KLAUSUR

Mathematik I/II für Elektrotechniker

11.9.2003

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 30 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

1. (a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (1, -2, 3)$ und $\vec{b} = (-1, 1, -2)$ und der Punkt $P_0 = (2, -1, 3)$. Wie lautet die Gleichung der Ebene E, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird und durch den Punkt P_0 geht? Man gebe einen Normalenvektor der Ebene E an.
   (4P)
   (b) Vom Punkt $P_1 = \left(\frac{11}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{19}{6}\right)$ wird das Lot (Gerade durch P_1 senkrecht zur Ebene) auf die Ebene E gefällt. Man berechne den Schnittpunkt S des Lots mit der Ebene E.
   (2P)
   (c) Die Punkte mit den Ortsvektoren $\vec{OP_0}$, $\vec{OP_0} + \vec{a}$, $\vec{OP_0} + \vec{b}$ werden als Eckpunkte eines Dreiecks D im Raum aufgefasst. Liegt der Schnittpunkt S im Dreieck D?
   (2P)

2. (a) Durch Zeilenumformungen berechne man die Inverse der Matrix:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (Man stelle zuerst eine untere Dreiecksmatrix her.)
   Zusatzfrage: Wie lautet die Determinante von P?
   (4P)
   (b) Man berechne die Eigenwerte der Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
   indem man $A - \lambda\, E$ durch Zeilenoperationen in eine obere Dreiecksmatrix überführt.
   Zusatzfrage: Welche Vermutung ergibt sich für die Eigenwerte der $n \times n$-Matrix $(n > 4)$ $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ mit $a_{j,k} = 1$ für $j \neq k$ und $a_{j,k} = -1$ für $j = k$?
   (8P)

3. (a) Mit $c > 0$ wird für $n \geq 1$ die Folge a_n erklärt durch:
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k\, c} = \frac{n}{n^2 + 1 \cdot c} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\, c}.$$

Man begründe die Ungleichungen

$$n \frac{n}{n^2 + n\,c} \leq a_n \leq n \frac{n}{n^2 + c}$$

und berechne den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
(6P)
(b) Durch die Rekursionsgleichung: $b_{n+1} = \dfrac{3}{4 - b_n}$
mit dem Startelement $b_1 = 2$ wird eine Folge erklärt. Man berechne die ersten vier Glieder der Folge.
Man zeige durch vollständige Induktion für $n \geq 1$: $1 < b_{n+1} < b_n$.
Aus der Rekursionsgleichung berechne man den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Zusatzfrage: Wie lauten die Folgenglieder, wenn man die Rekursion mit dem Startelement $b_1 = 1$ beginnt?
(6P)

4. (a) Man berechne mithilfe partieller Integration ($u'(x) = 1$) die Stammfunktion:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx\,.$$

Dabei benutze man die Stammfunktion $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \text{arsinh}(x) + C$ und finde zunächst eine Gleichung für die gesuchte Stammfunktion. (arsinh(x) ist die Umkehrfunktion von $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$).
(4P)
(b) Man gebe die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ um $x_0 = 0$ an. Hinweis:

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu\,, |x| < 1\,,$$

$$\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha\,(\alpha - 1)\,\cdots\,(\alpha - \nu + 1)}{\nu!}\,, \binom{\alpha}{0} = 1\,.$$

(2P)
(c) Man berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sinh(x^2)}\,.$$

(2P)

5. (a) Man bestimme die Extremalstellen der Funktion:

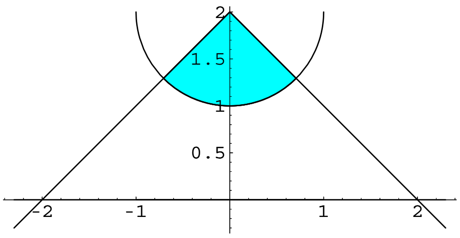
$$f(x_1, x_2) = x_1^2\, x_2^2 - x_1^2 - x_2^2\,.$$

