KLAUSUR

Mathematik I (E-Techniker/Mechatroniker/Informatiker/W-Ingenieure)

3.9.2010

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Zum Bestehen der Klausur sollten 20 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Gegeben seien die Punkte:
   $A = (-2, 1, 3)$, $B = (-1, -1, 2)$, $C = (1, -1, -3)$.
   (a) Wie lautet die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B, C in parameterfreier Form? Welchen Inhalt besitzt das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C?
   (b) Durch die Punkte A und B wird eine Gerade g gelegt. Geben Sie alle Ebenen $\tilde{E}$ mit folgender Eigenschaft an: E und $\tilde{E}$ besitzen g als Schnittgerade.
   (6P)

2. (a) Wie lauten die vier Lösungen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung:
   $$z^4 = 1 - i?$$
   Berechnen Sie die Summe $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ und das Produkt $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$.
   (b) Welche $z \in \mathbb{C}$ lösen folgende Gleichung: $\Re\left(\frac{1}{i\, z}\right) = 1\,?$
   ($\Re$=Realteil).
   (6P)

3. Seien und a, b_1, b_2 beliebige reelle Zahlen.
   (a) Berechnen Sie jeweils die Inverse der Matrix:
   $$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) Lösen Sie das Gleichungssystem
   $$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$
   (6P)

   Bitte wenden!

4. Berechnen Sie jeweils den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der Folgen:

   (a) $a_n = \dfrac{\sin(n^3)}{n^2}$,

   (b) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2\,n}\right)^{2\,n-1}$,

   (c) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \left(\dfrac{1}{3}\right)^\nu$.

   (6P)

5. Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \dfrac{1}{x} - e^{-x+1}$, $x > 0$.

   (a) Geben Sie folgende Grenzwerte an: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ in $x_0 = 1$ ein Minimum besitzt.

   (c) Wie lautet das Taylorpolynom der Funktion $f(x)$ vom Grad n um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$?

   (8P)

6. Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int x\,\sqrt{x+2}\,dx\,,$$

   (a) mit partieller Integration ,

   (b) mit der Substitution $\sqrt{x+2} = t$.

   (8P)

Lösungen

1a) Wir berechnen Richtungsvektoren:

$$\vec{AB} = (1, -2, -1)\,, \quad \vec{AC} = (3, -2, -6)\,,$$

und bekommen den Normalenvektor:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (10, 3, 4)\,.$$

Die Gleichung der Ebene E lautet:

$$(10, 3, 4)\,(x, y, z) = 10\,x + 3\,y + 4\,z = (10, 3, 4)\,(-2, 1, 3) = -5\,.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt:

$$\frac{1}{2}\,||\vec{AB} \times \vec{AC}|| = \frac{1}{2}\,\sqrt{10^2 + 3^2 + 4^2} = \frac{5}{2}\,\sqrt{5}\,.$$

1b) Die Gleichung der Gerade g lautet:

$$\vec{OA} + t\,\vec{AB} = (-2, 1, 3) + t\,(1, -2, -1)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Die Gleichung einer Ebene $\tilde{E}$ lautet:

$$\vec{OA} + t\,\vec{AB} + s\,(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, 1, 3) + t\,(1, -2, -1) + s\,(\alpha, \beta, \gamma)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, s \in \mathbb{R}\,,$$

mit

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda\,\vec{AC} + \vec{AB} \times \vec{AC}\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Der Vektor (α, β, γ) ist linear unabhängig vom Vektor $\vec{AB}$.

2a) Wir schreiben:

$$z^4 = \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}\,i}\,,$$

und bekommen:

$$z_k = 2^{\frac{1}{8}}\,e^{-\frac{\pi}{16}\,i}\,e^{(k-1)\frac{\pi}{2}\,i}\,, \quad k = 1, 2, 3, 4\,.$$

Also:

$$z_1 = 2^{\frac{1}{8}}\,e^{-\frac{\pi}{16}\,i}\,, z_2 = 2^{\frac{1}{8}}\,e^{-\frac{\pi}{16}\,i}\,i\,, z_3 = -2^{\frac{1}{8}}\,e^{-\frac{\pi}{16}\,i}\,, z_4 = -2^{\frac{1}{8}}\,e^{-\frac{\pi}{16}\,i}\,i\,.$$

Wir betrachten die Faktorisierung:

$$z^4 - (1 - i) = (z - z_1)\,(z - z_2)\,(z - z_3)\,(z - z_4)$$

und bekommen:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0\,, \quad z_1\, z_2\, z_3\, z_4 = -1 + i\,.$$

Oder direkt:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2^{\frac{1}{8}}\, e^{-\frac{\pi}{16}\, i}\,(1 + i - 1 - i) = 0\,,$$

$$z_1\, z_2\, z_3\, z_4 = 2^{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{\pi}{4}\, i} \cdot 1 \cdot i \cdot (-1) \cdot (-i) = -2^{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{\pi}{4}\, i} = -1 + i\,.$$

2b) Wir bekommen zuerst mit $z = x + y\, i$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\Re\left(\frac{1}{i\, z}\right) = \Re\left(\frac{1}{i\, x - y}\right) = \Re\left(\frac{-i\, x - y}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\,.$$

Also:

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,.$$

Die Lösungen z liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $z_0 = -\frac{1}{2}\, i$ und dem Radius $\frac{1}{2}$.

