KLAUSUR

Mathematik I für Mechatroniker

1.3.2005

(W. Strampp, AG Computational Mathematics)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben
und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!
Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Rechnungen an.

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 25 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. Sei $\alpha > 0$ eine reelle Zahl. Geben Sie die komplexe Zahl $z_0 = -\alpha + \alpha\, i$ in Polardarstellung an.

   Wie lauten die Lösungen der Gleichung

   $$z^2 + 2\, i\, z = 1 + z_0\,?$$

   Skizzieren Sie die Lösungen in der Gaußschen Ebene.

2. (a) Sei α eine beliebige reelle Zahl und

   $$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

   Bestimmen Sie das Spatprodukt der Zeilenvektoren von A. Für welche α sind die Zeilenvektoren linear unabhängig?

   (b) Sei β ebenfalls eine beliebige reelle Zahl. Entscheiden Sie mit dem Gaußschen Algorithmus, für welche α, β das System

   $$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

   nicht lösbar, eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar ist. (Die Lösungen müssen nicht angegeben werden)!

3. (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge:

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} - n\,.$$

   (b) Begründen Sie die Ungleichung

   $$2^n \leq 2^n + n \leq 2 \cdot 2^n\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

   und berechnen Sie den Grenzwert

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + n}\,.$$

   Hinweis: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

4. (a) Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion für:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}\,, \quad g(x) = \sin(\sqrt{x})\,.$$

Hinweis: Partielle Integration verwenden und im zweiten Fall erst $x = t^2$ substituieren.

(b) Existieren die uneigentlichen Integrale:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx\,, \quad \int_0^\infty g(x)\,dx\,?$$

Alle Rechenschritte angeben!

5. Geben Sie die Taylorreihen um $x_0 = 0$ folgender Funktionen an:

$$f(x) = \sqrt{7+x}\,, \quad g(x) = \sin(5\,x)\,.$$

Benutzen Sie die Taylorreihen:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k}\, x^k\,, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1}\,.$$

Berechnen Sie damit den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sqrt{7}}{g(x)}\,.$$

Geben Sie eine weitere Methode zur Berechnung des Grenzwerts an.

Lösungen

1) Die Zahl
$$z_0 = -\alpha + \alpha\, i\,, \quad \alpha > 0\,,$$
liegt im zweiten Quadranten der Gauß-Ebene:
$$|z_0| = \sqrt{2\,\alpha^2} = \sqrt{2}\,\alpha\,, \quad \arg(z_0) = \frac{3}{4}\,\pi\,, \quad z_0 = \sqrt{2}\,\alpha\, e^{\frac{3}{4}\,\pi\, i}\,.$$
$$z^2 + 2\,i\,z = 1 + z_0 \Longleftrightarrow z^2 + 2\,i\,z - 1 = z_0 \Longleftrightarrow (z+i)^2 = z_0 = \sqrt{2}\,\alpha\, e^{\frac{3}{4}\,\pi\, i}\,.$$
Also ergeben sich folgende Lösungen:
$$z_1 = -i + \sqrt[4]{2}\,\sqrt{\alpha}\, e^{\frac{3}{8}\,\pi\, i}\,, \quad z_2 = -i - \sqrt[4]{2}\,\sqrt{\alpha}\, e^{\frac{3}{8}\,\pi\, i}\,.$$

2)
$$\vec{z}_1 = (\alpha, 1, -1)\,, \quad \vec{z}_2 = (1, 1, 3)\,, \quad \vec{z}_3 = (1, 0, 1)\,.$$
$$\vec{z}_1 \times \vec{z}_2 = (4, -1 - 3\,\alpha, -1 + \alpha)\,, \quad (\vec{z}_1 \times \vec{z}_2) \cdot \vec{z}_3 = 3 + \alpha\,.$$
Für $\alpha = -3$ ergibt das Spatprodukt Null und die Vektoren sind linear abhängig.
Gauß-Algorithmus:
$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 - \alpha & -1 - 3\,\alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ -\alpha\,\beta \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 - \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$
$\alpha \neq -3$: eindeutig lösbar.
$\alpha = -3$ und $\beta \neq 0$ nicht lösbar.
$\alpha = -3$ und $\beta = 0$ mehrdeutig lösbar.

3) (a)

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n}-n &= \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2}\\ &= \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2}}\\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\,.\end{aligned}$$

Also

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n = \frac{1}{2}\,.$$

(b) Es gilt: $0 \leq n$ und $n \leq 2^n$ (Induktion) oder $(1+1)^n \geq 1+n, n \geq 1$ (Bernoulli).
Also:

$$2^n \leq 2^n + n \leq 2\cdot 2^n\,.$$

Hieraus folgt:

$$2 \leq \sqrt[n]{2^n+n} \leq \sqrt[n]{2}\,2\,.$$

Einschachtelungsprinzip und $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ liefert

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+n} = 2\,.$$

4)

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln(x)}{x^2}\,dx &= -\frac{1}{x}\,\ln(x) - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\,dx\\ &= -\frac{1}{x}\,\ln(x) + \int\frac{1}{x^2}\,dx\\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + c\,.\end{aligned}$$

$$\int\sin(\sqrt{x})\,dx = \int\sin(t)\,2\,t\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}}$$

$$\int\sin(t)\,t\,dt = -\cos(t)\,t - \int(-\cos(t))\,dt = -t\,\cos(t) + \sin(t) + c$$

Insgesamt:

$$\int\sin(\sqrt{x})\,dx = -2\,\sqrt{x}\,\cos(\sqrt{x}) + 2\,\sin(\sqrt{x}) + c\,.$$

$$\int_1^b \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(b)}{b} - \frac{1}{b} + 1\,.$$

Es gilt

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\ln(b)}{b} = 0\,,\ \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} = 0\,,$$

also

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = 1\,.$$

Das uneigentliche Integral existiert nicht. Die Stammfunktion $-2\sqrt{x}\,\cos(\sqrt{x}) + 2\,\sin(\sqrt{x})$ besitzt keinen Grenzwert für $x \to \infty$. Es gilt

$$\cos\left((2\,k+1)\,\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,\quad \sin\left((2\,k+1)\,\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k\,, k = 0,1,2...$$

Also für $b_k = \left((2\,k+1)\,\frac{\pi}{2}\right)^2$:

$$\int_0^{b_k} \sin(\sqrt{x})\,dx = 2\,(-1)^k\,.$$

5)

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^\infty \binom{\frac{1}{2}}{k}\,x^k\,,\quad \sin(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\,x^{2\,k+1}\,.$$

$$f(x) = \sqrt{x+7} = \sqrt{7}\,\sqrt{1+\frac{x}{7}} = \sum_{k=0}^\infty \sqrt{7}\,\binom{\frac{1}{2}}{k}\,\left(\frac{x}{7}\right)^k\,, |x| < 7\,.$$

$$g(x) = \sin(5\,x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\,(5\,x)^{2\,k+1}\,.$$

Damit berechnen wir den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\sqrt{7}}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{7}\,\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{x}{7} - \frac{1}{8}\,\frac{x^2}{7^2} + \cdots\right) - \sqrt{7}}{5\,x - \frac{(5\,x)^3}{3!} + \frac{(5\,x)^5}{5!}\cdots} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}\,\frac{1}{7}}{5} = \frac{1}{10\,\sqrt{7}}\,.$$

Anderer Weg: Regel von de l' Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\sqrt{7}}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\,\sqrt{x+7}}}{5\,\cos(5\,x)} = \frac{1}{10\,\sqrt{7}}\,.$$