KLAUSUR

Mathematik II (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

11.9.2009

(W. Seiler / W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Gegeben sei der folgende Unterraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie eine Basis von U an.
   (b) Wir betrachten folgende Basen des $\mathbb{C}^2$: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $\vec{\tilde{b}}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\tilde{b}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Wie lauten die Übergangsmatrizen der Basen?
   (c) Die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$, erzeugen einen Unterraum V des $\mathbb{C}^3$. Geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

2. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird gegeben durch:
   $f(\vec{e}_1) = 3\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_2$, $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Wie lautet die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$?
   (b) Welches Bild ergibt sich für das Rechteck
   $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} = \alpha_1\,\vec{e}_1 + \alpha_2\,\vec{e}_2,\ 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1\}$ unter der Abbildung f?
   (c) Wie lautet die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basis
   $\vec{b}_1 = -\vec{e}_2$, $\vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$?

3. Gegeben sei die Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Welche Lösungen besitzt das homogene System $A\,\vec{x} = \vec{0}$?
   Welche Dimension besitzt der Bildraum der Abbildung $\vec{x} \to A\,\vec{x}$?
   (b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & -n+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (c) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

   Bitte wenden!

4. (a) Geben Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe an: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^5 x^\nu$.

   (b) Geben Sie die Taylorreihe der Funktion $g(x) = e^x + 1$ um den Entwicklungspunkt 0 und ihren Konvergenzradius an.

   (c) Wie lauten die ersten 4 Glieder der Taylorreihe der Funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x + 1}$ um den Entwicklungspunkt 0? Gehen Sie von der Gleichung $(e^x + 1)\, f(x) = x^2$ aus.

5. (a) Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\sin(y)}{y} \right) \frac{x^2}{x^2 + y^2} .$$

   (b) Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Funktion:

$$f(x,y) = \int_{x^2-3}^{\sin(y)} g(t)\, dt .$$

   (c) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion $h(x,y) = 3\,x^2 - 4\,y^2$. Stellt der Nullpunkt eine Extremalstelle oder einen Sattelpunkt dar?

6. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x\, e^y$.
   (a) Wie lautet das Taylorpolynom von Grad 5 von f um den Entwicklungspunkt $(0,0)$?
   (b) Die Punkte $(0,0)$, $(1,1)$ und $(2,0)$ bilden die Eckpunkte eines Dreiecks in der (x,y)-Ebene. Integrieren Sie die Funktion $f(x,y)$ über das Dreieck.
   ($\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - e^x$, $\int x\, e^{-x}\, dx = -x\, e^{-x} - e^{-x}$.)

Lösungen

1a) Wir lösen die Gleichung $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ wie folgt: $x_3 = \lambda_3, x_2 = \lambda_2\,, x_1 = -\lambda_2 + \lambda_3$, mit $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Der Unterraum U besteht aus den Vektoren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Eine Basis von U ist:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

1b) Es gilt: $\vec{\tilde{b}}_1 = -i\,\vec{e}_1\,, \vec{\tilde{b}}_2 = \vec{e}_1 + i\,\vec{e}_2$, und $\vec{e}_1 = i\,\vec{\tilde{b}}_1$, sowie $i\,\vec{e}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{\tilde{b}}_2 = -i\,\vec{\tilde{b}}_1 + \vec{\tilde{b}}_2$ bzw. $\vec{e}_2 = -\vec{\tilde{b}}_1 - i\,\vec{\tilde{b}}_2$. Die Übergangsmatrizen lauten:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & -i \end{pmatrix} .$$

1c) Es gilt:

$$||\vec{a}_1|| = \sqrt{2}$$

und

$$\vec{\tilde{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{a}_1 .$$

Wir berechnen den Hilfsvektor:

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{a}}_2 &= \vec{a}_2 - (\vec{a}_2\,\vec{\tilde{e}}_1)\,\vec{\tilde{e}}_1 \\ &= \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \\ i \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Mit

$$||\vec{\tilde{a}}_2|| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

ergibt sich:

$$\vec{\tilde{e}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \\ i \end{pmatrix} .$$

2a) Die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ lautet:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

2b) Mit der Matrix bilden wir das Rechteck ab:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\alpha_1 - \alpha_2 \\ 4\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Das Bild des Rechtecks stellt das von den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm dar.

2c) Aus der Darstellung: $\vec{b}_1 = -\vec{e}_2$, $\vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$ ergibt sich die Übergangsmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Aus der Darstellung: $\vec{e}_1 = 2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2$, $\vec{e}_2 = -\vec{b}_1$ ergibt sich die Übergangsmatrix

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ lautet:

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Anderer Weg:

$$f(\vec{b}_1) = -f(\vec{e}_2) = 2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\,\vec{b}_1 = 4\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 ,$$

$$f(\vec{b}_2) = f(\vec{e}_1) + 2\,f(\vec{e}_2) = 3\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_2 + 2\,(-\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 8\,\vec{e}_2 = -6\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 .$$

3a) Der Nullraum

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

wird erzeugt von dem Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Nullraum hat die Dimension 1. Nach der Dimensionsformel hat der Bildraum die Dimension 3-1=2. (Der Rang der Matrix ist 2).