(4P)
(b) Welche Punkte kommen als Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $x_1^2 + x_2^2 = 1$ infrage?
(4P)
(c) Wie lautet das Taylorpolynom vom Grad 3,4 bzw. 5 um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$?
(2P)

6. Durch die Gleichungen

$$x_3 = 2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{bzw.} \quad x_3 = 2 - \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

wird die Oberfläche eines Kegels bzw. einer Halbkugel gegeben. Von den beiden Oberflächen wird ein Körper K eingeschlossen. Man berechne das Volumen von K mithilfe von Zylinderkoordinaten. (Betrag der Funktionaldeterminante der Zylinderkoordinatenabbildung ist gleich r).
Zusatzfrage: Wie berechnet man das Integral $\int\limits_K (x_1^2 + x_2^2)\, d(x_1, x_2, x_3)$?
(Nur die Umformung mit Zylinderkoordinaten soll angegeben werden. Das Integal muss nicht ausgerechnet werden.)
(10P)



Kegel- und Halbkugel in der Projektion in die $x_1 - x_3$-Ebene mit der Projektion von K (dunkel).

Lösungen

1.a) Sei $\vec{r} = (x, y, z)$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Ebene E. Dann gilt:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\,\vec{a} + t\,\vec{b}\,, \quad \vec{r}_0 = (2, -1, 3)\,.$$

Einen Normalenvektor bekommt man durch:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (1, -1, -1)\,.$$

Damit erhält man auch die parameterfreie Form:

$$\vec{n}\,(\vec{r} - (2, -1, 3)) = x - y - z = 0\,.$$

1.b) Die Lotgerade hat die Form:

$$\vec{r}_1 + \sigma\,\vec{n}\,, \quad \vec{r}_1 = \left(\frac{11}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{19}{6}\right)\,.$$

Man kann sehen, dass gilt:

$$\frac{11}{6} + \frac{4}{3} - \frac{19}{6} = 0\,.$$

Der Punkt liegt auf der Ebene und stellt den Schnittpunkt dar.
Schneiden der Gerade mit der Ebene ergibt:

$$\vec{r}_1 + \sigma\,\vec{n} = \vec{r}_0 + s\,\vec{a} + t\,\vec{b}\,.$$

Wir multplizieren skalar mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = s\,\vec{a}\,\vec{a} + t\,\vec{a}\,\vec{b}\,, \quad \vec{b}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = s\,\vec{a}\,\vec{b} + t\,\vec{b}\,\vec{b}\,,$$

bzw.

$$1 = 14\,s - 9\,t\,, \quad -\frac{1}{2} = -9\,s + 6\,t\,.$$

Die Lösung lautet:

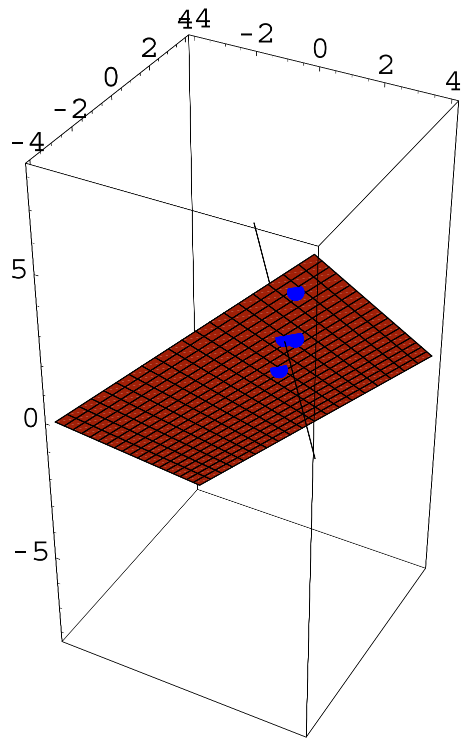
$$s = \frac{1}{2}\,, \quad t = \frac{2}{3}\,.$$

Der Fußpunkt des Lots ist $\left(\frac{11}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{19}{6}\right) = P_1$. Mit dieser Lösung kann die Aufgabe (c) sofort gelöst werden.

