KLAUSUR

Mathematik I (E-Techniker/Mechatroniker/Informatiker/W-Ingenieure)

1.3.2010

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Zum Bestehen der Klausur sollten 20 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Gegeben seien die Punkte $A = (2, 1, -3)$, $B = (3, -2, 2)$, $C = (1, -1, 1)$.
   (a) Wie lautet die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B, C in parameterfreier Form? Weisen Sie nach, dass der Punkt $D = (7, 1, -5)$ in der Ebene E liegt.
   (b) Durch die Punkte A und C wird eine Gerade g_1 gelegt. Durch die Punkte B und D wird eine Gerade g_2 gelegt. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2.
   (c) Die Gerade g_1 teilt die Ebene E in zwei Halbebenen. Liegen die Punkte B und D in derselben Halbebene? **(6P)**

2. (a) Zeigen Sie: $-i\left(\frac{4}{1-i}\right)^{10} = 2^{15}$.
   (b) Geben Sie den Realteil und den Imaginärteil der folgenden komplexen

   Zahl an: $\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\, i\right)^6}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\, i\right)^3}$.
   (c) Welche komplexen Zahlen z lösen folgende Gleichung: $\Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$?
   ($\Im$=Imaginärteil). **(6P)**

3. Gegeben sei das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

   (a) Wählen Sie $a = -1$, $b = 1$, und lösen Sie das System.
   (b) Kann man a und b so wählen, dass das Gleichungssystem keine Lösung Lösung besitzt? Kann man a und b so wählen, dass das Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt? **(6P)**

Bitte wenden!

4. (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung: $\dfrac{1}{|x|} + \dfrac{2}{x} \geq 2\,?$

(b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$: $\dbinom{n+m}{m}\; m! = \prod_{k=1}^{m}(n+k)\,.$

(c) Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$, wird gegeben durch:

$$a_{n+1} = q\,a_n^2\,, \quad a_1 = 1\,.$$

Dabei ist $q \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$a_n = q^{2^{n-1}-1}\,.$$

Welchen Grenzwert besitzt die Folge a_n, wenn $|q| < 1$ ist? **(6P)**

5. Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie folgende Grenzwerte an: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. In welchen Intervallen ist f monoton? Zeichnen Sie eine Skizze von $f(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan(x)\right)$$

eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

(c) Berechnen Sie das Integral: $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx\,.$

(d) Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion $g(x) = \dfrac{x-1}{(x^2+1)^2}$ an. **(8P)**

6. Gegeben sei die Funktion: $f(x) = x\,\ln(1+x)$, $x > -1$.

(a) Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$ an.

(b) Geben Sie die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der Funktion $f(x)$ an. Wie lautet das Taylorpolynom der Funktion $f(x)$ vom Grad 5 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$? Benutzen Sie die Reihe:

$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\,x^\nu\,,\ |x| < 1.$ **(8P)**

Lösungen

1a) Es gilt:

$$\vec{AB} = (1, -3, 5)\,, \quad \vec{AC} = (-1, -2, 4)\,, \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = (-2, -9, -5)\,.$$

Damit bekommen wir die Ebenengleichung:

$$(-2, -9, -5)\,(x, y, z) = (-2, -9, -5)\,(2, 1, -3)$$

bzw.

$$-2\,x - 9\,y - 5\,z = 2\,.$$

Offenbar ist $-2 \cdot 7 - 9 - 5 \cdot (-5) = 2$ und D liegt in der Ebene.
1b) Mit $\vec{BD} = (4, 3, -7)$ ergibt sich:

$$g_1 : \quad \vec{r} = (2, 1, -3) + s\,(-1, -2, 4)\,,$$

$$g_2 : \quad \vec{r} = (3, -2, 2) + t\,(4, 3, -7)\,.$$

Der Schnittpunkt ergibt sich aus:

$$(2, 1, -3) + s\,(-1, -2, 4) = (3, -2, 2) + t\,(4, 3, -7)$$

bzw.

$$s\,(-1, -2, 4) - t\,(4, 3, -7) = (3, -2, 2) - (2, 1, -3) = (1, -3, 5)\,.$$

In Komponenten bekommen wir das Gleichungssystem:

$$-s - 4\,t = 1\,, \quad -2\,s - 3\,t = -3\,, \quad 4\,s + 7\,t = 5\,.$$

Die ersten beiden Gleichungen besitzen die eindeutige Lösung: $s = 3\,, t = -1$. Nachrechnen ergibt, dass auch die dritte Gleichung gelöst wird. Der Schnittpunkt lautet: $S = (-1, -5, 9)$.
1c) Der Schnittpunkt S und der Punkt D ergeben sich auf der Geraden g_2:

$$\vec{OS} = \vec{OB} - \vec{BD}\,, \quad \vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD}\,.$$

Wenn wir vom Schnittpunkt ausgehen, ergibt sich:

$$\vec{OB} = \vec{OS} + \vec{BD}\,, \quad \vec{OD} = \vec{OS} + 2\,\vec{BD}\,.$$

Die Punkte liegen also in derselben Halbebene.
2a) Wir schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{4}{1-i} &= \frac{4\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)} = \frac{4\,(1+i)}{2} \\ &= 2\,(1+i) = 2\,\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\,\pi\,i}\,.\end{aligned}$$

Potenzieren ergibt:

$$\begin{aligned}-i\,\left(\frac{4}{1-i}\right)^{10} &= -i\,\left(2\,\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\,\pi\,i}\right)^{10} \\ &= -i\,2^{10}\,2^5\,e^{\frac{5}{2}\,\pi\,i} = -i\,2^{15}\,e^{\frac{1}{2}\,\pi\,i} \\ &= -i\,2^{15}\,i = 2^{15}\,.\end{aligned}$$

