KLAUSUR

Mathematik I (E-Techniker/Mechatroniker/Informatiker/W-Ingenieure)

28.2.2008

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Zum Bestehen der Klausur sollten 21 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Durch die Punkte $P_0 = (1, 1, -1), P_1 = (3, -3, 1), P_2 = (-1, -2, 3),$ wird eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ gegeben.
   (a) Wie lautet die Gleichung der Ebene? Geben Sie einen Normalenvektor der Ebene an.
   (b) Welche Punkte der Ebene liegen innerhalb des von P_0, P_1 und P_2 aufgespannten Dreiecks?
   (c) Berechnen sie den Flächeninhalt des Dreiecks.
   (4P)

2. (a) Gegeben sind die komplexen Zahlen:
   $$z_1 = 1 - i\,, \quad z_2 = -1 - i\,.$$
   Stellen Sie z_1 und z_2 in Polarform dar und berechnen Sie:
   $$z_1^7\, z_2^9\,.$$
   (b) Welche komplexen Zahlen z lösen die folgende Gleichung:
   $$z^2 = (1 + i)^3\,?$$
   (6P)

3. (a) Wie muss man $a \in \mathbb{R}$ wählen, damit das folgende System lösbar wird:
   $$x_1 + x_2 = 2\,, \quad 2\,x_1 + 3\,x_2 = 4\,, \quad 4\,x_1 + 5\,x_2 = a\,?$$
   (b) Lösen Sie das folgende System ($a, b \in \mathbb{R}$):
   $$x_1 - a\,x_2 = 1\,, \quad -5\,x_1 - 3\,x_2 = b\,.$$
   (c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ wird die Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$
   invertierbar? Wie lautet die Inverse?
   (8P)

   Bitte wenden!

4. Berechnen Sie die Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}\,, \quad a\in\mathbb{R}\,,$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)\,.$

(6P)

5. Gegeben sei die Funktion $f(x)=3\,x$ und die Punkte:

$$x_k=\frac{k}{n}\,,\quad k=0,1,...,n\,.$$

(a) Berechnen Sie die Summe:

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{k-1}+\frac{x_k-x_{k-1}}{3}\right)(x_k-x_{k-1})$$

und den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} S(n)\,.$

(b) Berechnen Sie das Integral:

$$\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Warum stimmen das Integral und der Grenzwert überein.

(8P)

6. (a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx\,.$$

(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral (erst Substitution, dann partielle Integration):

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

(c) Geben Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$g(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0=0$ an. Wo konvergiert die Reihe?

(10P)

Lösungen

1) (a) Wir berechnen zwei Richtungsvektoren der Ebene:

$$\vec{P_0P_1} = \vec{OP_1} - \vec{OP_0} = (3,-3,1) - (1,1,-1) = (2,-4,2)\,,$$

$$\vec{P_0P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_0} = (-1,-2,3) - (1,1,-1) = (-2,-3,4)\,,$$

und bekommen die Ebenengleichung:

$$(x,y,z) = \vec{OP_0} + s\,\vec{P_0P_1} + t\,\vec{P_0P_2} = (1,1,-1) + s\,(2,-4,2) + t\,(-2,-3,4)\,, \quad s,t \in \mathbb{R}\,.$$

Ein Normalenvektor lautet:

$$\vec{n} = (2,-4,2) \times (-2,-3,4) = (-10,-12,-14)\,.$$

(b) Folgende Punkte liegen in dem Dreieck:

$$(x,y,z) = (1,1,-1) + s\,(2,-4,2) + t\,(-2,-3,4)\,, \quad s,t \in \mathbb{R}\,, \quad 0 \le s\,, 0 \le t\,, s+t \le 1\,.$$

(c) Das Dreieck besitzt den Flächeninhalt:

$$\frac{1}{2}\,||\vec{n}|| = \frac{1}{2}\,\sqrt{10^2 + 12^2 + 14^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\,\sqrt{110} = \sqrt{110}\,.$$

2 a) Mit Polarkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
z_1^7 &= \left(\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{4}\pi i}\right)^7 \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^7 e^{-\frac{7}{4}\pi i} = 8\,\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\pi i} \\
z_2^9 &= \left(\sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{4}\pi i}\right)^9 \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^9 e^{-\frac{27}{4}\pi i} = 16\,\sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{4}\pi i}\,,
\end{aligned}$$

und

$$z_1^7\,z_2^9 = 256\,e^{-\frac{1}{2}\pi i} = -256\,i\,.$$

Alternative:

$$z_1\,z_2 = (1-i)\,(-1-i) = -2\,,$$

$$(z_1\,z_2)^7 = (-2)^7 = -128\,,$$

$$z_2^2 = (-1-i)^2 = 2\,i$$
$$z_1^7\,z_2^9 = -128 \cdot 2\,i = -256\,i\,.$$

2b) Aus

$$z^2 = (1+i)^3 = \left(\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\,\pi\,i}\right)^3 = \sqrt{8}\,e^{\frac{3}{4}\,\pi\,i}$$

folgt:

$$z_k = \sqrt{\sqrt{8}}\,e^{\left(\frac{3}{8}\,\pi + (k-1)\,\pi\right)\,i}\,, \quad k = 1, 2\,,$$

bzw.