1.c) Punkte im Dreieck haben Ortsvektoren:

$$\vec{r}_0 + s\,\vec{a} + t\,\vec{b}\,, \quad 0 \leq s, t \leq 1\,, s + t \leq 1\,.$$

Dies ist für den Schnittpunkt nicht erfüllt: $s + t = \frac{7}{6}$.



Ebene E, Eckpunkte des Dreiecks und Lotgerade

2.a) Wir gehen aus von der Matrix P und formen gleichzeitig die Einheitsmatrix um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{z}_1 \rightsquigarrow \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{z}_1 \rightsquigarrow \frac{1}{4}\,\vec{z}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{z}_2 \rightsquigarrow \vec{z}_2 - \vec{z}_1$, $\vec{z}_3 \rightsquigarrow \vec{z}_3 - \vec{z}_1$, $\vec{z}_4 \rightsquigarrow \vec{z}_4 - \vec{z}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

$\vec{z}_2 \rightsquigarrow -\vec{z}_2$, $\vec{z}_3 \rightsquigarrow -\vec{z}_3$, $\vec{z}_4 \rightsquigarrow -\vec{z}_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Also:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Nach der ersten Umformung haben wir eine untere Dreiecksgestalt: $\det(P) = -4$. Oder: Da nur einmal eine Zeile mit $\frac{1}{4}$ multipliziert wurde und drei Zeilen mit -1 gilt $\det(P) = -4$.

2.b) Wir gehen aus von:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

$\vec{z}_1 \rightsquigarrow \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $\lambda = 2$ ein Eigenwert. Für $\lambda \neq 2$ formen wir weiter um:
$\vec{z}_2 \rightsquigarrow \vec{z}_2 - \frac{1}{2-\lambda}\vec{z}_1$, $\vec{z}_3 \rightsquigarrow \vec{z}_3 - \frac{1}{2-\lambda}\vec{z}_1$, $\vec{z}_4 \rightsquigarrow \vec{z}_4 - \frac{1}{2-\lambda}\vec{z}_1$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Also: $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\,(-2-\lambda)^3$. Eigenwerte sind: $\lambda = 2$ und $\lambda = -2$ (dreifach).
Zusatzfrage: Mit den selben Umformungen wie in 2.b) erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} (n-2-\lambda) & (n-2-\lambda) & (n-2-\lambda) & (n-2-\lambda) & \cdots \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} .$$

Also: $\chi_A(\lambda) = (n-2-\lambda)\,(-2-\lambda)^{n-1}$. Eigenwerte sind: $\lambda = n-2$ und $\lambda = -2$ ($n-1$ -fach).

3.a) Die Summe

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k\,c}\,, \qquad c > 0\,,$$

besteht aus n Summanden. Der kleinste Summand ist $\frac{n}{n^2+n\,c}$. Der größte Summand ist $\frac{n}{n^2+c}$. Also gilt:

$$n\,\frac{n}{n^2+n\,c} \le a_n \le n\,\frac{n}{n^2+c}$$

bzw.

$$\frac{1}{1+\frac{c}{n}} \le a_n \le \frac{1}{1+\frac{c}{n^2}}\,.$$

Hieraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

3.b) Man berechnet die ersten vier Elemente der Folge:

$$b_1 = 2\,, b_2 = \frac{3}{2}\,, b_3 = \frac{6}{5}\,, b_4 = \frac{15}{14}\,.$$

Es gilt also für $n = 1$:

$$1 < b_2 = \frac{3}{2} < b_1 = 2\,.$$

Annahme:

$$1 < b_{n+1} < b_n\,.$$

Hieraus folgt:

$$-3 < -4 + b_{n+1} < -4 + b_n$$

und

$$1 > \frac{4-b_{n+1}}{3} > \frac{4-b_n}{3}\,.$$

Dies ist gleichbedeutend mit:

$$1 > \frac{1}{b_{n+2}} > \frac{1}{b_{n+1}} \,.$$

Wegen $b_{n+1} > 1$ ergibt sich insgesamt:

$$1 < b_{n+2} < b_{n+1} \,.$$

Aus der Rekursionsgleichung ergibt sich für den Grenzwert b die Bedingung:

$$b = \frac{3}{4-b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad b^2 - 4\,b + 3 = 0\,.$$