2b) Wir gehen zur Polardarstellung über:

$$\begin{aligned}\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\,i\right)^6}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\,i\right)^3} &= \frac{\left(e^{\frac{1}{12}\,\pi\,i}\right)^6}{\left(e^{\frac{1}{4}\,\pi\,i}\right)^3} = \frac{e^{\frac{1}{2}\,\pi\,i}}{e^{\frac{3}{4}\,\pi\,i}} \\ &= e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\,\pi\,i} = e^{-\frac{1}{4}\,\pi\,i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

2c) Wir bekommen zuerst mit $z = x + y\,i$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\Im\left(\frac{1}{z}\right) = \Im\left(\frac{1}{x+y\,i}\right) = \Im\left(\frac{x-y\,i}{x^2+y^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

Also:

$$\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+y^2+2\,y = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+(y+1)^2 = 1\,.$$

Die Lösungen z liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $z_0 = -i$ und dem Radius 1.
3) Mit einem Gaußschritt erreichen wir die Dreiecksgestalt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & a & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & a \\ 0 & -2 & a-1 & -2 & | & 1-a \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 & | & b+a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{2} & 1 & | & \frac{a-1}{2} \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 & | & b+a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

3a) Für $a = -1$ und $b = 1$ bekommen wir $x_4 = 0$ und das System:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1\,,$$

$$x_2 + x_3 = -1\,.$$

Die Lösung des Ausgangssystems lautet (mit $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = -1 - \lambda\,, \quad x_3 = \lambda\,, \quad x_4 = 0\,.$$

3b) Für $a \neq -1$ besitzt das System genau eine Lösung. Für $a = -1$ und $b \neq 1$ besitzt das System keine Lösung.

4a) Wir unterscheiden zwei Fälle: $x > 0$ und $x < 0$. Im ersten Fall gilt:

$$\frac{1}{|x|} + \frac{2}{x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{x} \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{2} \geq x\,.$$

Im zweiten Fall gilt:

$$\frac{1}{|x|} + \frac{2}{x} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x} \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x} \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq x\,.$$

Im Intervall $x < 0$ besitzt die Ungleichung also keine Lösung. Die Ungleichung wird erfüllt für $0 < x \leq \frac{3}{2}$.

4b) Wir schreiben nach Definition der Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} \binom{n+m}{m} m! &= \frac{(n+m)!}{m!\,n!} m! = \frac{(n+m)!}{n!} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) \cdots (n+m)}{1 \cdot 2 \cdots n} = \prod_{k=1}^{m} (n+k)\,. \end{aligned}$$

4c) Wir verwenden vollständige Induktion. Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad q^{2^{1-1}-1} = q^0 = 1\,.$$

Nehmen wir an, die Behauptung gilt für ein $n > 1$, dann folgt mit der Rekursionsformel:

$$a_{n+1} = q\,a_n^2 = q\,\left(q^{2^{n-1}-1}\right)^2 = q\,q^{2\cdot 2^{n-1}-2} = q^{2^n-1} = q^{2^{n+1-1}-1}\,.$$

Die Folge ist eine Teilfolge von q^n und besitzt den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

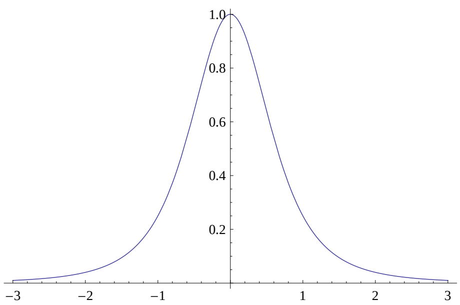
5a) Es gilt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,.$$

Wir berechnen:

$$f'(x) = -\frac{4\,x}{(1+x^2)^3}\,.$$

Die Funktion wächst streng monoton im Intervall $(-\infty, 0]$ und fällt streng monoton im Intervall $[0, \infty)$.



Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

5b) Wir differenzieren:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\,\arctan(x)\right) &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\,\frac{2\,x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1+x^2-2\,x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

5c) Es gilt:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2\,(1+x^2)} + \frac{1}{2}\,\arctan(x)\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

5d) Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2\,x}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{2\,(x^2+1)} - \frac{1}{2}\,\arctan(x) + c \\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\,\arctan(x) + c\,.
\end{aligned}$$

6a) Mit partieller Integration bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\int x\,\ln(1+x)\,dx &= \frac{x^2}{2}\,\ln(1+x) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{1+x}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x+x^2-x}{1+x}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\int \frac{1+x-1}{1+x}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\ln(1+x) + c\,.
\end{aligned}$$

Anderer Weg. Substitution $t = 1 + x$ ergibt:

$$\begin{aligned}
\int x\,\ln(1+x)\,dx &= \left(\int (t-1)\,\ln(t)\,dt\right)_{t=1+x} \\
&= \left(\int t\,\ln(t)\,dt\right)_{t=1+x} - \left(\int \ln(t)\,dt\right)_{t=1+x} \\
&= \left(\frac{t^2}{2}\,\ln(t) - \frac{t^2}{4}\right)_{t=1+x} - (t\,\ln(t) - t)_{t=1+x} \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\ln(1+x) + c\,.
\end{aligned}$$

6b) Wir gehen aus von der Taylorreihe:

$$\ln(1+x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\, x^{\nu}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Die Taylorreihe von $f(x) = x\, \ln(1+x)$ lautet:

$$x\, \ln(1+x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\, x^{\nu+1}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Das Taylorpolynom vom Grad 5 lautet:

$$T_5(f, x, 0) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4}\,.$$