KLAUSUR

Mathematik I/II für Elektrotechniker

10.9.2001

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 16 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

1. Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale, indem man $x = t^2$ substituiert:
$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx\,, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx\,.$$
(4P)

2. Man bestimme die Extremalstellen der Funktion:
$$f(x) = \int_1^2 \frac{\cos(x\,t)}{t}\,dt\,, \qquad 1 \le x \le 2\,.$$
(6P)

3. Gegeben sei die $n \times n$-Matrix $A = (a_{j,k})_{j,k=1,\ldots,n}$ mit
$$a_{j,k} = \begin{cases} 1 & , \quad k = j\,, \quad j = 1,\ldots,n\,, \\ -(j-1) & , \quad k = j-1\,, \quad j = 2,\ldots,n\,, \\ j & , \quad k = j+1\,, \quad j = 1,\ldots,n-1\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$$
Indem man durch Zeilenumformungen eine obere Dreiecksmatrix herstellt, berechne man die Determinante von A im Fall $n = 4$. Welche Vermutung ergibt sich für die Determinante von A im allgemeinen Fall?
(4P)

4. Man löse das folgende Gleichungssystem:
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\,.$$
Dabei sind $a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$ beliebig.
(4P)

5. Man berechne das folgende Integral mit Hilfe von Polarkoordinaten:
$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\int_{\sqrt{1-x_1^2}}^{x_1} \frac{1}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^3}\,dx_2 \right) dx_1\,.$$
(8P)

6. Sei $F(x_1, x_2)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) \neq 0 \qquad \text{für alle} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

Sei $f(t)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit

$$F(t, f(t)) = 0 \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R} .$$

Man zeige:

$$f''(t) = \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, f(t))\right)^3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial x_1}(t, f(t)) & \frac{\partial F}{\partial x_2}(t, f(t)) \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(t, f(t)) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(t, f(t)) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(t, f(t)) \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(t, f(t)) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(t, f(t)) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(t, f(t)) \end{vmatrix} .$$

(8P)

Lösungen

1.) Wir führen die Substitution $x = \phi(t) = t^2$ aus und bekommen:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,2\,t\,dt = -\,2\,e^{-t}\Big|_0^\infty = 2\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{t\,(1+t^2)}\,2\,t\,dt = 2\,\arctan(t)\big|_0^\infty = \pi\,.$$

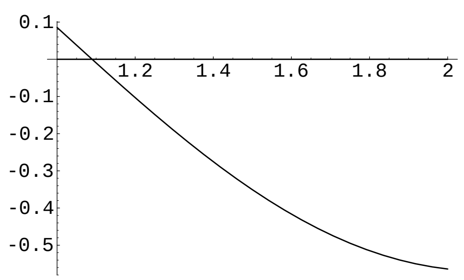
2.) Differenziation nach dem Parameter ergibt:

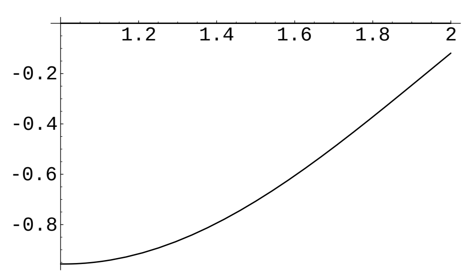
$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_1^2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos(x\,t)}{t}\,dt = -\int_1^2 \frac{\sin(x\,t)\,t}{t}\,dt = -\int_1^2 \sin(x\,t)\,dt \\ &= \left.\frac{\cos(x\,t)}{x}\right|_{t=1}^{t=2} = \frac{1}{x}\left(\cos(2\,x) - \cos(x)\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(2\,(\cos(x))^2 - \cos(x) - 1\right). \end{aligned}$$

Die Funktion $h(y) = 2\,y^2 - y - 1$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel dar, die bei $y = -\frac{1}{2}$ und $y = 1$ Nullstellen besitzt. Die Cosinusfunktion fällt im Intervall $[1,2]$ streng monoton. Für $1 \leq x \leq 2$ gilt:

$$1 = \cos(0) > \cos(1) \geq \cos(x) \geq \cos(2) > \cos\left(\frac{2}{3}\,\pi\right) = -\frac{1}{2}\,.$$

Das heißt, die Funktion f ist streng monoton fallend im Intervall $[1,2]$ und besitzt somit ein Maximum bei $x = 1$ und ein Minimum bei $x = 2$.





