen Sie die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Hinweis: Man führe 3 Indikatoren X_1, X_2, X_3 ein: X_i ist 1, wenn die Kugel aus der i-ten Urne weiß ist, 0 sonst. Dann drücke man X durch die X_i aus.

Aufgabe 9: *(2 + 2 Punkte)*
Drei Maschinen A, B, C stellen Glühbirnen her, die mit Wahrscheinlichkeiten $0.75, 0.5, 0.8$ gut sind. A, B, C stellen die Anteile $0.4, 0.2, 0.4$ der Gesamtproduktion her.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine gekaufte Glühbirne gut ist?

(b) Wie ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine gekaufte Glühbirne von Maschine A stammt, wenn sie gut ist?

Aufgabe 10: *(4 Punkte)*
Es sei Ω ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und A, B zwei Teilmengen. Zeigen Sie:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Wintersemester 2002/2003 9.2.2003

Diskrete Strukturen II
Lösungen zur Nachklausur

Aufgabe 1:

(a) In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist z.B. 2 ein Nullteiler, denn $2 \cdot 3 = 0$.

(b) Die zyklischen Untergruppen, die von 3 bzw. 4 erzeugt werden, bestehen aus den Potenzen $3, 9, 5, 4, 1$ bzw. $4, 5, 9, 3, 1$ von 3 bzw. 4.

(c) Erweiterter Eukidischer Algorithmus mit den Zahlen 156 und 105 liefert

$$3 = -2 \cdot 156 + 3 \cdot 105 \equiv 3 \cdot 105 \pmod{156},$$

105 ist also nicht invertierbar.

Aufgabe 2:

In $\mathbb{C}$ hat $X^2 + X + 1$ die Nullstellen $-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}$, $-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}$. In $\mathbb{F}_2$ hat es keine Nullstellen und in $\mathbb{F}_3$ die Nullstelle 1.

Aufgabe 4:

Es ist $(1+1)(1+1) = 1+1+1+1 = 0$, d.h. $1+1 = 0$, da R nullteilerfrei ist.

Aufgabe 5:

(a) Aus der Bedingung $x \equiv 3 \pmod 6$ folgt, daß x durch 3 teilbar sein soll. Dann gilt aber $x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$, was der zweiten Gleichung widerspricht. Das Gleichungssystem hat keine Lösung.
(a) Die Zahlen 6 und 7 haben ggT 1. Der erweiterte Euklidische Algorithmus liefert die Kombination $1 = 1 \cdot 7 - 1 \cdot 6$.
Aus dem chinesischen Restsatz erhalten wir die Lösung $4 \cdot 1 \cdot 7 - 5 \cdot 1 \cdot 6 = -2$. Die weiteren Lösungen sind gegeben modulo dem kgV von 6 und 7, d.h. modulo 42; die Lösungsmenge ist also: $\{42 \cdot n - 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 6:

Der Gauß-Algorithmus über $\mathbb{F}_2$ gibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt demnach keine Lösung.

Aufgabe 7:

Das Programm ist schon in Standardform gegeben. Der Algorithmus verläuft (zum Beispiel) folgendermaßen (das Pivotelement ist jeweils fett markiert):

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_2 & \\ \hline x_3 & -1 & 2 & 3 \\ x_4 & 1 & 2 & 10 \\ x_5 & \mathbf{2} & 1 & 11 \\ \hline & -1 & -1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|cc|c} & x_5 & x_2 & \\ \hline x_3 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{17}{2} \\ x_4 & -\frac{1}{2} & \boldsymbol{\frac{3}{2}} & \frac{9}{2} \\ x_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|cc|c} & x_5 & x_4 & \\ \hline x_3 & & & \\ x_2 & & & 3 \\ x_1 & & & 4 \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -7 \end{array}$$

Eine Lösung ist dann $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ und $Q(x_1, x_2) = -7$.

Aufgabe 8:

Mit der Notation aus dem Hinweis: $X = X_1 + X_2 + X_3$.
(a) Der Wertebereich von X ist:
$W_X = \{0, 1, 2, 3\}$.

(b) Für den Erwartungswert hat man:
$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \mathrm{E}(X_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$.

(c) Für die Varianz haben wir die Formel $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3)$, wobei

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) - \mathrm{E}(X_i)^2 = (\sum_{x=0}^{1} x^2 \mathrm{P}(X_i = x)) - \frac{1}{(i+1)^2} = \frac{1}{i+1} - \frac{1}{(i+1)^2} = \frac{i}{(i+1)^2}$$

und somit ist $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{16} = \frac{95}{144}$.

Aufgabe 9:

(a) Die Wahrscheinlichkeit ist $0.75 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.4 = \frac{18}{25}$.

(b) Es sei A das Ereignis, daß die Glühbirne von der Maschine A stammt, und B, daß die Glühbirne gut ist. Dann ist

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0.75 \cdot 0.4}{0.75 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.4} = \frac{5}{12}.$$

Aufgabe 10:

Es ist

$$1 = P(\Omega) \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

und daraus folgt $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

Aufgabe 3:

	Wahr	Falsch
$a \mid (b+c) \quad \Rightarrow \quad a \mid b$ oder $a \mid c$.		$\times$
$a \mid (b+c) \quad \Rightarrow \quad a \mid b$ und $a \mid c$.		$\times$
$a \equiv b \pmod{n}, \quad c \equiv d \pmod{n} \quad \Rightarrow \quad a + c \equiv b + d \pmod{n}$.	$\times$	
$a \equiv b \pmod{n}, \quad b \equiv c \pmod{n} \quad \Rightarrow \quad a \equiv c \pmod{n}$.	$\times$	
n Primzahl, $a \mid n \quad \Rightarrow \quad a = 1, a = -1, a = n$ oder $a = -n$.	$\times$	
$\mathrm{kgV}(a, b) \mid a \cdot b$.	$\times$	
	Wahr	Falsch
Für alle $a, b, c, d \in G$: $\quad (a \circ b) \circ (c \circ d) = a \circ ((b \circ c) \circ d)$.	$\times$	
Für alle $a, b \in G$: $\quad a \circ b = b \circ a$.		$\times$
$(G, \circ)$ ist eine Halbgruppe.	$\times$	
Für alle $a \in G$: $\quad a \circ a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a \circ a$	$\times$	
Für alle $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $b^{-1} \circ a \circ b = e$.		$\times$
Es gibt genau ein $e \in G$ mit $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in G$.	$\times$	