KLAUSUR

Mathematik II (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

11.9.2008

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ wird festgelegt durch:
$$f(\vec{a}_1) = \vec{b}_1 + 3\,\vec{b}_2\,, \quad f(\vec{a}_2) = 2\,\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 3\,\vec{b}_3\,.$$
Dabei ist $\vec{a}_1 = (1,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und
$\vec{b}_1 = (1,0,0)$, $\vec{b}_2 = (0,1,0)$, $\vec{b}_3 = (0,0,1)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.
Wie lautet die Matrix der Abbildung f bezüglich dieser Basen?
Wie lautet die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basen
$\vec{\tilde{a}}_1 = 2\,\vec{a}_1 + \vec{a}_2\,, \vec{\tilde{a}}_2 = 3\,\vec{a}_2$ im $\mathbb{R}^2$ und $\vec{\tilde{b}}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_3\,, \vec{\tilde{b}}_2 = \vec{b}_2\,, \vec{\tilde{b}}_3 = \vec{b}_1$ im $\mathbb{R}^3$?

2. (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & b & b \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix}\,, \quad a,b,c \in \mathbb{R}\,, \quad a \neq 0\,, b \neq 1\,,$$
durch Überführen von A in eine Dreiecksmatrix mit Zeilenoperationen.
(b) Zeigen Sie (für $a,b,c,a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,a_3,b_3,c_3 \in \mathbb{R}$):
$$\det \begin{pmatrix} a & b & c & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{pmatrix}\,.$$
(Hinweis: Beginnen Sie mit der Zeilenoperation $\vec{z}_1 \rightsquigarrow \vec{z}_1 - \vec{z}_2$).

3. Gegeben sei die Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$
Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.
Welche Beziehung ergibt sich für A aus dem Satz von Cayley-Hamilton?
Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:
$$A^n = \frac{1}{3}\,(2 + (-2)^n)\,E - \frac{1}{3}\,(-1 + (-2)^n)\,A\,.$$
(E ist die 2×2-Einheitsmatrix).

Bitte wenden!

4. Bestimmen Sie die ersten drei Glieder der Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ der Funktion
$$f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}\,.$$
Benutzen Sie die Identität $f(x)\,(1+\sin(x)) = 1$ und die Entwicklung des Sinus:
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{x^{2\,k+1}}{(2\,k+1)!}\,.$$

5. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 + x\,y + y^2$.
(a) Welche Punkte kommen als Extremalstellen der Funktion $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=1$ infrage?
(b) Wie lautet die Taylorreihe der Funktion $f(x,y)$ um den Entwicklungspunkt $(1,1)$?

6. Gegeben sei die Halbkugel $HK \subset \mathbb{R}^3$ mit dem Radius R:
$$HK = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leq R^2\,, z \geq 0\}\,.$$
Berechnen Sie das folgende Integral mit Kugelkoordinaten:
$$\int\limits_{HK}(x^2+y^2+z^2)\,d(x,y,z)\,.$$

Lösungen

1) Bezüglich der kanonischen Basen bekommen wir folgende Matrix:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Wir rechnen die Bilder der neuen Basisvektoren aus:

$$\begin{aligned} f(\vec{\tilde{a}}_1) &= 2\,f(\vec{a}_1) + f(\vec{a}_2) \\ &= 2\,(\vec{b}_1 + 3\,\vec{b}_2) + 2\,\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 3\,\vec{b}_3 \\ &= 4\,\vec{b}_1 + 5\,\vec{b}_2 + 3\,\vec{b}_3 \\ &= 4\,\vec{\tilde{b}}_3 + 5\,\vec{\tilde{b}}_2 + 3\,(\vec{\tilde{b}}_1 - \vec{\tilde{b}}_3) \\ &= 3\,\vec{\tilde{b}}_1 + 5\,\vec{\tilde{b}}_2 + \vec{\tilde{b}}_3\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{\tilde{a}}_2) &= 3\,f(\vec{a}_2) \\ &= 6\,\vec{b}_1 - 3\,\vec{b}_2 + 9\,\vec{b}_3 \\ &= 6\,\vec{\tilde{b}}_3 - 3\,\vec{\tilde{b}}_2 + 9\,(\vec{\tilde{b}}_1 - \vec{\tilde{b}}_3) \\ &= 9\,\vec{\tilde{b}}_1 - 3\,\vec{\tilde{b}}_2 - 3\,\vec{\tilde{b}}_3\,. \end{aligned}$$