Die Funktion $f(x)$ (links) und ihre Ableitung (rechts) im Intervall $[1, 2]$

3.) Die Matrix lautet im Fall $n = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die folgenden Zeilenumformungen lassen die Determinante unverändert:

A				
1	1	0	0	
-1	1	2	0	
0	-2	1	3	
0	0	-3	1	
1	1	0	0	
0	2	2	0	$\vec{z}_2 + \vec{z}_1$
0	-2	1	3	
0	0	-3	1	
1	1	0	0	
0	2	2	0	
0	0	3	3	$\vec{z}_3 - \vec{z}_2$
0	0	-3	1	
1	1	0	0	
0	2	2	0	
0	0	3	3	
0	0	0	4	$\vec{z}_4 - \vec{z}_3$

Es gilt im allgemeinen Fall: $\det(A) = n!$. (Beweis: Vollständige Induktion).

4.) Sei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\det(A) = -a^2\, i\,.$$

Im Fall $a \neq 0$ ist das System für alle rechten Seiten eindeutig lösbar. Der Gauß-sche Algorithmus oder die Cramersche Regel ergeben die Lösung:

$$x_1 = \frac{1}{a}\,(b_2 + b_3\, i)\,, \quad x_2 = \frac{1}{a^2}\,(a\, b_1 - b_2 - b_3\, i)\,, \quad x_3 = -i\, b_3\,.$$

Im Fall $a = 0$ lautet die Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

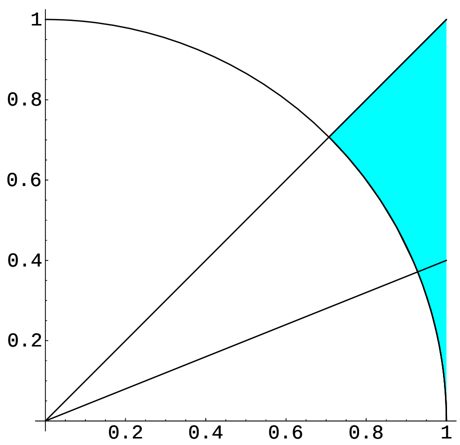
Das System ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$b_3 = i\, b_2\,.$$

Mit beliebigem λ lautet die Lösung hier:

$$x_1 = b_1\,, \quad x_2 = \lambda\,, \quad x_3 = b_2\,.$$

5.) Man kann den Integrationsbereich wie folgt skizzieren:



Der Integrationsbereich (dunkel)

In Polarkoordinaten:

$$x_1 = r\, \cos(\phi)\,, \quad x_2 = r\, \sin(\phi)\,,$$

wird der Integrationsbereich beschrieben durch:

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}\,, \quad 1 \le r \le \frac{1}{\cos(\phi)}\,.$$

Wir berechnen das Integral:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\int\limits_{\sqrt{1-x_1^2}}^{x_1} \frac{1}{\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^3}\,dx_2 \right) dx_1 &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int\limits_1^{\frac{1}{\cos(\phi)}} \frac{1}{r^3}\,r\,dr \right) d\phi \\
&= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{r}\bigg|_{r=1}^{r=\frac{1}{\cos(\phi)}} d\phi \\
&= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(\phi)-1)\,d\phi \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Man kann das Integral auch ohne Polakoordinaten direkt mithilfe der Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^3}\,dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin(x)\,,$$

berechnen:

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\int\limits_{\sqrt{1-x_1^2}}^{x_1} \frac{1}{\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^3}\, dx_2 \right) dx_1 = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{x_2}{x_1^2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\Bigg|_{\sqrt{1-x_1^2}}^{x_1} dx_1$$
$$= \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\,x_1^2} - \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{x_1^2} \right) dx_1$$
$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}\,x_1} + \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{x_1} + \arcsin(x_1) \right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

6.) Mit der Kettenregel ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(t,f(t)) + f'(t)\,\frac{\partial F}{\partial x_2}(t,f(t)) = 0$$

bzw.:

$$f'(t) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(t,f(t))}{\frac{\partial F}{\partial x_2}(t,f(t))}\,.$$

Differenzieren der ersten Gleichung nach t liefert:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(t,f(t)) + 2\,f'(t)\,\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(t,f(t)) + (f'(t))^2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(t,f(t)) + f''(t)\,\frac{\partial F}{\partial x_2}(t,f(t)) = 0\,.$$

Hieraus folgt:

$$
\begin{aligned}
& f''(t) \\
&= \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - 2\, f'(t)\, \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - (f'(t))^2\, \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \right) \\
&= \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2\, \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_2}}\, \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2}\, \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^3} \left(-\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2\, \frac{\partial F}{\partial x_1}\, \frac{\partial F}{\partial x_2}\, \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} .
\end{aligned}
$$

Das Argument $(t, f(t))$ wurde auf der rechten Seite weggelassen.