KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie

29.1.1999

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 11 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Man berechne die Fourierkoef£zienten der Funktion:

$$f(t) = \sin(at)\,, \quad -\pi < t \leq \pi\,.$$

   Dabei soll a keine ganze Zahl sein.
   (4P)

2. Gegeben sei die 2π-periodische Sägezahnfunktion

$$f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t)\,, \quad 0 < t < 2\pi\,, \quad f(0) = 0\,.$$

   Man berechne die n-te Teilsumme $S_f(t,n)$ der Fourierreihe von f. Man beschreibe $S_f(t,n)$ durch ein Faltungsintegral. An welchen Stellen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} S_f(t,n) = f(t)?$$

   (6P)

3. Gegeben sei die Sägezahnfunktion aus Aufgabe 2. und die Stützstellen:

$$t_k = k\,\frac{2\,\pi}{4}\,, \quad k = 0,1,2,3\,.$$

   Man berechne den Spaltenvektor $\vec{f}$ der Stützwerte (Abtastwerte) und die diskrete Fouriertransformierte von $\vec{f}$.

   Außerdem berechne man die diskrete Fouriertransformierte durch das Verfahren der schnellen Fouriertransformation.
   (6P)

4. Man zeige:

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,.$$

   Dabei benutze man die Regel:

$$\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}(f(t))(\omega) = -i\,\mathcal{F}(t\,f(t))(\omega)$$

   und das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}\,.$$

   (6P)

Lösungen

1.) Es handelt sich um eine ungerade Funktion, die in eine Sinus-Reihe entwickelt wird. Wir bekommen wir mit $\omega = 1$:

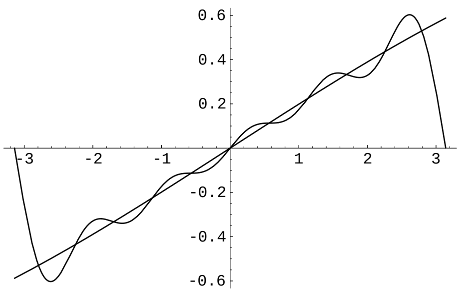
$$f(t) \sim \sum_{j=1}^{\infty} b_j \, \sin(j\,t)\,,$$

wobei

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(a\,t)\, \sin(j\,t)\, dt\,.$$

Ausrechnen von b_j ergibt:

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos((a-j)\,t) - \cos((a+j)\,t)\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((a-j)\,t)}{a-j} - \frac{\sin((a+j)\,t)}{a+j} \right)\Bigg|_{t=0}^{t=\pi} \\ &= (-1)^j \, \frac{2\,j}{\pi} \, \frac{\sin(a\,\pi)}{a^2 - j^2}\,. \end{aligned}$$



Die Funktion $\sin\left(\dfrac{t}{5}\right)$ und die Teilsumme ihrer Fourierreihe für $n = 5$ gezeichnet im Intervall $[-\pi, \pi]$

2.) Durch direkte Fortsetzung der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - t) & , \quad 0 < t < 2\pi \\ 0 & , \quad t = 0 \end{cases}$$

entsteht die Sägezahnfunktion. Sie stellt eine stückweise glatte, ungerade Funktion der Periode 2π dar. Wir ermitteln ihre Fourierkoef£zienten:

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, \sin(j\,t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t)\, \sin(j\,t)\, dt$$

mit der Stammfunktion:

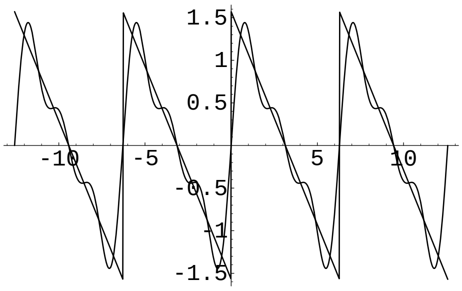
$$\int (\pi - t)\ \sin(j\,t)\,dt$$
$$= \frac{1}{j}\,t\ \cos(j\,t) - \frac{1}{j}\,\pi\ \cos(j\,t) - \frac{1}{j^2}\ \sin(j\,t)$$

zu:

$$b_j = \frac{1}{j}\,.$$

Die n-te teilsumme der Fourierreihe lautet damit:

$$S_f(t,n) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j}\ \sin(j\,t)\,.$$



Die Sägezahn-Funktion $f(t)$ mit der dritten Teilsumme der Fourierreihe $S_f(t,3)$ gezeichnet im Intervall $[-4\pi, 4\pi]$

Die n-ten Teilsummen der Fourierreihe einer stückweise stetigen Funktion kann man als periodische Faltung der Funktion mit Dirichlet-Kernen auffassen:

$$\begin{aligned} S_f(t,n) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\tau)\right)}{2\ \sin\left(\frac{1}{2}\,(\tau)\right)}\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - t + \tau)\ \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\tau)\right)}{2\ \sin\left(\frac{1}{2}\,(\tau)\right)}\,d\tau\,. \end{aligned}$$

