KLAUSUR

Mathematik I/II für Elektrotechniker

12.3.2002

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 16 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

1. Man berechne jeweils eine Stammfunktion durch partielle Integration bzw. Substitution:

$$\int \arctan(x)\,dx\,, \qquad \int \frac{(\ln(x))^2}{x}\,dx\,, \quad x>0\,.$$

(6P)

2. Man berechne folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\,, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\,.$$

(4P)

3. Die Funktionen $a_{jk}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $j,k=1,2,3$, seien differenzierbar. Man zeige:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ \frac{d}{dx}a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ \frac{d}{dx}a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \frac{d}{dx}a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & \frac{d}{dx}a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & \frac{d}{dx}a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \frac{d}{dx}a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \frac{d}{dx}a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & \frac{d}{dx}a_{33}(x) \end{vmatrix}$$

(6P)

4. Welches Bild erhält man für das Rechteck: $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $0\le x_1\le 1$, $0\le x_2\le 2$ unter der Abbildung

$$f(\vec{x})=\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{a})\,\vec{b}$$

mit $\vec{a}=(2,3)$ und $\vec{b}=(-1,2)$? Kann die Abbildung invertiert werden? **(6P)**

5. Welche Extremalstellen besitzt die Funktion:

$$f(x_1, x_2) = 4 - (2\,x_1 + x_2 - 1)^2 - 2\,(x_1 - x_2 - 2)^2?$$

   Welche Gestalt haben die Höhenlinien?
   (6P)

6. Man bestimme das Volumen, das von der Fläche

$$f(x_1, x_2) = h\,\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}\right)$$

   und der $x_1 - x_2$-Ebene im Raum eingeschlossen wird.
   (Dabei gelte $a, b, h > 0$).
   (6P)

Lösungen

1.) Partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,dx &= x\,\arctan(x) - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= x\,\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2\,x}{1+x^2}\,dx \\ &= x\,\arctan(x) - \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2) + c\,.\end{aligned}$$

Man schreibt das Integral wie folgt:

$$\int \frac{(\ln(x))^2}{x}\,dx = \int (\ln(x))^2\,\frac{d}{dx}\ln(x)\,dx$$

und bekommt sofort

$$\int \frac{(\ln(x))^2}{x}\,dx = \left(\int t^2\,dt\right)_{t=\ln(x)} = \left(\frac{t^3}{3}+c\right)_{t=\ln(x)} = \frac{(\ln(x))^3}{3}+c\,.$$

Man kann auch die Substitution $x=\phi(t)=e^t$ ($t=\ln(x)$) durchführen:

$$\int \frac{(\ln(x))^2}{x}\,dx = \left(\int \frac{t^2}{e^t}\,e^t\,dt\right)_{t=\ln(x)} = \frac{(\ln(x))^3}{3}+c\,.$$

2.) Nach der Regel von de l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x} = 1$$

und

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(x)}\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln(x)} = 0\,.$$

3.) Werden die sechs Permutationen der Zahlen $\{1,2,3\}$ zur Menge S_3 zusammengefasst, so gilt für die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} = \sum_{\Pi\in S_3} \operatorname{sgn}(\Pi)\; a_{\Pi(1),1}\,a_{\Pi(2),2}\,a_{\Pi(3),3}\,.$$

Differenziert man nun, so folgt:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} = \sum_{\Pi\in S_3} \mathrm{sgn}(\Pi)\,\frac{d}{dx}\left(a_{\Pi(1),1}\right)\, a_{\Pi(2),2}\, a_{\Pi(3),3}$$
$$+\sum_{\Pi\in S_3} \mathrm{sgn}(\Pi)\, a_{\Pi(1),1}\,\frac{d}{dx}\left(a_{\Pi(2),2}\right)\, a_{\Pi(3),3}$$
$$+\sum_{\Pi\in S_3} \mathrm{sgn}(\Pi)\, a_{\Pi(1),1}\, a_{\Pi(2),2}\,\frac{d}{dx}\left(a_{\Pi(3),3}\right)$$
$$.$$

