KLAUSUR

Mathematik I/II für Informatiker

11.9.2003

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 20 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. (a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (1, -2, 3)$ und $\vec{b} = (-1, 1, -2)$ und der Punkt $P_0 = (2, -1, 3)$. Wie lautet die Gleichung der Ebene E, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird und durch den Punkt P_0 geht? Man gebe einen Normalenvektor der Ebene E an.
   (4P)
   (b) Vom Punkt $P_1 = \left(\frac{11}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{19}{6}\right)$ wird das Lot (Gerade durch P_1 senkrecht zur Ebene) auf die Ebene E gefällt. Man berechne den Schnittpunkt S des Lots mit der Ebene E.
   (2P)
   (c) Die Punkte mit den Ortsvektoren $\vec{OP_0}$, $\vec{OP_0} + \vec{a}$, $\vec{OP_0} + \vec{b}$ werden als Eckpunkte eines Dreiecks D im Raum aufgefasst. Liegt der Schnittpunkt S im Dreieck D?
   (2P)

2. (a) Durch Zeilenumformungen berechne man die Inverse der Matrix:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (Man stelle zuerst eine untere Dreiecksmatrix her.)
   Zusatzfrage: Wie lautet die Determinante von P?
   (4P)
   (b) Man berechne die Eigenwerte der Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
   indem man $A - \lambda\, E$ durch Zeilenoperationen in eine obere Dreiecksmatrix überführt.
   Zusatzfrage: Welche Vermutung ergibt sich für die Eigenwerte der $n \times n$-Matrix ($n > 4$) $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ mit $a_{j,k} = 1$ für $j \neq k$ und $a_{j,k} = -1$ für $j = k$?
   (8P)

3. (a) Mit $c > 0$ wird für $n \geq 1$ die Folge a_n erklärt durch:
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k\,c} = \frac{n}{n^2 + 1 \cdot c} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\,c}.$$

Man begründe die Ungleichungen

$$n\,\frac{n}{n^2+n\,c} \le a_n \le n\,\frac{n}{n^2+c}$$

und berechne den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(6P)

(b) Durch die Rekursionsgleichung: $b_{n+1} = \dfrac{3}{4-b_n}$
mit dem Startelement $b_1 = 2$ wird eine Folge erklärt. Man berechne die ersten vier Glieder der Folge.
Man zeige durch vollständige Induktion für $n \ge 1$: $1 < b_{n+1} < b_n$.
Aus der Rekursionsgleichung berechne man den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Zusatzfrage: Wie lauten die Folgenglieder, wenn man die Rekursion mit dem Startelement $b_1 = 1$ beginnt?

(6P)

4. (a) Man berechne mithilfe partieller Integration ($u'(x) = 1$) die Stammfunktion:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx\,.$$

Dabei benutze man die Stammfunktion $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arsinh}(x) + C$ und finde zunächst eine Gleichung für die gesuchte Stammfunktion. (arsinh(x) ist die Umkehrfunktion von $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$).

(4P)

(b) Man gebe die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ um $x_0 = 0$ an. Hinweis:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu\,,\ |x| < 1\,,$$

$$\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-\nu+1)}{\nu!}\,,\ \binom{\alpha}{0} = 1\,.$$

(2P)

(c) Man berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sinh(x^2)}\,.$$

(2P)

Lösungen

1.a) Sei $\vec{r} = (x, y, z)$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Ebene E. Dann gilt:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\,\vec{a} + t\,\vec{b}\,, \quad \vec{r}_0 = (2, -1, 3)\,.$$

Einen Normalenvektor bekommt man durch:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (1, -1, -1)\,.$$

Damit erhält man auch die parameterfreie Form:

$$\vec{n}\,(\vec{r} - (2, -1, 3)) = x - y - z = 0\,.$$

1.b) Die Lotgerade hat die Form:

$$\vec{r}_1 + \sigma\,\vec{n}\,, \quad \vec{r}_1 = \left(\frac{11}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{19}{6}\right)\,.$$

Man kann sehen, dass gilt:

$$\frac{11}{6} + \frac{4}{3} - \frac{19}{6} = 0\,.$$

Der Punkt liegt auf der Ebene und stellt den Schnittpunkt dar.
Schneiden der Gerade mit der Ebene ergibt:

$$\vec{r}_1 + \sigma\,\vec{n} = \vec{r}_0 + s\,\vec{a} + t\,\vec{b}\,.$$

Wir multplizieren skalar mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = s\,\vec{a}\,\vec{a} + t\,\vec{a}\,\vec{b}\,, \quad \vec{b}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = s\,\vec{a}\,\vec{b} + t\,\vec{b}\,\vec{b}\,,$$

bzw.

$$1 = 14\,s - 9\,t\,, \quad -\frac{1}{2} = -9\,s + 6\,t\,.$$

Die Lösung lautet:

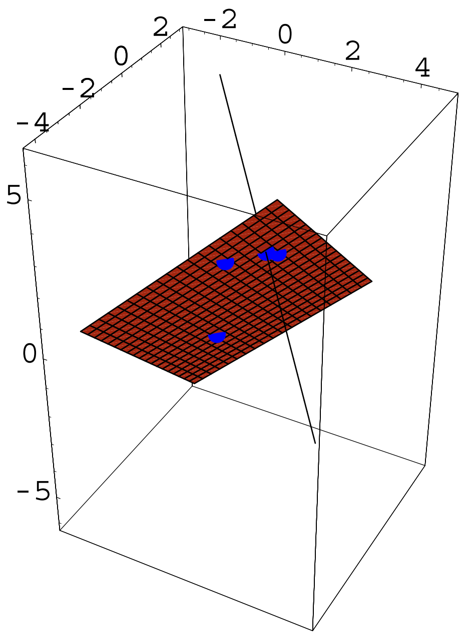
$$s = \frac{1}{2}\,, \quad t = \frac{2}{3}\,.$$

Der Fußpunkt des Lots ist $\left(\frac{11}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{19}{6}\right) = P_1$. Mit dieser Lösung kann die Aufgabe (c) sofort gelöst werden.