Dies lässt zwei Möglichkeiten zu: $b = 1$ oder $b = 3$. Also $b = 1$.
Startet man die Rekursion mit $b_1 = 1$, so berechnet man $b_2 = 1$ und damit $b_n = 1$ für alle $n \geq 1$.
4.a) Partielle Integration:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,.$$

Betrachte das Integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ &= \int \sqrt{1+x^2}\,dx - \operatorname{arsinh}(x)\,. \end{aligned}$$

Für das gesuchte Integral $I = \int \sqrt{1+x^2}\,dx$ haben wir nun die Gleichung:

$$I = x\sqrt{1+x^2} - I + \operatorname{arsinh}(x)\,,$$

also

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(x) + C\,.$$

4.b) Aus der angegebenen Entwicklung folgt:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} x^\nu\,, |x| < 1\,,$$

und damit:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} x^{2\nu}, |x| < 1.$$

4.c) Regel von de l'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sinh(x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right) x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right) \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

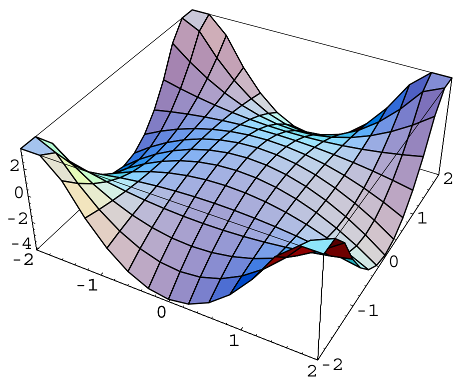
5.a) Wir berechnen den Gradienten und die Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned} grad f(x_1, x_2) &= (2\,x_1\,x_2^2 - 2\,x_1, 2\,x_1^2\,x_2 - 2\,x_2), \\ H(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 2\,x_2^2 - 2 & 4\,x_1\,x_2 \\ 4\,x_1\,x_2 & 2\,x_1^2 - 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Gradient verschwindet in folgenden Punkten:

$$(0,0), (-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1).$$

Im Nullpunkt gilt: $\det(H(0,0)) = 4$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) = -2$. Es liegt also ein Hochpunkt vor. In den anderen Punkten gilt $\det(H(x_1, x_2)) = -16$. Es liegen also Sattelpunkte vor.



Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2\,x_2^2 - x_1^2 - x_2^2$

5.b) Wir betrachten das System:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 1, \\ 2\,x_1\,x_2^2 - 2\,x_1 + 2\,\lambda\,x_1 &= 0, \\ 2\,x_1^2\,x_2 - 2\,x_2 + 2\,\lambda\,x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen schreiben wir als:

$$\begin{aligned} x_1\,(x_2^2 - 1 + \lambda) &= 0\,, \\ x_2\,(x_1^2 - 1 + \lambda) &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Lösung $(x_1, x_2) = (0, 0)$ scheidet aus, da die erste Gleichung nicht erfüllt werden kann. Es bleiben noch folgende Möglichkeiten: (A) entweder $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ und (B) $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$. (A):

$$x_1 = 0\,, x_2 = \pm 1\,, \quad x_2 = 0\,, x_1 = \pm 1\,, \quad \lambda = 1\,.$$

(B): $x_2^2 - 1 + \lambda = x_1^2 - 1 + \lambda = 0$ bzw. $x_1^2 = x_2^2$. Mit der ersten Gleichung folgt:

$$x_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad x_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \lambda = \frac{1}{2}\,.$$