4.) Es gilt:

$$\vec{x}\cdot\vec{a} = 2\,x_1 + 3\,x_2$$

und

$$(\vec{x}\cdot\vec{a})\,\vec{b} = (-2\,x_1 - 3\,x_2, 4\,x_1 + 6\,x_2)\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\vec{x} + (\vec{x}\cdot\vec{a})\,\vec{b} = (-x_1 - 3\,x_2, 4\,x_1 + 7\,x_2)\,.$$

Wir können die Abbildung f wie folgt schreiben:

$$f(\vec{x})^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\,\vec{x}^T$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,.$$

Beschreiben wir das gegebene Rechteck als:

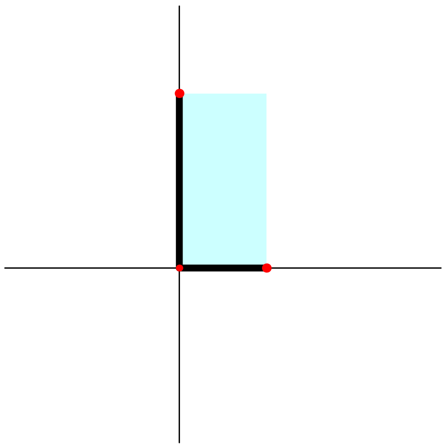
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\,,\quad 0\le x_1\le 1\,, 0\le x_2\le 1\,,$$

so ergibt sich das Bild:

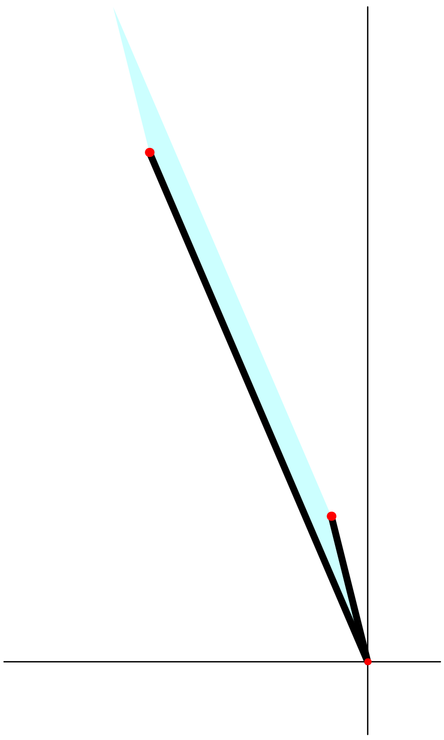
$$x_1\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\,,\quad 0\le x_1\le 1\,, 0\le x_2\le 1\,,$$

bzw.

$$x_1\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix}\,,\quad 0\le x_1\le 1\,, 0\le x_2\le 1\,.$$



Das von den Vektoren $(1,0)$ und $(0,2)$ aufgespannte Rechteck



Das von den Vektoren $(-1,4)$ und $(-6,14)$ aufgespannte Parallelogramm

Die Determinante der Abbildungsmatrix ergibt sich zu:

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 5\,,$$

und damit ist die Abbildung invertierbar. Die inverse Abbildung erhält man aus:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

5.) Wir berechnen zunächst die ersten Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -4\,(2\,x_1 + x_2 - 1) - 4\,(x_1 - x_2 - 2) = -12\,x_1 + 12\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2\,(2\,x_1 + x_2 - 1) + 4\,(x_1 - x_2 - 2) = -6\,x_2 - 6\,.$$

Damit kommt nur der Punkt $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ als Extremalstelle infrage. Die zweiten partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = -12\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = -6\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,x_2}(x_1, x_2) = 0\,.$$

Es gilt also im Punkt $(1, -1)$:

$$d = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)\,\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,x_2}(x_1, x_2)\right)^2 > 0$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) < 0\,.$$

Das heißt, es liegt ein Maximum vor.
Die Gleichung $f(x_1, x_2) = c$ ergibt:

$$-6\,x_1^2 + 12\,x_1 - 3\,x_2^2 - 6\,x_2 - 5 = c$$

bzw.

