KLAUSUR

Mathematik I/II für Elektrotechniker

11.3.1998

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

1. Mit dem Rangkriterium entscheide man, ob das folgende Gleichungssystem lösbar ist:
$$\begin{array}{llll} 2\,x_1 & +x_2 & +3\,x_3 & = i\,, \\ 3\,x_1 & +4\,x_2 & & = 1\,, \\ i\,x_1 & +2\,x_2 & -2\,x_3 & = 0\,, \\ & -2\,x_2 & +2\,x_3 & = 3\,, \end{array}$$
und berechne die Determinante der erweiterten Matrix:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & i \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ i & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
(4P)

2. Unter Verwendung von: $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ zeige man, dass für $s > 0$ gilt:
$$\int\limits_0^\infty e^{-s\,t}\,\sqrt{t}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\,.$$
(Hinweis: Man substituiere $st = \tau$ und $\tau = \sigma^2$).
(4P)

3. Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar, und es gelte $f''(x) \geq 0$ für $x \in (a,b)$. Man zeige:

   (a) Für zwei Punkte $x \neq x_0$ aus (a,b) gilt:
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$
   (Die Funktion verläuft oberhalb der Tangente).

   (b) Für drei Punkte $x_1 < x < x_2$ aus (a,b) gilt:
$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)\,.$$
   (Die Funktion verläuft unterhalb der Sekante).

   (6P)

4. Man berechne die Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
(4P)

5. Man berechne für $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) .$$

(4P)

6. Besitzt die folgende Funktion Extremalstellen:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + 1)^3 - 27\, x_1\, x_2\,, \quad x_1 > 0\,, x_2 > 0\,.$$

(6P)

Lösungen 1.) Wir formen die erweiterte Matrix mit Zeilenoperationen um:

A			$\vec{b}^T$	
2	1	3	i	
3	4	0	1	
i	2	-2	0	
0	-2	2	3	
2	1	3	i	
0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$1-\frac{3\,i}{2}$	$\vec{z}_2 - \frac{3}{2}\,\vec{z}_1$
0	$2-\frac{i}{2}$	$-2-\frac{3\,i}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\vec{z}_3 - \frac{i}{2}\,\vec{z}_1$
0	-2	2	3	
2	1	3	i	
0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$1-\frac{3\,i}{2}$	
0	0	$\frac{8}{5}-\frac{12\,i}{5}$	$\frac{7\,i}{5}$	$\vec{z}_3 - \left(2-\frac{i}{2}\right)\,\vec{z}_2$
0	0	$-\frac{8}{5}$	$\frac{19}{5}-\frac{6\,i}{5}$	$\vec{z}_4 + \frac{4}{5}\,\vec{z}_2$
2	1	3	i	
0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$1-\frac{3\,i}{2}$	
0	0	$\frac{8}{5}-\frac{12\,i}{5}$	$\frac{7\,i}{5}$	
0	0	0	$\frac{41}{13}-\frac{10\,i}{13}$	$\vec{z}_4 + \left(\frac{4}{13}+\frac{6\,i}{13}\right)\,\vec{z}_3$

Hieraus entnimmt man: Der Rang der Systemmatrix A beträgt 3, während der Rang der erweiterten Matrix $(A\,|\,\vec{b}^T)$ 4 beträgt. Das System ist somit nicht lösbar.

Durch die Zeilenumformungen wird die Determinante der erweiterten Matrix nicht verändert, so dass für ihre Determinante gilt:

$$\det(A\,|\,\vec{b}^T) = 2\cdot\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{8}{5}-\frac{12}{5}\,i\right)\cdot\left(\frac{41}{13}-\frac{10}{13}\,i\right) = 16-44\,i\,.$$

2.) Wir substituieren zuerst ($s>0$):

$$t = \frac{\tau}{s} \quad \Longleftrightarrow \tau = s\,t$$

und bekommen:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-s\,t}\,\sqrt{t}\,dt &= \int_0^\infty e^{-\tau}\,\sqrt{\frac{\tau}{s}}\,\frac{1}{s}\,d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{s}\,s}\int_0^\infty e^{-\tau}\,\sqrt{\tau}\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Als nächstes substituieren wir:

$$\tau = \sigma^2 \qquad \Longleftrightarrow \sigma = \sqrt{\tau}\,, \tau, \sigma > 0$$

und bekommen mit partieller Integration und dem Hinweis:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\tau}\,\sqrt{\tau}\,d\tau &= \int_0^\infty e^{-\sigma^2}\,\sigma\,2\,\sigma\,d\sigma \\ &= \int_0^\infty \sigma\,2\,\sigma\,e^{-\sigma^2}\,d\sigma \\ &= -\,\sigma\,e^{-\sigma^2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\sigma^2}\,d\sigma \\ &= \int_0^\infty e^{-\sigma^2}\,d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\int_0^\infty e^{-s\,t}\,\sqrt{t}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\,.$$

3.a) Der Satz von Taylor liefert mit einer Zwischenstelle ξ_x:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(\xi_x)}{2}\,(x - x_0)^2\,.$$

Wegen $f''(\xi_x) \geq 0$ und $(x - x_0)^2$ folgt sofort die Behauptung

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

3.b) Wegen $x_1 < x < x_2$ ist die Behauptung offenbar gleichbedeutend mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \, .$$

Betrachten wir die Hilfsfunktion (Sekantenanstieg)

$$h(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \, , \quad x_1 < x \leq x_2 \, .$$

Es gilt:

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{x - x_1} - \frac{f(x) - f(x_1)}{(x - x_1)^2} = \frac{1}{x - x_1} \left(f'(x) - \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right) \, .$$

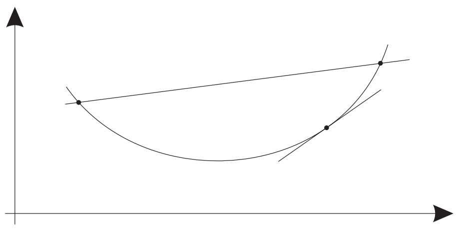
Vergleichen wir nun die Tangente im Punkt x mit dem Funktionswert in x_1, so gilt nach (a):

$$f(x_1) \geq f(x) + f'(x)\,(x_1 - x) \, .$$

Mit $x_1 - x < 0$ folgt daraus:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq f'(x) \, .$$

Dies bedeutet, daß der Sekantenanstieg $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ in $(x_1, x_2]$ monoton wächst, und damit ist die Behauptung bewiesen.



