KLAUSUR

Mathematik I (E-Techniker/Mechatroniker/Informatiker/W-Ingenieure)

1.9.2009

(W. Seiler / W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Zum Bestehen der Klausur sollten 20 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$ der Länge 1 mit $(\vec{a}+\vec{b})\,(\vec{a}-2\,\vec{b}) = -1$.
   (a) Welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?
   (b) Welche Länge besitzt der Vektor $\vec{a}-2\,\vec{b}$?
   (c) Welches Volumen besitzt der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{a}\times\vec{b}$ aufgespannte Spat?
   (4P)

2. (a) Welche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ besitzt die Gleichung

$$z^2 + 6\,z = -8 + i\,?$$

   (b) Wo liegen alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 2$, mit

$$\Re\left(\frac{z+1}{z-2}\right) = 0\,?$$

   (6P)

3. Gegeben sei die Matrix: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Lösen Sie das Gleichungssystem: $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Die Matrix A besitzt die Eigenschaft: $A^3 = A^2$. Zeigen Sie: $A^n = A^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
   (c) Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},\, a \neq 1\,.$$

   (8P)

Bitte wenden!

4. (a) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2\,n+1)\,(n+1)\,n}{6} \,.$$

(b) Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3} \,.$$

(6P)

5. Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
(a) Berechnen Sie die Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.
(b) Berechnen Sie die Extremalstellen der Funktion f.
(c) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Intervall $[0,1]$ streng monoton wachsend ist. Wie lautet die Umkehrfunktion der eingeschränkten Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
(8P)

6. (a) Berechnen Sie das Integral:

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, x^3 \, dx \,.$$

Hinweis: Substitution von $t = x^2$, dann partielle Integration.
(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 11 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der Funktion

$$f(x) = \cos(x^2)\, x^3 \,.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Reihe: $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2\,k}}{(2\,k)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

(8P)

Lösungen

1a) Wir bilden das skalare Produkt:

$$(\vec{a}+\vec{b})\,(\vec{a}-2\,\vec{b}) = \vec{a}\,\vec{a} - \vec{a}\,\vec{b} - 2\,\vec{b}\,\vec{b} = -1\,.$$

Hieraus folgt: $\vec{a}\,\vec{b} = 0$. Der Winkel beträgt $\frac{\pi}{2}$.
1b) Wir bilden wieder das skalare Produkt:

$$(\vec{a}-2\,\vec{b})\,(\vec{a}-2\,\vec{b}) = \vec{a}\,\vec{a} - 4\,\vec{a}\,\vec{b} + 4\,\vec{b}\,\vec{b} = 5\,.$$

Wir bekommen die Länge: $||\vec{a}-2\,\vec{b}|| = \sqrt{5}$.
1c) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander. Die Grundfläche des Spats ist 1. Der Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ steht senkrecht auf der Grundfläche und besitzt die Länge 1, denn $||\vec{a}\times\vec{b}|| = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\,\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Das Volumen beträgt 1.
2a) Wir formen um:

$$z^2 + 6\,z = -8 + i \iff z^2 + 6\,z + 9 = 1 + i \iff (z+3)^2 = 1 + i\,.$$

Die Gleichung

$$w^2 = 1 + i = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}\,i}$$

besitzt die Lösungen:

$$w = \pm\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{\pi}{8}\,i}\,.$$

Also besitzt die Ausgangsgleichung die Lösungen:

$$z = -3 \pm \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{\pi}{8}\,i}\,.$$

2b) Wir setzen $z = x + y\,i$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-2} &= \frac{x+1+y\,i}{x-2+y\,i} = \frac{(x+1+y\,i)\,(x-2-y\,i)}{(x-2+y\,i)\,(x-2-y\,i)} \\ &= \frac{(x+1)\,(x-2)+y^2}{(x-2)^2+y^2} + \frac{-(x+1)\,y+(x-2)\,y}{(x-2)^2+y^2}\,i\,.\end{aligned}$$

Der Realteil wird Null, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$(x+1)\,(x-2) + y^2 = 0$$

bzw.
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}\,.$$
Die Zahlen liegen auf einem Kreis mit dem Radius $\frac{3}{2}$ und dem Mittelpunkt $z_0=\frac{1}{2}$.
3a) Gauß-Algorithmus:
$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\;\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\,,$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\;\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\,,$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\;\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\,,$$
Lösung: $x_3=\lambda\in\mathbb{R}$, $x_2=-\lambda$, $x_1=\lambda$.
3b) Induktionsanfang: $A^3=A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$.
Induktionsanahme: für ein beliebiges $n>3$ gilt $A^n=A^2$.
Induktionsschritt: $A^{n+1}=A^n\,A=A^3=A^2$.
3c) Gauß-Algorithmus mit Zeilenoperationen:
$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\0&1&a\end{pmatrix}\;\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,,$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&1&a\end{pmatrix}\;\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,,$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&a-1\end{pmatrix}\;\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\,,$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\;\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\-\frac{1}{a-1}&0&\frac{1}{a-1}\end{pmatrix}\,,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & 1 & \frac{1}{a-1} \\ \frac{a}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \\ -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} \end{pmatrix} .$$

