KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie

19.2.2002

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben
und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Für die T-periodische Funktion f gelte:

$$f(t) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \, e^{i\,j\,\omega\,t}\,, \quad \omega = \frac{2\,\pi}{T}\,.$$

   Man berechne die Fourier-Koeffizienten der Funktion $g(t) = \cos(\omega\,k\,t)\,f(t)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Welche Entwicklung erhält man für g, wenn eine reellwertige Funktion f in harmonischer Darstellung vorliegt

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, \cos(j\,\omega\,t)\,?$$

   (8P)

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei stückweise glatt. Man zeige: Ist f ungerade, $f(t) = -f(-t)$, so gilt:

$$\mathcal{F}(f(t))(\omega) = -\frac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\, \sin(\omega\,t)\,dt\,.$$

   (4P)

3. Für die Impulse:

$$f_n(t) = \begin{cases} n\,, & 0 \le t < \frac{1}{n}\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

   zeige man:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(f_n(t))(s) = 1\,.$$

   (6P)

Lösungen

1.) Mit den Eulerschen Formeln schreiben wir:

$$g(t) = \frac{1}{2}\, e^{i\,k\,\omega\,t}\, f(t) + \frac{1}{2}\, e^{-i\,k\,\omega\,t}\, f(t)$$

und bekommen:

$$\begin{aligned} g(t) \quad &\sim \quad \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{j-k}\, e^{i\,j\,\omega\,t} + \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{j+k}\, e^{i\,j\,\omega\,t} \\ &= \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{c_{j-k} + c_{j+k}}{2}\, e^{i\,j\,\omega\,t} . \end{aligned}$$

Liegt die Entwicklung einer reellwertigen Funktion f in harmonischer Darstellung vor

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j\, \cos(j\,\omega\,t) + b_j\, \sin(j\,\omega\,t)) ,$$

so gehen wir zunächst zur Exponentialdarstellung über:

$$f(t) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j\, e^{i\,j\,\omega\,t} ,$$

mit

$$c_0 = \frac{a_0}{2} , \quad c_j = \frac{a_j - b_j\, i}{2} , \quad c_{-j} = \overline{c_j} , \quad j = 1 , \ldots , n .$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} g(t) \quad &\sim \quad \frac{c_{-k} + c_k}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j-k} + c_{j+k}}{2}\, e^{i\,j\,\omega\,t} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{-j-k} + c_{-j+k}}{2}\, e^{-i\,j\,\omega\,t} \\ &= \quad \Re(c_k) + \sum_{j=1}^{\infty} \Re\left(c_{j-k}\, e^{i\,j\,\omega\,t}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \Re\left(c_{j+k}\, e^{i\,j\,\omega\,t}\right) . \end{aligned}$$

Ist die Funktion f gerade mit der Entwicklung

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, \cos(j\,\omega\,t) ,$$

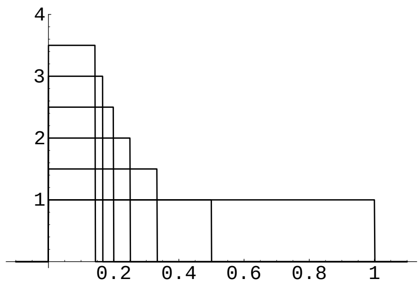
so ergibt sich:

$$g(t) \sim \frac{a_k}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{|j-k|} + a_{j+k}}{2} \cos(j\,\omega\,t)\,.$$

2.) Für ungerades f gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{0}^{\infty} f(-t)\, e^{i\,\omega\,t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\, dt - \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{i\,\omega\,t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, \left(e^{-i\,\omega\,t} - e^{i\,\omega\,t}\right)\, dt \\
&= -\frac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, \sin(\omega\,t)\, dt
\end{aligned}$$

3.)



Die Impulse $f_n(t)$

Die Laplacetransformierte von f_n ergibt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_n(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-s\,t}\, f_n(t)\, dt = n \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-s\,t}\, dt \\ &= \frac{1 - e^{-\frac{1}{n}\,s}}{\frac{1}{n}\,s}\,.\end{aligned}$$

Hieraus entnimmt man mit der Regel von de l'Hospital den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(f_n(t))(s) = 1\,.$$