KLAUSUR

Mathematik II (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

13.9.2010

(W.Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Sind folgende Vektoren im $\mathbb{R}^4$ linear abhängig oder unabhängig
   $(1,1,1,0)\,,(0,0,1,1,)\,,(0,1,1,0)\,?$
   (b) Geben Sie eine Basis des folgenden Unterraums des $\mathbb{R}^4$:
   $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\,|\,5\,x_1-2\,x_2=0\}\,.$

2. Im $\mathbb{R}^3$ wird die Basis $\vec{a}_1=(1,0,0)$, $\vec{a}_2=(0,1,0)$, $\vec{a}_3=(0,1,1)$ und im $\mathbb{R}^2$ die Basis $\vec{b}_1=(2,1)$, $\vec{b}_2=(0,1)$ gegeben. Die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ wird festgelegt durch:
   $f(\vec{a}_1)=2\,\vec{b}_1+\vec{b}_2\,,f(\vec{a}_2)=\vec{b}_1-\vec{b}_2\,,f(\vec{a}_3)=-\vec{b}_1\,.$
   (a) Wie lautet die Matrix von f bezüglich der gegebenen Basen? Wie groß ist der Rang von f? Welche Dimension besitzt der Kern von f?
   (b) Wie lautet die Matrix von f, wenn im $\mathbb{R}^3$ die Basis $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ und im $\mathbb{R}^2$ die Basis $(1,0)$, $(0,1)$ zugrunde gelegt wird?

3. Geben Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix an:

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\,.$$

   Geben Sie eine Matrix B an, sodass $B^{-1}\,A\,B$ eine Diagonalmatrix wird.

   Bitte wenden!

4. (a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$, $x > -1$, in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe absolut?
(b) Wie lautet das Taylorpolynom der Funktion $g(x,y) = \dfrac{e^x}{1+y}$, $y > -1$, vom Grad m um $(x_0, y_0) = (0,0)$? Schreiben Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 aus.
(c) Welche Punkte kommen als Extremalstellen der Funktion g unter der Nebenbedingung $y = x$ infrage?

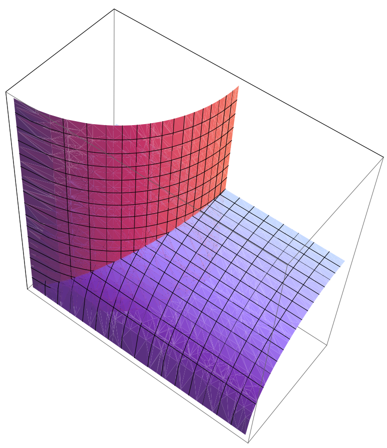
5. Welcher Wert ergibt sich für die Summe der Integrale:

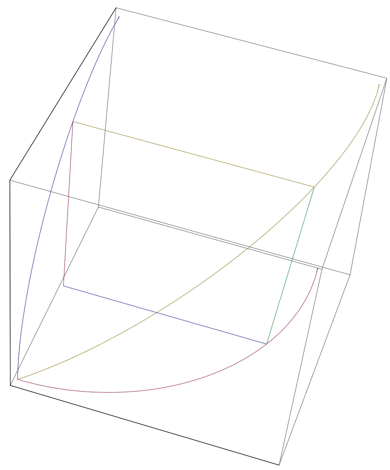
$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{4}x^2}^{x^2} x\,y\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{4}x^2}^{1} x\,y\,dy \right) dx \,?$$

Setzen Sie Grenzen in die Kästchen, sodass gilt:

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{4}x^2}^{x^2} x\,y\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{4}x^2}^{1} x\,y\,dy \right) dx = \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} x\,y\,dx \right) dy\,.$$

6. Die Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ wird gegeben als Schnittmenge von
$\{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 \le a^2 \,, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$ und
$\{(x,y,z) \,|\, x^2 + z^2 \le a^2 \,, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$.
Berechnen Sie das Volumen von D, $(a > 0)$.





Die Schnittmenge D

Lösungen

1a) Wir betrachten die Gleichung:

$$\lambda_1\,(1,1,1,0) + \lambda_2\,(0,0,1,1) + \lambda_3\,(0,1,1,0) = (0,0,0,0)\,.$$

In Komponenten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das System besitzt nur die triviale Lösung: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Die Vektoren sind linear unabhängig.

1b) Zur Lösung der Gleichung $5\,x_1 - 2\,x_2 = 0$ setzen wir $x_4 = \lambda_4$, $x_3 = \lambda_3$, $x_2 = \lambda_2$, ($\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$) und bekommen

$$x_1 = \frac{2}{5}\,\lambda_2\,.$$

Damit ergibt sich folgende Basis des Unterraums:

$$\left(\frac{2}{5}, 1, 0, 0\right), (0,0,1,0)\,, (0,0,0,1)\,.$$

2a) Die Matrix lautet:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die letzten beiden Spalten sind offenbar linear unabghängig:

$$\text{Rang}(f) = 2\,.$$

Nach der Dimensionsformel ist:

$$3 - \mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(f)) = 1\,.$$

2b) Der Basisübergang von der vorgegebenen Basis zur kanonischen Basis im $\mathbb{R}^3$ wird vermittelt durch die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Der Basisübergang von der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^2$ zur vorgegebenen Basis wird vermittelt durch die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen ergibt sich nun zu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Direkt:

$$f(1,0,0) = 2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = (4,3) = 4\,(1,0) + 3\,(0,1)\,,$$

$$f(0,1,0) = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 = (2,0) = 2\,(1,0) + 0\,(0,1)\,,$$

$$f(0,0,1) = f((0,1,1) - (0,1,0)) = -2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = (-4,-1) = -4\,(1,0) - 1\,(0,1)\,.$$