In beiden Fällen ergeben sich also jeweils vier Punkte.
Man kann auch auflösen:

$$x_2^2 = 1 - x_1^2\,, \quad -1 \leq x_1 \leq 1\,,$$

und einsetzen. Wir können die Einschränkung von f auf den Kreis (unterer wie oberer Halbkreis) beschreiben durch:

$$h(x_1) = x_1^2\,(1 - x_1^2) - x_1^2 - (1 - x_1^2) = -1 + x_1^2 - x_1^4\,.$$

Die Ableitung von h ergibt:

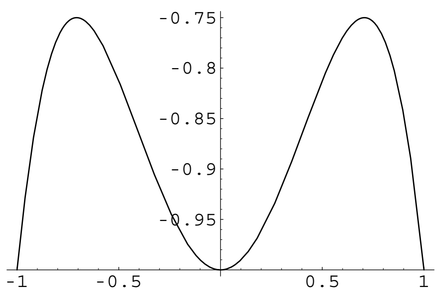
$$h'(x_1) = 2\,x_1 - 4\,x_1^3 = 2\,x_1\,(1 - 2\,x_1^2)\,.$$

Extremalstellen von h können nur in den Punkten

$$x_1 = 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

bzw. am Rand auftreten:

$$x_1 = \pm 1\,.$$



Die Funktion $h(x_1)$

5.c) Taylorpolynom vom Grad 3:

$$T_f((0,0),(x_1,x_2),3) = -x_1^2 - x_2^2\,,$$

Taylorpolynom vom Grad 4:

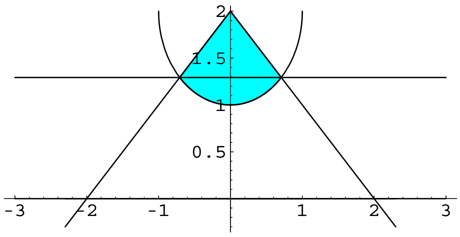
$$T_f((0,0),(x_1,x_2),4) = x_1^2\,x_2^2 - x_1^2 - x_2^2\,,$$

Taylorpolynom vom Grad 5:

$$T_f((0,0),(x_1,x_2),5) = x_1^2\,x_2^2 - x_1^2 - x_2^2\,.$$

6) Die Punkte auf dem Schnittkreis von Kegel und Kugel haben den Radius:

$$2 - r = 2 - \sqrt{1-r^2} \quad\Longrightarrow\quad r^2 = 1 - r^2 \quad\Longrightarrow\quad r = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$



Projektion von K in die $x_1 - x_3$-Ebene mit der Projektion der Schnittkreisebene.

Für Volumen des eingeschlossenen Körpers ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int\limits_K d(x_1,x_2,x_3) &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int\limits_{2-\sqrt{1-r^2}}^{2-r} r\,dx_3\,dr\,d\phi \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2 - r - 2 + \sqrt{1-r^2}\right) r\,dr\,d\phi \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{r^3}{3} - \frac{1}{3}\,(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\frac{\sqrt{2}}{2}} d\phi \\
&= 2\,\pi\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\,\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3}\,\pi\,\left(2-\sqrt{2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Für das Integral ergibt sich:

$$\int\limits_K (x_1^2 + x_2^2)\, d(x_1, x_2, x_3) \quad = \quad \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int\limits_{2-\sqrt{1-r^2}}^{2-r} r^3\, dx_3\, dr\, d\phi\,.$$

Berechnet man das Volumen mit der Formel für Rotationskörper (ebenfalls Anwendung von Zylinderkoodinaten), so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int\limits_K d(x_1, x_2, x_3) \quad &= \quad \pi \int\limits_{2-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} (2 - x_3)\, dx_3 + \pi \int\limits_{1}^{2-\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - (x_3 - 2)^2)\, dx_3 \\
&= \quad \frac{2}{3}\pi \left(2 - \sqrt{2}\right)\,.
\end{aligned}$$