KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie

8.9.2009

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. (a) Die Funktion $f(t) = |\sin(t)|\,, 0 \le t \le 2\,\pi$, werde $2\,\pi$-periodisch fortgesetzt. Berechnen Sie die Koeffizienten a_k, b_k der Fourierreihe:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\, \cos(k\,t) + b_k\, \sin(k\,t))\,.$$

(Hinweis: $2\,\sin(t)\,\cos(k\,t) = \sin((1-k)\,t) + \sin((1+k)\,t)$.
(b) Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\,.$$

(Hinweis: $\int_0^{2\,\pi} (\sin(t))^2\,dt = \pi$.
(c) Die Funktion $g(t) = \sin(t)\,, 0 \le t \le \pi$, werde π- periodisch fortgesetzt. Welche Fourierreihe ergibt sich für g?
(9P)

2. (a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von:

$$f(t) = \cos(\omega_0\,t)\,e^{-a\,|t|}\,, \quad a > 0\,, \omega_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Gehen Sie von der Fouriertransformierten von $e^{-a\,|t|}$ aus.
(b) Wie lautet die Fouriertransformierte der Distribution $T_{\cos(\omega_0\,t)}$?
Gehen Sie von der Fouriertrnasformierten der Distribution $T_{e^{\omega_0\,t\,i}}$ aus.
(9P)

3. Gegeben sei die Folge:

$$f_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 2\,k\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,, \\ 0 & , \quad n = 2\,k+1\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge f_n.
Wie lautet die z-Transformierte der Folge:

$$g_n = \begin{cases} n & , \quad n = 2\,k\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,, \\ 0 & , \quad n = 2\,k+1\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,? \end{cases}$$

(6P)

Lösungen:

1.a) Es handelt sich um eine gerade Funktion ($T = 2\pi$, $\omega = 1$), also

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \cos(k\,t)\,,$$

mit

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin(t)\, \cos(k\,t)\, dt\,.$$

Es gilt

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\,, \quad a_1 = 0\,.$$

Für $k \neq 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (\sin((1-k\,t) + \sin((1+k)\,t))\, dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos((1-k)\,t)}{1-k} + \frac{\cos((1+k)\,t}{1+k} \right)_{t=0}^{t=\pi} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \frac{4}{(1-k^2)\,\pi}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases} \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4\,k^2)\,\pi} \, \cos(2\,k\,t)\,.$$

1b) Nach der Parsevalschen Gleichung gilt:

$$\frac{1}{2\,\pi} \int\limits_0^{2\,\pi} (f(t))^2\, dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\,.$$

Wir bekommen:

$$\frac{1}{2\,\pi} \int\limits_0^{2\,\pi} (f(t))^2\, dt = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_0^{2\,\pi} (\sin(t))^2\, dt = \frac{1}{2}\,.$$

Somit gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2\,k}^2 = 1 - \frac{a_0^2}{2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}\,.$$

1.c) Die Funktion $g(t)$ ist π-periodisch mit der Frequenz $\omega = 2$. Die Funktion g besitzt dieselbe Fourierreihe.

2a) Wir schreiben

$$f(t) = \frac{1}{2}\,(e^{\omega_0\,i\,t} + e^{-\omega_0\,i\,t})\,e^{-a\,|t|}$$

und benutzen die Fouriertransformierte:

$$\mathcal{F}\left(e^{-a\,|t|}\right)(\omega) = \frac{1}{\pi}\,\frac{a}{a^2+\omega^2}\,.$$

Verschiebung im Frequenzbereich ergibt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}\left(\cos(\omega_0\,t)\,e^{-a\,|t|}\right)(\omega) \\ = \quad & \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2} + \frac{a}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}\right)\,. \end{aligned}$$

2b) Es gilt:

$$\mathcal{F}\left(T_{e^{\omega_0\,t\,i}}\right) = (T_\delta)_{\omega_0}$$

bzw. in anderer Schreibweise:

$$\mathcal{F}\left(e^{\omega_0\,t\,i}\right)(\omega) = \delta(\omega-\omega_0)\,.$$

Die Eulerschen Formeln

$$\cos(\omega_0\,t) = \frac{1}{2}\,\left(e^{\omega_0\,t\,i} + e^{-\omega_0\,t\,i}\right)$$

liefern nun:

$$\mathcal{F}(T_{\cos(\omega_0\,t)})(\omega) = \frac{1}{2}\,(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))\,.$$

3.) Es gilt:

$$\mathcal{Z}(f_n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-2\,k} = \sum_{k=0}^{\infty}(z^{-2})^k = \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2-1}\,, \quad |z|>1\,.$$

Nach dem Differenziationssatz folgt:

$$\mathcal{Z}(g_n)(z) = -z\,\frac{d}{dz}\mathcal{Z}(f_n)(z) = -z\,\frac{2\,z\,(z^2-1)-z^2\,2\,z}{(z^2-1)^2} = -2\,\frac{z^2}{(z^2-1)^2}\,, \quad |z|>1\,.$$