Bezüglich der neuen Basen bekommen wir folgende Matrix:

$$\tilde{M}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 5 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Anderer Weg mit Basisübergangsmatrizen:

$$\tilde{M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} M(f) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 5 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

2a) Für $a \neq 0$ bekommen wir folgende Matrix mit gleicher Determinante:

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b-1 & b-1 \\ 0 & 1 & c-1 \end{pmatrix} .$$

$(\vec{z}_2 \rightsquigarrow z_2 - \frac{1}{a}\,\vec{z}_1,\, \vec{z}_3 \rightsquigarrow z_3 - \frac{1}{a}\,\vec{z}_1)$.
Für $b \neq 1$ bekommen wir folgende Matrix mit gleicher Determinante:

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b-1 & b-1 \\ 0 & 0 & c-2 \end{pmatrix}.$$

$(\vec{z}_3 \rightsquigarrow z_3 - \frac{1}{b-1}\,\vec{z}_2)$.
Die Dreiecksmatrix liefert:

$$\det(A) = a\,(b-1)\,(c-2)\,.$$

2b) Mit den Rechenregeln für Determinanten und durch Entwickeln nach der vierten Spalte bekommen wir:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a & b & c & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 & 0 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)\,(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2\,.$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt:

$$A^2 + A - 2\,E = O \quad \text{bzw.} \quad A^2 = 2\,E - A\,.$$

Für $n = 2$ haben wir den Induktionsanfang:

$$A^2 = \frac{1}{3}\,(2 + (-2)^2)\,E - \frac{1}{3}\,(-1 + (-2)^2)\,A = 2\,E - A\,.$$

Nehmen wir an, die Behauptung gilt für ein $n > 2$, dann folgt wieder mit dem

Satz von Cayley-Hamilton:

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= \frac{1}{3}\,(2+(-2)^n)\,A - \frac{1}{3}\,(-1+(-2)^n)\,A^2 \\
&= \frac{1}{3}\,(2+(-2)^n)\,A - \frac{1}{3}\,(-1+(-2)^n)\,(2\,E-A) \\
&= -\frac{1}{3}\,(-1+(-2)^n)\,2\,E + \left(\frac{1}{3}\,(2+(-2)^n) + \frac{1}{3}\,(-1+(-2)^n)\right)\,A \\
&= -\frac{1}{3}\,(-2-(-2)\,(-2)^n)\,E + \frac{1}{3}\,(1-(-2)\,(-2)^n)\,A \\
&= \frac{1}{3}\,(2+(-2)^{n+1})\,E - \frac{1}{3}\,(-1+(-2)^{n+1})\,A\,.
\end{aligned}
$$

4) Wir schreiben mit unbekannten Koeffizienten

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, x^\nu$$

und für:

$$1+\sin(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu\, x^\mu = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{x^{2\,k+1}}{(2\,k+1)!}\,.$$

Wir entnehmen die Koeffizienten:

$$b_0 = 1\,,\quad b_1 = 1\,,\quad b_2 = 0\,,\quad \ldots$$

Das Cauchy-Produkt ergibt:

$$f(x)\,(1+\sin(x)) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, x^\nu\right)\,\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu\, x^\mu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu\, b_{\nu-\mu}\right)\,x^\nu = 1\,.$$

Kurz:

$$f(x)\,(1+\sin(x)) = a_0\,b_0 + (a_0\,b_1 + a_1\,b_0)\,x + (a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0)\,x^2 + \cdots$$