Konvexe Funktion
mit Tangente und
Sekante

4.) Wir entwickeln zunächst die Funktion

$$g(x) = (1 + x)^{\alpha} \, , \quad \alpha \in \mathbb{R} \, ,$$

in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$. Die ν-te Ableitung ergibt sich zu:

$$g^{(\nu)}(x) = \alpha\,(\alpha - 1) \, \cdots \, (\alpha - \nu + 1)\,(1 + x)^{\alpha - \nu} \, .$$

Schreibt man in Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$$

und setzt $\binom{\alpha}{0} = 1$, so ergibt sich die Taylorreihe:

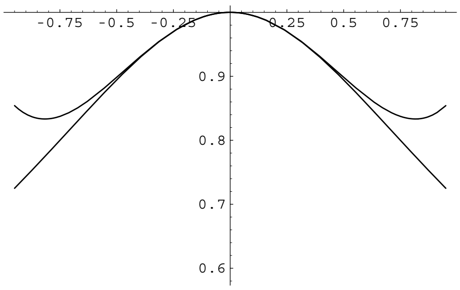
$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu}\, x^{\nu}\,.$$

Mit dem Quotientenkriterium bekommt man aus:

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{\nu+1}}{\binom{\alpha}{\nu}} \right| &= \lim_{\nu\to\infty} \left| \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-\nu)\,\nu!}{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-\nu+1)\,(\nu+1)!} \right| \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \left| \frac{\alpha-\nu}{\nu+1} \right| = 1
\end{aligned}$$

den Konvergenzradius $\rho = 1$. Damit ergibt sich folgende Taylorentwicklung von f um $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\, x^{2\,\nu}\,, \quad |x| < 1\,.$$



Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ mit dem Taylorpolynom vom Grad 5

5.) Für die ersten partiellen Ableitungen erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial\, x_j} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) = -\frac{x_j}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}}$$

und daraus:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}} + \frac{3\,x_j^2}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^5}}\,.$$

Bilden wir nun die Summe, so folgt:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)\\ = \quad & -\frac{3}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}} + \frac{3\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^5}} = 0\,.\end{aligned}$$

6.) Die partiellen Ableitungen der Funktion:

$$f(x_1,x_2) = (x_1+x_2+1)^3 - 27\,x_1\,x_2$$

ergeben sich zu:

$$f_{x_1}(x_1,x_2) = 3\,(x_1+x_2+1)^2 - 27\,x_2\,,$$
$$f_{x_2}(x_1,x_2) = 3\,(x_1+x_2+1)^2 - 27\,x_1\,.$$

Zur Lösung des Systems:

$$3\,(x_1+x_2+1)^2 - 27\,x_2 = 0\,,$$
$$3\,(x_1+x_2+1)^2 - 27\,x_1 = 0\,,$$

addieren und subtrahieren wir die Gleichungen und bekommen:

$$6\,(x_1+x_2+1)^2 - 27\,(x_1+x_2) = 0\,,$$
$$27\,x_1 - 27\,x_2 = 0\,.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt: $x_1 = x_2$ und aus der ersten:

$$(2\,x_1+1)^2 - 9\,x_1 = 0\,.$$

Die quadratische Gleichung besitzt die Lösungen: $x_1 = \frac{1}{4}, 1$. Berechnen wir nun die Hesse-Matrix:

$$H(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 6\,(x_1+x_2+1) & 6\,(x_1+x_2+1)-27 \\ 6\,(x_1+x_2+1)-27 & 6\,(x_1+x_2+1)\end{pmatrix}\,.$$

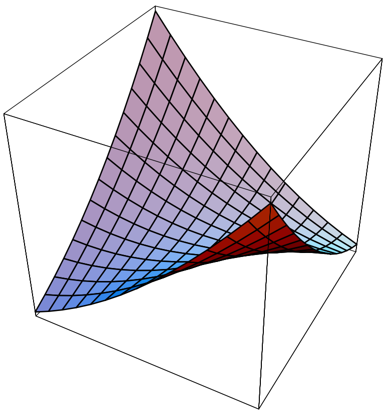
Im Punkt $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ bekommt man:

$$H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 9 & -18 \\ -18 & 9 \end{pmatrix}$$

und im Punkt $(1, 1)$ bekommt man:

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} .$$

Im ersten Punkt kann keine Extremalstelle vorliegen, während im zweiten Punkt eine Minimalstelle mit dem Funktionswert 0 vorliegt. (Im ersten Fall beträgt die Determinante der Hessematrix $9^2 - 18^2 = -243 < 0$ und im zweiten Fall $18^2 - 9^2 = 243 > 0$. Im zweiten Fall gilt ferner $f_{x_1 x_1}(1, 1) = 18 > 0$.)



Die Funktion $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + 1)^3 - 27\, x_1\, x_2$ in einer Umgebung des Punktes $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$