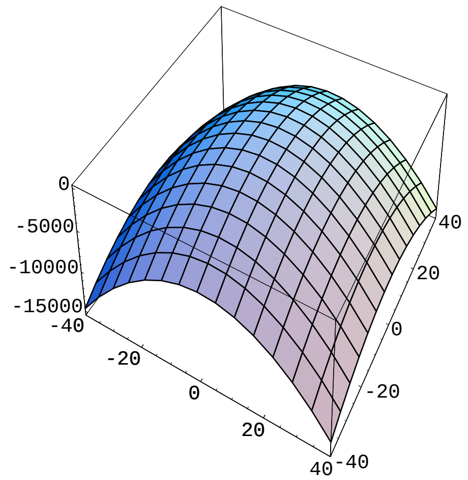
$$2\,x_1^2 - 4\,x_1 + x_2^2 + 2\,x_2 = \frac{c+5}{2}\,,$$

also

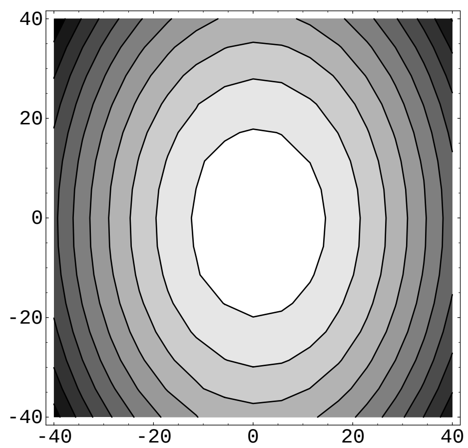
$$2\,(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 = 5 + \frac{c+5}{2} = C\,.$$

Für $C > 0$ ergeben sich Ellipsen:

$$\frac{(x_1 - 2)^2}{\left(\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{(x_2 + 1)^2}{\left(\sqrt{C}\right)^2} = 1\,.$$



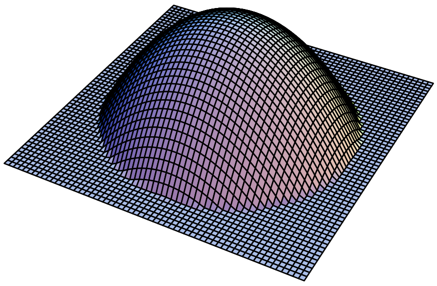
Die Funktion $f(x_1, x_2) = 4 - (2\,x_1 + x_2 - 1)^2 - 2\,(x_1 - x_2 - 2)^2$



Höhenlinien der Funktion $f(x_1, x_2) = 4 - (2\,x_1 + x_2 - 1)^2 - 2\,(x_1 - x_2 - 2)^2$

6.) Für das Volumen V gilt:

$$V = \int\limits_G \left(\int\limits_0^{f(x_1,x_2)} dx_3 \right) dx_1 dx_2 = \int\limits_G f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2\,.$$



Das von der Fläche
$(x_1, x_2) = h \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}\right)$
und der $x_1 - x_2$-Ebene
im Raum eingeschlossene
Volumen

Die ellipsenförmige Grundfläche kann als Bild des Intervalls

$$I = \{(r, \phi) \,|\, 0 < r \leq 1 \,,\, 0 \leq \phi \leq 2\,\pi\}$$

unter Abbildung

$$g(r, \phi) = (a\,r\,\cos(\phi)\,, b\,r\,\sin(\phi))$$

aufgefasst werden. Die Funktionaldeterminante von g lautet:

$$\frac{dg}{d(r,\phi)}(r, \phi) = \begin{vmatrix} a\,\cos(\phi) & -a\,r\,\sin(\phi) \\ b\,\sin(\phi) & b\,r\,\cos(\phi) \end{vmatrix} = a\,b\,r\,.$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 h\,(1 - r^2)\,a\,b\,r\,dr\,d\phi \\ &= h\,a\,b \int_0^{2\pi} \left(r - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\phi \\ &= h\,a\,b\,\frac{4\,\pi}{3}\,. \end{aligned}$$