3a) Wir stellen die Einheitsmatrix her:

$$\begin{array}{c|c}
A & E \\
\begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{a}{3} \end{pmatrix}
\end{array}$$

und bekommen die Inverse:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{a}{3} \end{pmatrix} .$$

Die Inverse der transponierten Matrix ergibt sich wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{T} \right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{a}{3} \end{pmatrix} .$$

3b) Wir formen um mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{c|c}
\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\, b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 - \frac{2}{3}\, a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\, b_2 \\ b_1 - \frac{1}{3}\, a\ b_2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

und bekommen folgende Lösung:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{b_2}{3} - \frac{2}{3}\, \lambda, b_1 - \frac{1}{3}\, a\ b_2 - \left(1 - \frac{2}{3}\, a \right)\ \lambda, \lambda \right) , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

4a)

$$\left| \frac{\sin(n^3)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(n^3)}{n^2} = 0 .$$

4b)

$$\left(1 + \frac{1}{2\, n} \right)^{2\, n - 1} = \left(1 + \frac{1}{2\, n} \right)^{2\, n} \frac{1}{1 + \frac{1}{2\, n}} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2\, n} \right)^{2\, n - 1} = e .$$

4c) Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n} = 0 .$$

Wir formen um:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu}\right) - 1\,.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

folgt:

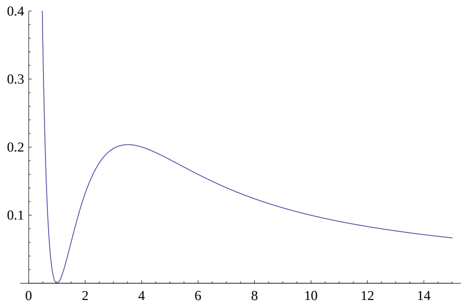
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

5a) Es gilt:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty\,, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 0^+} e^{-x+1} = e\,, \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x+1} = 0\,.$$

Also:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,.$$



Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} - e^{-x+1}$.

5b) Wir berechnen die Ableitungen:

$$f(x) = \frac{1}{x} - e^{-x+1}\,, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + e^{-x+1} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} - e^{-x+1}\,,$$

und bekommen:

$$f'(1) = 0\,, \quad f''(1) = 1\,.$$

Damit liegt bei $x_0 = 1$ ein Minimum vor.

5c) Wir schreiben für $|x-1| < 1$:

$$f(x) = \frac{1}{1-(-(x-1))} - e^{-(x-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}(x-1)^{\nu} - \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}(x-1)^{\nu}\,.$$

Das Taylorpolynom lautet:

$$
\begin{aligned}
T_n(f,x,1) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \left(1-\frac{1}{\nu!}\right)(x-1)^\nu \\
&= \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{5}{6}(x-1)^3 + \frac{23}{24}(x-1)^4 \\
&\quad + \cdots + (-1)^\nu \left(1-\frac{1}{\nu!}\right)(x-1)^n .
\end{aligned}
$$

6a)

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+2}\,dx &= x\,\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{3}x\,(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} + c \\
&= \frac{2}{3}x\,(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+2)\,(x+2)^{\frac{3}{2}} + c \\
&= \left(\frac{2}{5}x - \frac{8}{15}\right)(x+2)^{\frac{3}{2}} + c = \left(\frac{2}{5}x - \frac{8}{15}\right)(x+2)\sqrt{x+2} + c\,,
\end{aligned}
$$

6b)

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+2}\,dx &= \left(\int (t^2-2)\,t\,2\,t\,dt\right)_{t=\sqrt{x+2}} \\
&= \left(\int (2\,t^4 - 4\,t^2)\,dt\right)_{t=\sqrt{x+2}} \\
&= \left(\frac{2}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3\right)_{t=\sqrt{x+2}} + c \\
&= \left(\left(\frac{2}{5}t^2 - \frac{4}{3}\right)t^3\right)_{t=\sqrt{x+2}} + c \\
&= \left(\frac{2}{5}x - \frac{8}{15}\right)(x+2)^{\frac{3}{2}} + c = \left(\frac{2}{5}x - \frac{8}{15}\right)(x+2)\sqrt{x+2} + c\,.
\end{aligned}
$$