3b) Wir verwenden vollständige Induktion. Für $n = 1$ gilt:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Wir nehmen an, dass für ein $n > 1$ gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & -n+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Der Induktionsschritt ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n\,A = \begin{pmatrix} 1 & -n & -n+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -n-1 & -n \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(n+1) & -(n+1)+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

3c) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\det(A - \lambda\,E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)^2\,\lambda\,.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$. Die Eigenvektoren ergeben sich aus:

$$\lambda_1 : \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u} = \vec{0}$$

bzw. aus

$$\lambda_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \vec{0}\,.$$

Also: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt den Eigenraum zu λ_1 und $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt den Eigenraum zu λ_2.

4a) Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{(\nu+1)^5}{\nu^5}\right| = \lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^5 = 1\,.$$

Der Konvergenzradius ist $\rho = 1$.
4b) Die Exponentialreihe lautet:

$$e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\,x^\nu\,,\qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

(Absolute Konvergenz für alle $x\in\mathbb{R}$). Damit bekommen wir:

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\,x^\nu$$

mit $a_0 = 2$ und $a_\nu = \dfrac{1}{\nu!}, \nu \geq 1$. (Absolute Konvergenz für alle $x\in\mathbb{R}$. Konvergenzradius: ∞).
4c) Wir setzen:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\,x^\nu$$

und bilden das Cauchy-Produkt:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\,x^\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu\,x^\mu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu\,b_{\nu-\mu}\right)x^\nu = x^2\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert die Bedingungen:

$$x^0:\quad a_0\,b_0 = 0\,,$$

$$x^1:\quad a_0\,b_1 + a_1\,b_0 = 0\,,$$

$$x^2:\quad a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0 = 2\,,$$

$$x^3:\quad a_0\,b_3 + a_1\,b_2 + a_2\,b_1 + a_3\,b_0 = 0\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$b_0 = 0\,, b_1 = 0\,, 2\,b_2 = 1 \Leftrightarrow b_2 = \frac{1}{2}\,, 2\,b_3 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow b_3 = -\frac{1}{4}\,.$$

Die Taylorentwicklung von f beginnt wie folgt:

$$f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{4}\,x^3 + \cdots$$

5a) Der zweite Faktor ist beschränkt:

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \le \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \le 1\,.$$

Der erste Faktor geht gegen Null wegen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,, \quad \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1\,.$$

Damit bekommen wir:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\sin(y)}{y}\right) \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0\,.$$

5b) Wir schreiben:

$$f(x,y) = \int\limits_{x^2-3}^{\sin(y)} g(t)\,dt = \int\limits_{0}^{\sin(y)} g(t)\,dt - \int\limits_{0}^{x^2-3} g(t)\,dt$$

und bekommen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2\,x\,g(x^2-3)\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(y)\,g(\sin(y))\,.$$

5c) Die Höhenlinien

$$h(x,y) = 3\,x^2 - 4\,y^2 = c$$

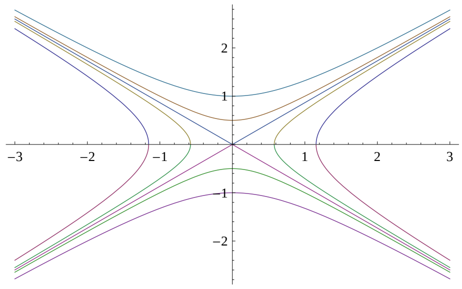
stellen Hyperbeln dar.
$c = 0$:

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\,.$$

$c > 0$:

$$\frac{x^2}{\frac{c}{3}} - \frac{y^2}{\frac{c}{4}} = 1\,.$$

$c < 0$:
$$\frac{y^2}{\frac{-c}{4}} - \frac{x^2}{\frac{-c}{3}} = 1\,.$$

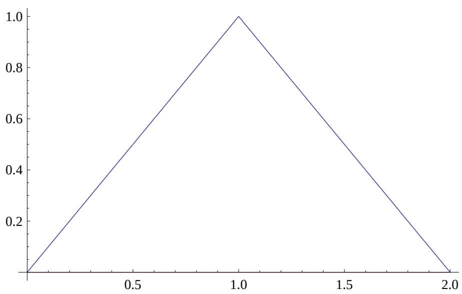


Höhenlinien

Der Gradient von $h(x,y)$ lautet:
$$(6x, -8y) = (0,0)\,.$$
Im Nullpunkt ist der Gradient gleich dem Nullvektor. Die Hessematrix ergibt sich zu:
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$
mit der Determinante
$$\det(H(0,0)) = -48 < 0\,.$$
Wir haben einen Sattelpunkt.

6a) Mit der Exponentialreihe bekommen wir:
$$f(x,y) = x\,e^y = x\,\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{y^\nu}{\nu!} = x\,\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right)\,.$$
Das Taylorpolynom vom Grad 5 lautet:
$$T_5(f,(x,y),(0,0)) = x + y + \frac{x\,y^2}{2} + \frac{x\,y^3}{3!} + \frac{x\,y^4}{4!}\,.$$

6b)



Integrationsbereich

Das Integral ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_D f(x,y)\,d(x,y) &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^x x\,e^y\,dy\,dx + \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2-x} x\,e^y\,dy\,dx \\
&= \int\limits_0^1 x\,(e^x - 1)\,dx + \int\limits_1^2 x\,(e^{2-x} - 1)\,dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 2\,e = -4 + 2\,e\,.
\end{aligned}$$