1.c) Punkte im Dreieck haben Ortsvektoren:

$$\vec{r}_0 + s\,\vec{a} + t\,\vec{b}\,, \quad 0 \leq s, t \leq 1\,, s + t \leq 1\,.$$

Dies ist für den Schnittpunkt nicht erfüllt: $s + t = \frac{7}{6}$.



Ebene E, Eckpunkte des Dreiecks und Lotgerade

2.a) Wir gehen aus von der Matrix P und formen gleichzeitig die Einheitsmatrix um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{z}_1 \rightsquigarrow \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{z}_1 \rightsquigarrow \frac{1}{4}\,\vec{z}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{z}_2 \rightsquigarrow \vec{z}_2 - \vec{z}_1$, $\vec{z}_3 \rightsquigarrow \vec{z}_3 - \vec{z}_1$, $\vec{z}_4 \rightsquigarrow \vec{z}_4 - \vec{z}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

$\vec{z}_2 \rightsquigarrow -\vec{z}_2$, $\vec{z}_3 \rightsquigarrow -\vec{z}_3$, $\vec{z}_4 \rightsquigarrow -\vec{z}_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Also:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Nach der ersten Umformung haben wir eine untere Dreiecksgestalt: $\det(P) = -4$. Oder: Da nur einmal eine Zeile mit $\frac{1}{4}$ multipliziert wurde und drei Zeilen mit -1 gilt $\det(P) = -4$.

2.b) Wir gehen aus von:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

$\vec{z}_1 \rightsquigarrow \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $\lambda = 2$ ein Eigenwert. Für $\lambda \neq 2$ formen wir weiter um:
$\vec{z}_2 \rightsquigarrow \vec{z}_2 - \frac{1}{2-\lambda}\vec{z}_1$, $\vec{z}_3 \rightsquigarrow \vec{z}_3 - \frac{1}{2-\lambda}\vec{z}_1$, $\vec{z}_4 \rightsquigarrow \vec{z}_4 - \frac{1}{2-\lambda}\vec{z}_1$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Also: $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\,(-2-\lambda)^3$. Eigenwerte sind: $\lambda = 2$ und $\lambda = -2$ (dreifach).
Zusatzfrage: Mit den selben Umformungen wie in 2.b) erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} (n-2-\lambda) & (n-2-\lambda) & (n-2-\lambda) & (n-2-\lambda) & \cdots \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} .$$

Also: $\chi_A(\lambda) = (n-2-\lambda)\,(-2-\lambda)^{n-1}$. Eigenwerte sind: $\lambda = n-2$ und $\lambda = -2$ ($n-1$ -fach).

3.a) Die Summe

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k\,c}\,, \qquad c > 0\,,$$

besteht aus n Summanden. Der kleinste Summand ist $\frac{n}{n^2+n\,c}$. Der größte Summand ist $\frac{n}{n^2+c}$. Also gilt:

$$n\,\frac{n}{n^2+n\,c} \leq a_n \leq n\,\frac{n}{n^2+c}$$

bzw.

$$\frac{1}{1+\frac{c}{n}} \leq a_n \leq \frac{1}{1+\frac{c}{n^2}}\,.$$

Hieraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

3.b) Man berechnet die ersten vier Elemente der Folge:

$$b_1 = 2\,,\, b_2 = \frac{3}{2}\,,\, b_3 = \frac{6}{5}\,,\, b_4 = \frac{15}{14}\,.$$

Es gilt also für $n = 1$:

$$1 < b_2 = \frac{3}{2} < b_1 = 2\,.$$

Annahme:

$$1 < b_{n+1} < b_n\,.$$

Hieraus folgt:

$$-3 < -4 + b_{n+1} < -4 + b_n$$

und

$$1 > \frac{4-b_{n+1}}{3} > \frac{4-b_n}{3}\,.$$

Dies ist gleichbedeutend mit:

$$1 > \frac{1}{b_{n+2}} > \frac{1}{b_{n+1}}\,.$$

Wegen $b_{n+1} > 1$ ergibt sich insgesamt:

$$1 < b_{n+2} < b_{n+1}\,.$$

Aus der Rekursionsgleichung ergibt sich für den Grenzwert b die Bedingung:

$$b = \frac{3}{4-b} \quad\Longleftrightarrow\quad b^2 - 4\,b + 3 = 0\,.$$

Dies lässt zwei Möglichkeiten zu: $b = 1$ oder $b = 3$. Also $b = 1$.
Startet man die Rekursion mit $b_1 = 1$, so berechnet man $b_2 = 1$ und damit $b_n = 1$ für alle $n \geq 1$.
4.a) Partielle Integration:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = x\,\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,.$$

Betrachte das Integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ &= \int \sqrt{1+x^2}\,dx - \text{arsinh}(x)\,. \end{aligned}$$

Für das gesuchte Integral $I = \int \sqrt{1+x^2}\,dx$ haben wir nun die Gleichung:

$$I = x\,\sqrt{1+x^2} - I + \text{arsinh}(x)\,,$$

also

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\,\text{arsinh}(x) + C\,.$$

4.b) Aus der angegebenen Entwicklung folgt:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu}\,x^\nu\,,\, |x| < 1\,,$$

und damit:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} x^{2\,\nu}\,,\ |x| < 1\,.$$

4.c) Regel von de l'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sinh(x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right)\,x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right)\,\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$