Also:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

3) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\det(A - \lambda\,E) = \det \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} - \lambda \end{pmatrix}\,.$$

Entwickeln nach der ersten Zeile ergibt:

$$\det(A - \lambda\,E) = (\sqrt{3} - \lambda)^2\,(1 - \lambda) - (1 - \lambda) = (1 - \lambda)\,((\sqrt{3} - \lambda)^2 - 1)\,.$$

Damit bekommen wir die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = -1 + \sqrt{3}\,, \quad \lambda_3 = 1 + \sqrt{3}\,.$$

Eigenvektoren erhalten wir aus den homogenen Gleichungssystemen mit den Matrizen:

$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Folgende Eigenvektoren ergeben sich:

$$(0,1,0)\,, \quad (-1,0,1)\,, \quad (1,0,1)\,.$$

Die Eigenvektoren stehen paarweise senkrecht. Wir normieren die Vektoren und erhalten die Orthogonalmatrix:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $B^{-1} = B^T$ und:

$$B^{-1}\,A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Man kann für B auch

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verwenden. Dann muss B^{-1} berechnet werden.

4a) Mit der Exponentialreihe und der geometrischen Reihe gilt:

$$\frac{e^x}{1+x} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\,x^\nu\right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu\,x^\mu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu-\mu}}{\mu!}\right) x^\nu\,.$$

Der Konvergenzradius ist $\rho = 1$. Die Entwicklung beginnt wie folgt:

$$\frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{3}{8}\,x^4 - \frac{11}{30}\,x^5 + \cdots\,.$$

4b) Wie oben bekommen wir die Entwicklung:

$$\frac{e^x}{1+y} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\, x^\nu\right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu\, y^\mu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu-\mu}}{\mu!}\, x^\mu\, y^{\nu-\mu}\right) .$$

Das Taylorpolynom vom Grad m lautet:

$$T_m(g, x, y, 0, 0) = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu-\mu}}{\mu!}\, x^\mu\, y^{\nu-\mu} .$$

Das Taylorpolynom vom Grad 2 lautet:

$$T_2(g, x, y, 0, 0) = 1 - y + x + y^2 - x\,y + \frac{1}{2}\, x^2 .$$

4c) Wir betrachten g unter der Nebenbedingung $y = x$ und bekommen die Funktion:

$$g(x, x) = f(x) .$$

Die Ableitung ergibt:

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+x} - \frac{e^x}{(1+x)^2} = e^x\, \frac{x}{(1+x)^2} .$$

Als Extremalstelle von g unter der Nebenbedingung kommt nur der Punkt $(0, 0)$ infrage. Anders:

$$y - x = 0 , \quad \frac{e^x}{1+y} + \lambda = 0 , \quad -\frac{e^x}{(1+y)^2} - \lambda = 0 .$$

Hieraus folgt: $y = 0$ und $x = 0$.

5) Es gilt:

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{4}x^2}^{x^2} x\,y\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{4}x^2}^{1} x\,y\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x\,\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=\frac{1}{4}x^2}^{y=x^2} dx + \int_1^2 \left(x\,\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=\frac{1}{4}x^2}^{y=1} dx$$

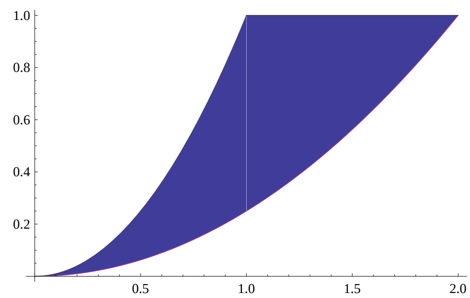
$$= \int_0^1 \frac{15}{32}\,x^5\,dx + \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{32}\,x^5 \right) dx$$

$$= \frac{15}{32}\,\frac{x^6}{6}\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{32}\,\frac{x^6}{6} \right)\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\,.$$

Ändern der Integrationsreihenfolge ($y = \frac{1}{4}\,x^2$, $y = x^2$, $x = 2\,\sqrt{y}$, $x = \sqrt{y}$) ergibt:

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{4}x^2}^{x^2} x\,y\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{4}x^2}^{1} x\,y\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} x\,y\,dx \right) dy\,.$$



Das Integrationsgebiet

Anderer Weg: Integration über feste Grenzen. Zum Beispiel:

$$\int_0^d \left(\int_0^1 x\,y\,dx \right) dy \;=\; \int_0^d \frac{x^2}{2}\,y\,dx\Bigg|_0^1 dy$$

$$= \int_0^d \frac{y}{2}\,dy = \frac{d^2}{4}\,.$$

Setze $d = \sqrt{2}$.

6) Wir beschreiben D durch:

$$0 \le x \le a\,, \quad 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\,, \quad 0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

Das Volumen des Schnittkörpers ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz \right) dy \right) dx \\
&= \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} z\Big|_{z=0}^{z=\sqrt{a^2-x^2}} \, dy \right) dx \\
&= \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\, dy \right) dx \\
&= \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, y\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} \, dx \\
&= \int\limits_0^a (a^2 - x^2)\, dx = \left(a^2\, x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} = \frac{2}{3}\, a^3\,.
\end{aligned}$$