Nach dem Darstellungssatz gilt für alle $T \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} S_f(t,n) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} = f(t)\,.$$

3.) Mit $t_k = k\,\frac{2\,\pi}{4}$, $k = 0,1,2,3$, ergeben sich die Stützstellen

$$t_0 = 0\,,\quad t_1 = \frac{\pi}{2}\,,\quad t_2 = \pi\,,\quad t_3 = \frac{3\,\pi}{2}\,,$$

und die Stützwerte:

$$\vec{f} = \left(0, \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{2}\left(\pi - \pi\right), \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(0, \frac{\pi}{4}, 0, -\frac{\pi}{4}\right) .$$

Nach De£nition der diskreten Fouriertransformation ($N = 4$) wird $\vec{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ auf $\vec{d} = (d_0, d_1, d_2, d_3)$ abgebildet mit

$$d_j = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f_k\, e^{-j\,k\,\frac{\pi}{2}\,i}, \quad j = 0, 1, 2, 3 .$$

Setzt man f_k ein, so ergibt dies:

$$d_j = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}\, e^{-j\,\frac{\pi}{2}\,i} - \frac{\pi}{4}\, e^{-j\,\frac{3\pi}{2}\,i}\right) = \frac{\pi}{16}\, e^{-j\,\frac{\pi}{2}\,i}\left(1 - e^{-j\,\pi\,i}\right) , j = 0, 1, 2, 3,$$

uns insgesamt

$$\vec{d} = \frac{\pi}{8}\,(0\,, -\,i\,, 0\,,\ i) .$$

Bei der schnellen Fouriertransformation wird der Vektor $\vec{f}$ in die Vektoren

$$\vec{f_g} = (0, 0) \quad \text{und} \quad \vec{f_u} = \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$$

zerlegt. Die Vektoren $\vec{f_g}$ und $\vec{f_u}$ werden nun der Fouriertransformation unterworfen $N = 2$:

$$d_{g,j} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} f_{g,k}\, e^{-j\,k\,\pi\,i} = \frac{1}{2}\left(0 \cdot e^0 + 0 \cdot e^{-j\,\pi\,i}\right) , \quad j = 0, 1 ,$$

und

$$d_{u,j} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} f_{u,k}\, e^{-j\,k\,\pi\,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\, e^0 - \frac{\pi}{4}\, e^{-j\,\pi\,i}\right) , \quad j = 0, 1 ,$$

also,

$$\vec{d_g} = (0, 0) , \quad \vec{d_u} = \left(0, \frac{\pi}{4}\right) .$$

Insgesamt bekommen wir damit die diskrete Fouriertransformierte $\vec{d}$:

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \frac{1}{2}\,\big((d_{g,0} + e^{0}\, d_{u,0}\big) = 0\,,\\
d_1 &= \frac{1}{2}\,\big((d_{g,1} + e^{-\frac{\pi}{2}\,i}\, d_{u,1}\big) = -\frac{\pi}{8}\,i\,,\\
d_2 &= \frac{1}{2}\,\big((d_{g,0} - e^{0}\, d_{u,0}\big) = 0\,,\\
d_3 &= \frac{1}{2}\,\big((d_{g,1} - e^{-\frac{\pi}{2}\,i}\, d_{u,1}\big) = -\frac{\pi}{8}\,i\,.
\end{aligned}
$$

4.) Zunächst gilt:

$$
\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\omega\, i\, t}\, dt\,, \quad f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\,.
$$

Mit der Regel über die Differentiation im Frequenzbereich bei Fouriertransformierten und partieller Integration ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\,\omega}\mathcal{F}(f(t))(\omega) &= -i\,\mathcal{F}(t\, f(t))(\omega)\\
&= -\frac{i}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, e^{-\omega\, i\, t}\, dt\\
&= \frac{i}{2\,\pi}\,\Big(e^{-\frac{t^2}{2}}\, e^{-\omega\, i\, t}\Big)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\omega}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, e^{-\omega\, i\, t}\, dt\\
&= -\frac{\omega}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, e^{-\omega\, i\, t}\, dt\\
&= -\omega\,\mathcal{F}(f(t))(\omega)\,.
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$
\frac{d}{d\,\omega}\mathcal{F}(f(t))(\omega) = -\omega\,\mathcal{F}(f(t))(\omega)
$$

lässt folgende Gestalt der Fouriertransformierten zu:

$$
\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(0)\, e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,.
$$

Die konstante $\mathcal{F}(f(t))(0)$ kann schließlich bestimmt werden:

$$\mathcal{F}(f(t))(0) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{2\,\pi}\, \sqrt{2\,\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,.$$