KLAUSUR

Mathematik I (E-Techniker/Mechatroniker/Informatiker/W-Ingenieure)

1.3.2006

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Zum Bestehen der Klausur sollten 20 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Durch die Gleichung
$$3\,x + 2\,y - z = 5$$
wird eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Durch die Punkte $P_1 = (1, 1, 1)$ und $P_2 = (0, 0, -1)$ geht eine Gerade G.
In welchem Punkt schneidet die Gerade G die Ebene E?
(4P)

2. (a) Geben Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl an:
$$\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi\,i}\right)^7 .$$
(b) Welche komplexen Zahlen z lösen die folgende Gleichung:
$$(z - 3\,i)^2 = 2\,i\,?$$
Vereinfachen Sie jeweils so weit als möglich. ($\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$).
(6P)

3. Berechnen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\alpha \text{ beliebig gewählte reelle Zahl})\,,$$
indem Sie A durch Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix überführen.
Geben Sie A^{-1} als Produkt von Elementarmatrizen an. (Zeilenoperationen durch Matrizenmultiplikation darstellen).
Berechnen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems mithilfe von A^{-1}:
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$
(8P)

Bitte wenden!

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = (x - a)\,(x - b)\,(x - c)\,.$$

(a, b, c sind beliebig gewählte reelle Zahlen).
Leiten Sie f mit der Produktregel ab und zeigen Sie:

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\,.$$

(6P)

5. Berechnen Sie die Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} x\,\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right)\,.$$

(8P)

6. (a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \ln(1 + x^2)\,dx\,.$$

Beginnen Sie mit Produktintegration (Faktor 1).
(b) Geben Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$g(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.
(10P)

Lösungen

1) Wir berechnen einen Richtungsvektor von G:

$$\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = (0,0,-1) - (1,1,1) = (-1,-1,-2)$$

und bekommen G:

$$(x,y,z) = \vec{OP_1} + t\,\vec{P_1P_2} = (1-t, 1-t, 1-2\,t)\,.$$

Einsetzen in E ergibt:

$$3\,(1-t) + 2\,(1-t) - (1-2\,t) = 4 - 3\,t = 5\,,$$

also $t = -\frac{1}{3}$. Der Schnittpunkt lautet:

$$S = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)\,.$$

2 a) Mit Polarkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\,\pi\,i}\right)^7 &= \left(\sqrt{2}\right)^7 e^{\frac{21}{4}\,\pi\,i} = 8\,\sqrt{2}\,e^{5\,\pi\,i}\,e^{\frac{1}{4}\,\pi\,i} = 8\,\sqrt{2}\,e^{4\,\pi\,i}\,e^{\pi\,i}\,e^{\frac{1}{4}\,\pi\,i} \\
&= 8\,\sqrt{2}\,(-1)\,\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\,\sqrt{2}\,(-1)\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) \\
&= -8 - 8\,i\,.
\end{aligned}$$

Alternative:

$$\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\,\pi\,i} = -1 + i\,, \quad (-1+i)^2 = 1 - 2\,i + i^2 = -2\,i\,, \quad (-1+i)^6 = 8\,i\,.$$

Hieraus folgt: $(-1+i)^7 = 8\,i\,(-1+i) = -8 - 8\,i\,.$

2b) Aus

$$(z - 3\,i)^2 = 2\,i = 2\,e^{\frac{\pi}{2}\,i}$$

folgt:

$$z - 3\,i = \sqrt{2}\,e^{(\frac{\pi}{4} + (k-1)\,\pi)\,i}\,, \quad k = 0, 1\,,$$

bzw.

$$z_1 = 3\,i + \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}\,i} = 3\,i + \sqrt{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\,i = 3\,i + 1 + i\,,$$

$$z_2 = 3\,i - \left(\sqrt{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\,i\right) = 3\,i - (1+i)\,.$$

Also

$$z_1 = 3\,i + 1 + i = 1 + 4\,i\,, \quad z_2 = -1 + 2\,i\,.$$

3) Zeilenoperationen:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{\alpha}{3} \end{pmatrix}\,.$$

Also lautet die Inverse:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{\alpha}{3} \end{pmatrix}$$

und mit Elementarmatrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{2}{3}\,\alpha \end{pmatrix}\,.$$

4) Die Ableitung von $f(x) = (x-a)\,(x-b)\,(x-c)$ ergibt:

$$f'(x) = (x-b)\,(x-c) + (x-a)\,(x-c) + (x-a)\,(x-b)\,.$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \left(\frac{a+b}{2} - b\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right) + \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right) \\ &\quad + \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) \\ &= \left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right) - \left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right) - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\ &= -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\,. \end{aligned}$$

5) Mit der Regel von de l' Hospital ergibt sich:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} 2\,\frac{\sqrt{x}}{x} = 2\,\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

und

$$\lim_{x\to\infty} x\,\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-\frac{1}{x}}\,\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1\,.$$

6a) Partielle Integration und Patrialbruchzerlegung ergibt:

$$\begin{aligned}
\int \ln(1+x^2)\,dx &= \int 1\cdot\ln(1+x^2)\,dx = x\,\ln(1+x^2) - \int x\,\frac{2\,x}{1+x^2}\,dx \\
&= x\,\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\
&= x\,\ln(1+x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \\
&= x\,\ln(1+x^2) - 2\,x + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= x\,\ln(1+x^2) - 2\,x + 2\,\arctan(x) + c\,.
\end{aligned}$$

6b) Mit der geometrischen Reihe bekommen wir:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = x^2\,\sum_{\nu=0}^{\infty}(-x^2)^\nu = x^2\,\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\,x^{2\,\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\,x^{2\,\nu+2}\,, \quad -1 < x < 1\,.$$