$$z_1 = \sqrt[4]{8}\,e^{\frac{3\,\pi}{8}\,i} = \sqrt[4]{8}\,\left(\cos\left(\frac{3\,\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{3\,\pi}{8}\right)\,i\right)\,, \quad z_2 = -z_1\,.$$

3a) Wir betrachten die erweiterte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}\,,$$

Der erste Gauß-Schritt ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a-8 \end{pmatrix}\,.$$

Für $a = 8$ wird das System eindeutig lösbar. Die Lösung lautet:

$$x_2 = 0\,, \quad x_1 = 2\,.$$

3b) Wir betrachten wieder die erweiterte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}\,,$$

Der erste Gauß-Schritt ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & -(5\,a+3) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5+b \end{pmatrix}\,.$$

Für $a \neq -\frac{3}{5}$ ist das System eindeutig lösbar. Die Lösung lautet:

$$x_2 = -\frac{5+b}{5\,a+3}\,, \quad x_1 = 1 - a\,\frac{5+b}{5\,a+3}\,.$$

Für $a = -\frac{3}{5}$ und $b = -5$ ist das System lösbar. Die Lösung lautet:

$$x_2 = \lambda\,, \quad x_1 = 1 - \frac{3}{5}\,\lambda\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Für $a = -\frac{3}{5}$ und $b \neq -5$ ist das System nicht lösbar.

3c) Wir versuchen A durch Zeilenoperationen auf die Einheitsmatrix zu bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & -(5\,a+3) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $a = -\frac{3}{5}$ gibt es keine Inverse. Für $a \neq -\frac{3}{5}$ existiert die Inverse:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{5}{5\,a+3} & -\frac{1}{5\,a+3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5\,a+3} & -\frac{a}{5\,a+3} \\ -\frac{5}{5\,a+3} & -\frac{1}{5\,a+3} \end{pmatrix}$$

Die Inverse lautet:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\,a+3} & -\frac{a}{5\,a+3} \\ -\frac{5}{5\,a+3} & -\frac{1}{5\,a+3} \end{pmatrix}\,.$$

4a) Mit der Regel von de l' Hospital ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x) + \cos(a-x)}{1} = 2\,\cos(a)\,.$$

4b)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x\,e^x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x\,e^x + e^x - 1} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x\,e^x + 2\,e^x} \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

5a) Wir formen um:

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{k=1}^{n} 3\,\frac{1}{n}\left(k-1+\frac{k-(k-1)}{3}\right)\frac{k-(k-1)}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} 3\left(k-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{n}\,\frac{1}{n} = \frac{3}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{3}{n^2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)-\frac{2\,n}{3}\right) = \frac{3}{n^2}\left(\frac{n\,(n+1)}{2}-\frac{2\,n}{3}\right) \\
&= \frac{3}{n^2}\,\frac{3\,n^2-n}{6} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

Damit bekommen wir:

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \frac{3}{2}\,.$$

5b) Das Integral ergibt:

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \left.\frac{3\,x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{3}{2}\,.$$

Die Summen $S(n)$ stellen Riemannsche Summen der Funktion $f(x)$ im Intervall $[0,1]$ dar. Mit $n \to \infty$ geht die Feinheit der Partition gegen null, und es muss gelten

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx\,.$$

6a) Wir schreiben:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{x^2-1+2}{1-x^2} = -1+\frac{2}{1-x^2}\,.$$

Die Partialbruchzerlegung für den zweiten Summanden ergibt:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\,.$$

Damit bekommen wir die Stammfunktion:

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx = -x-\ln(|1-x|)+\ln(|1+x|)+c\,.$$

6b) Wir substituieren $x = \phi(t) = t^2$:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \left(\int e^t\,2\,t\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} .$$

Mit partieller Integration ergibt sich:

$$\int e^t\,t\,dt = e^t\,t - e^t\,.$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2\,e^{\sqrt{x}} + c\,.$$

Alternative:

$$e^{\sqrt{x}} = t\,,\quad t = (\ln(t))^2\,,\quad \frac{dx}{dt}(t) = 2\,\ln(t)\,\frac{1}{t}\,,$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \left(\int 2\,\ln(t)\,dt\right)_{t=e^{\sqrt{x}}} .$$

$$\int 1\cdot\ln(t)\,dt = t\,\ln(t) - \int 1\,dt = t\,\ln(t) - t + c\,.$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2\,e^{\sqrt{x}} + c\,.$$

6c) Mit der geometrischen Reihe bekommen wir:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(x^2)^\nu + x^2\sum_{\nu=0}^{\infty}(x^2)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}x^{2\,\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty}x^{2\,(\nu+1)}$$

bzw.

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty}x^{2\,\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty}x^{2\,\nu} = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}x^{2\,\nu}\,,\quad -1 < x < 1\,.$$