Vergleich der Koeffizienten x^0, x^1, x^2 liefert das System:

$$
\begin{aligned}
a_0\,b_0 &= 1\,, \\
a_0\,b_1 + a_1\,b_0 &= 0\,, \\
a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Die gesuchten Koeffizienten ergeben sich zu:

$$a_0 = 1\,, \quad a_1 = -1\,, \quad a_2 = 1\,,$$

und die Entwicklung beginnt wie folgt:

$$\frac{1}{1+\sin(x)} = 1 - x + x^2 + \cdots$$

Alternative:

$$f'(x) = -\frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}\,, \quad f''(x) = \frac{\sin(x)}{(1+\sin(x))^2} + 2\,\frac{\cos(x)^2}{(1+\sin(x))^3}\,,$$

$$f(0) = 1\,, \quad f'(0) = -1\,, \quad f''(0) = 4\,,$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \cdots = 1 - x + x^2 + \cdots$$

5a) Der Gradient von f ergibt sich zu:

$$\text{grad} f(x,y) = (2\,x + y, 2\,y + x)\,.$$

Der Gradient von $g(x,y) = x^2 + y^2$ lautet $(2\,x, 2\,y)$. Extremalstellen können also nur die Lösungen des folgenden Systems sein:

$$x^2 + y^2 = 1\,,$$

$$2\,x + y + \lambda\,2\,x = 0\,, \quad 2\,y + x + \lambda\,2\,y = 0\,.$$

Eine Lösung mit $x = 0$ oder $y = 0$ kann es nicht geben. Muliplikation mit y bzw. x ergibt:

$$(2\,x + y + \lambda\,2\,x)\,y = 0\,, \quad (2\,y + x + \lambda\,2\,y)\,x = 0\,.$$

Hieraus folgt $y^2 = x^2$. Es kommen folgende Punkte infrage:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,, \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,, \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,.$$

(Das System wird mit $\lambda = -\frac{3}{2}$ bzw. $\lambda = -\frac{1}{2}$ gelöst).

5b) (Ein Polynom stimmt mit seiner Taylorreihe überein). Wir schreiben:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x-1+1)^2 + (x-1+1)\,(y-1+1) + (y-1+1)^2 \\
&= (x-1)^2 + 2\,(x-1) + 1 + (x-1)\,(y-1) + (x-1) + (y-1) + 1 \\
&\quad +(y-1)^2 + 2\,(y-1) + 1 \\
&= 3 + 3\,(x-1) + 3\,(y-1) + (x-1)^2 + (x-1)\,(y-1) + (y-1)^2\,.
\end{aligned}$$

Anderer Weg: Ableitungen berechnen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 2\,.$$

Die Taylorentwicklung lautet:

$$f(x,y) = 3 + 3\,(x-1) + 3\,(y-1) + (x-1)^2 + (x-1)\,(y-1) + (y-1)^2\,.$$

6) Mit Kugelkoordinaten

$$x = r\,\cos(\phi)\,\sin(\theta)\,, y = r\,\sin(\phi)\,\sin(\theta)\,, z = r\,\cos(\theta)\,,$$

$$0 < r\,, 0 \le \phi \le 2\,\pi\,, 0 < \theta < \pi\,,$$

und der Funktionaldeterminante

$$\left|\det\left(\frac{dg}{d(r,\phi,\theta)}(r,\phi,\theta)\right)\right| = r^2\,\sin(\theta)$$

bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{HK} (x^2+y^2+z^2)\,d(x,y,z) &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{2\,\pi} \left(\int\limits_0^R r^2\,r^2\,\sin(\theta)\,dr\right)\,d\phi\right)\,d\theta \\
&= \int\limits_0^{\pi} \left(\int\limits_0^{2\,\pi} \frac{r^5}{5}\,\sin(\theta)\Big|_{r=0}^{r=R}\,d\phi\right)\,d\theta \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,\pi\,\frac{R^5}{5}\,\sin(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{2}{5}\,\pi\,R^5\,(-\cos(\theta))\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{5}\,\pi\,R^5\,.
\end{aligned}$$