KLAUSUR

Mathematik II (Informatiker)

13.9.2010

(W.Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Sind folgende Vektoren im $\mathbb{R}^4$ linear abhängig oder unabhängig
   $(1,1,1,0)\,,(0,0,1,1,)\,,(0,1,1,0)\,?$
   (b) Geben Sie eine Basis des folgenden Unterraums des $\mathbb{R}^4$:
   $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 5\,x_1 - 2\,x_2 = 0\}\,.$

2. Im $\mathbb{R}^3$ wird die Basis $\vec{a}_1 = (1,0,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1,0)$, $\vec{a}_3 = (0,1,1)$ und im $\mathbb{R}^2$ die Basis $\vec{b}_1 = (2,1)$, $\vec{b}_2 = (0,1)$ gegeben. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wird festgelegt durch:
   $f(\vec{a}_1) = 2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2\,,\, f(\vec{a}_2) = \vec{b}_1 - \vec{b}_2\,,\, f(\vec{a}_3) = -\vec{b}_1\,.$
   (a) Wie lautet die Matrix von f bezüglich der gegebenen Basen? Wie groß ist der Rang von f? Welche Dimension besitzt der Kern von f?
   (b) Wie lautet die Matrix von f, wenn im $\mathbb{R}^3$ die Basis $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ und im $\mathbb{R}^2$ die Basis $(1,0)$, $(0,1)$ zugrunde gelegt wird?

3. Geben Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix an:
   $$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\,.$$
   Geben Sie eine Matrix B an, sodass $B^{-1}\,A\,B$ eine Diagonalmatrix wird.

Lösungen

1a) Wir betrachten die Gleichung:

$$\lambda_1\,(1,1,1,0) + \lambda_2\,(0,0,1,1) + \lambda_3\,(0,1,1,0) = (0,0,0,0)\,.$$

In Komponenten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das System besitzt nur die triviale Lösung: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Die Vektoren sind linear unabhängig.

1b) Zur Lösung der Gleichung $5\,x_1 - 2\,x_2 = 0$ setzen wir $x_4 = \lambda_4$, $x_3 = \lambda_3$, $x_2 = \lambda_2$, ($\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$) und bekommen

$$x_1 = \frac{2}{5}\,\lambda_2\,.$$

Damit ergibt sich folgende Basis des Unterraums:

$$\left(\frac{2}{5}, 1, 0, 0\right)\,, (0,0,1,0)\,, (0,0,0,1)\,.$$

2a) Die Matrix lautet:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Die letzten beiden Spalten sind offenbar linear unabghängig:

$$\text{Rang}(f) = 2\,.$$

Nach der Dimensionsformel ist:

$$3 - \mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(f)) = 1\,.$$

2b) Der Basisübergang von der vorgegebenen Basis zur kanonischen Basis im $\mathbb{R}^3$ wird vermittelt durch die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Der Basisübergang von der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^2$ zur vorgegebenen Basis wird vermittelt durch die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen ergibt sich nun zu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Direkt:

$$f(1,0,0) = 2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = (4,3) = 4\,(1,0) + 3\,(0,1)\,,$$

$$f(0,1,0) = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 = (2,0) = 2\,(1,0) + 0\,(0,1)\,,$$

$$f(0,0,1) = f((0,1,1)-(0,1,0)) = -2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = (-4,-1) = -4\,(1,0) - 1\,(0,1)\,.$$

Also:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

3) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\det(A - \lambda\,E) = \det \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} - \lambda \end{pmatrix}\,.$$

Entwickeln nach der ersten Zeile ergibt:

$$\det(A - \lambda\,E) = (\sqrt{3} - \lambda)^2\,(1 - \lambda) - (1 - \lambda) = (1 - \lambda)\,((\sqrt{3} - \lambda)^2 - 1)\,.$$

Damit bekommen wir die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = -1 + \sqrt{3}\,, \quad \lambda_3 = 1 + \sqrt{3}\,.$$

Eigenvektoren erhalten wir aus den homogenen Gleichungssystemen mit den Matrizen:

$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Folgende Eigenvektoren ergeben sich:

$$(0,1,0)\,, \quad (-1,0,1)\,, \quad (1,0,1)\,.$$

Die Eigenvektoren stehen paarweise senkrecht. Wir normieren die Vektoren und erhalten die Orthogonalmatrix:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $B^{-1} = B^T$ und:

$$B^{-1}\,A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Man kann für B auch

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verwenden. Dann muss B^{-1} berechnet werden.