4a) Induktionsanfang:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} .$$

Induktionsannahme: Für ein beliebiges $n > 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2\,n+1)\,(n+1)\,n}{6} .$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{(2\,n+1)\,(n+1)\,n}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\,\frac{(2\,n+1)\,n + 6\,(n+1)}{6} = (n+1)\,\frac{(2\,n+3)\,(n+2)}{6} \\ &= \frac{(2\,(n+1)+1)\,((n+1)+1)\,(n+1)}{6} . \end{aligned}$$

4b) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\,n+1)\,(n+1)\,n}{6\,n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} .$$

5a) Es gilt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2\,x} = 0 .$$

5b) Wir berechnen die ersten Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1 + x^2 - x\,2\,x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} ,$$

$$f''(x) = \frac{-2\,x\,(1+x^2)^2 - (1-x^2)\,2\,(1+x^2)\,2\,x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2\,x\,(3-x^2)}{(1+x^2)^3} .$$

Hieraus entnimmt man:

$$f'(x) = 0 \iff x_1 = -1, x_2 = 1 ,$$

und

$$f''(-1) > 0\,, \quad f''(1) < 0\,.$$

Wir haben ein Minimum bei $x_1 = -1$ und ein Maximum bei $x_2 = 1$.

5c) Aus $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$ sieht man: $f'(x) > 0$ im Intervall $(0, 1)$. Damit ist f streng monoton wachsend mit $f([0, 1]) = [0, \frac{1}{2})$. Wir berechnen die Umkehrfunktion aus:

$$\frac{x}{1 + x^2} = y$$

bzw.

$$x^2 - \frac{x}{y} + 1 = 0$$

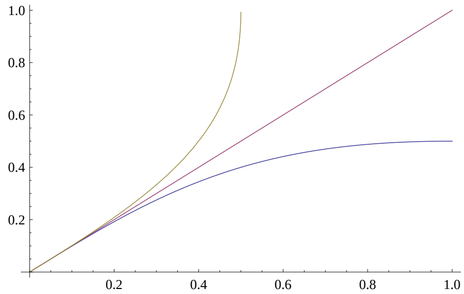
mit der Lösung:

$$x = \frac{1}{2\,y} \pm \sqrt{\frac{1}{4\,y^2} - 1}\,.$$

Die Umkehrfunktion lautet:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2\,x} - \sqrt{\frac{1}{4\,x^2} - 1}\,.$$

(Das Pluszeichen würde zum Grenzwert $\lim_{x \to 0} f^{-1}(x) = \infty$ führen. Es gilt aber $\lim_{x \to 0} f^{-1}(x) = 0$).



Die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $x \in [0, 1]$, mit ihrer Umkehrfunktion.

6a) Die Substitution $x = \sqrt{t}$ ergibt:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, x^3\, dx = \int_0^{\pi} \cos(t)\, t^{\frac{3}{2}}\, \frac{1}{2\,\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(t)\, t\, dt\,.$$

Partielle Integration liefert:

$$\int_0^\pi \cos(t)\, t\, dt = \sin(t)\, t\big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(t)\, dt = \cos(t)\big|_0^\pi = -2\,.$$

Also:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, x^3\, dx = -1\,.$$

Anderer Weg:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, x^3\, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, 2\, x\, x^2\, dx \\
&= \frac{1}{2} \sin(x^2)\, x^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\, 2\, x\, dx \\
&= \frac{1}{2} \sin(x^2)\, x^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \cos(x^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi}} \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1\,.
\end{aligned}$$

6b) Es gilt:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2\,k}}{(2\,k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\,.$$

Damit bekommen wir

$$\cos(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4\,k}}{(2\,k)!} = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + \cdots$$

und

$$f(x) = \cos(x^2)\, x^3 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4\,k+3}}{(2\,k)!} = x^3 - \frac{x^7}{2} + \frac{x^{11}}{24} + \cdots\,,$$

also

$$T_{11}(f, x, 0) = x^3 - \frac{x^7}{2} + \frac{x^{11}}{24}\,.$$